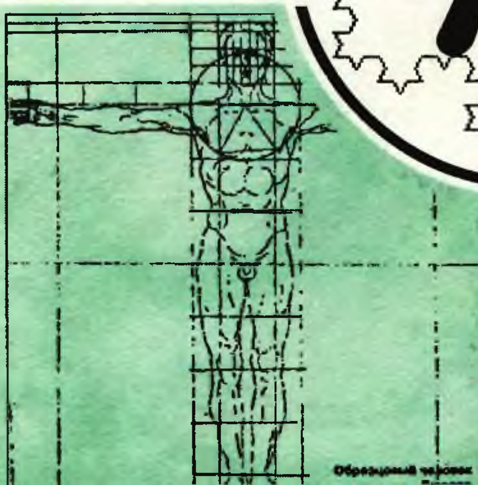
А. В. Жуков

Вездесущее число π



УРСС

ББК 22.1о, 22.13

Жуков Александр Владимирович

Вездесущее число «пи». — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.

ISBN 5-354-00327-X

В настоящей книге, написанной живым, образным языком, собраны разнообразные сведения о числе π — знаменитой математической константе, появляющейся в самых неожиданных местах. Это своеобразная «маленькая энциклопедия» числа π. Основная часть книги имеет познавательный и занимательный характер. В ней излагаются сведения, доступные широкому кругу любителей математики. В дополнительной части книги, занимающей второй план повествования и адресованной «математическим гурманам», приводятся решения и ответы к задачам, сформулированным в основной части, а также справочные данные и комментарии, частично выходящие за рамки школьного курса, но не выходящие за пределы стандартного курса высшей математики в вузе.

Книга будет полезна школьникам, студентам, преподавателям, а также всем любителям математики.

В оформлении обложки использованы:

на первой странице:
вверху — рисунок *А. Т. Фоменко* «...первые десятичные знаки числа π»,
в середине слева — фото раковины Nautilus,
внизу — рисунок *А. Дюрера* «Образцовый человек»;

на четвертой странице: внизу — рисунок *Т. Бонч-Осмоловской* «π-мерные шахматы»,
в середине слева — фото храма Афины «Парфенон»,
вверху — рисунок *А. Т. Фоменко* «...холмы и горы, напоминающие нормальное распределение»

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 31.10.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 2000 экз. Печ. л. 13,5. Зак. № 3-1126/336.

Отпечатано в типографии ООО «Рохос». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

ISBN 5-354-00327-X

Вот мое имя. — И она показала вдаль.

Владимир Казаков. Ряды

Оглавление

Глава 3
В мире чисел 108

Введение

«Пи-пи-пи-и-и, — пела скрипка, и Ежик даже прикрыл глаза — так ему было хорошо и печально»

Сергей Козлов. Весенняя сказка

Среди бесконечного разнообразия чисел число π пользуется особой славой. О нем пишут стихи, о нем сочиняют афоризмы, его изображают на полотнах и — о, веяние времени! — сегодня во всемирной компьютерной сети Internet ему посвящают сайты (см. главу «Такое разное π»).

А что же сами математики? Не уподобляются ли они известному сапожнику, который ходит без сапог? — Нет: в последнее время число π стало привлекать и их (см. главу «Краткая „биография“ числа π»).

Принимаясь за написание этой книги, автор поставил перед собой сложнейшую задачу. С одной стороны, о числе π сейчас осведомлены, по крайней мере, уже шестиклассники. С другой стороны, любая мало-мальская попытка разобраться с каким-либо свойством или даже с самим понятием числа π неизбежно выводит за пределы школьного курса математики. На огромные трудности в постижении числа π ссылаются и специалисты-математики — профессионалы, работающие в области теории чисел.

Постижение числа π можно сравнить с процессом бесконечного приближения к пределу. С каждым новым шагом мы все ближе и ближе приближаемся к заветной цели, однако вожделенный предел по-прежнему продолжает оставаться от нас на расстоянии бесконечного количества шагов.

Или — более романтично — число π можно сравнить с кустом великолепных роз: слегка колышущимся на ветру, с прозрачными капельками от только что прошумевшего дождя на чудесных лепестках, — он находится рядом, его хорошо видно, но приблизиться к нему вплотную, чтобы в полной мере ощутить и осязать все прелести аромата и мягкого шелеста его, невозможно, поскольку располагается он на другом краю пропасти.

О структуре книги

Книга имеет два плана повествования. В основной части книги излагаются сведения, доступные широкому кругу любителей математики. В дополнительной части книги, названной «Математический аккомпанемент» и занимающей второй план повествования, помещены ответы и решения задач из основной части. Здесь также приводятся дополнительные сведения и комментарии, выходящие за рамки школьной программы, однако доступные «математическим гурманам», знакомым с высшей математикой в рамках стандартного курса математического анализа.

Условные обозначения:

— ссылка на материал, содержащийся в дополнительной части «Математический аккомпанемент»

— ссылка с порядковым номером на дополнительный материал, который расположен в «Математическом аккомпанементе» рядом со ссылкой с таким же номером

— «Математический кружок». Подраздел задач и упражнений

— «Вокруг да около π». Юмор, забавные и смешные истории, анекдоты

Глава 1

КРАТКАЯ «БИОГРАФИЯ» ЧИСЛА π

Я буду говорить на языке часов и объясняться числами.

Владимир Казаков.
Ошибка живых

§ 1. Кто придумал число π?

Многие полагают, что раз число π обозначается буквой греческого алфавита, то придумали его непременно древние греки. Конечно же, такой аргумент несостоятельный — мало ли что сегодня обозначается буквами греческого алфавита: α-лучи (физика), σ-орбитали (химия), β-рецепторы (биология)... Древние эллины оставили исключительно глубокий след в истории человеческой цивилизации, но приписывать все исключительно им было бы не в согласии с исторической правдой.

Мы сегодня прекрасно осведомлены о том, кто построил первый самолет, придумал радио и телевизор, оставил первый след подошвы на поверхности Луны. А вот кто первый догадался о замечательной связи длины окружности и ее диаметра — увы, не знает никто. Возможно, об этом догадался какой-нибудь дотошный мастер, изготавливающий колесо для легкой колесницы, или землекоп, обустраивающий круглый колодец. А, может быть, гончар, лесоруб, строитель... — кто бы это ни был, имя этого гения история нам не сберегла.

А вот когда появилось первое *обозначение* знаменитого числа буквой π мы можем сказать с большой степенью уверенности. Его мы находим в работе "Synopsis Palmoriorum Matheseos" («Обозрение достижений математики») английского преподавателя Уильяма Джонса (1675–1749), вышедшей в 1706 году. Несколько раньше, в 1647 году, английский математик Оутред (1574–1660) (кстати, автор знакомого нам знака умножения «$\times$») букву π применил для обозначения *длины* окружности. По-видимому, к этому обозначению его подвигла первая буква греческого слова *περιφερια* — окружность (отсюда наше: *периферия*).

Обозначение π для отвлеченного числа 3,141592... широко распространилось и, по сути, стало международным стандартом после того, как его стал применять выдающийся математик Леонард Эйлер (1707–1783) в своих получивших всемирную известность трудах. К этому обозначению Леонард Эйлер, скорее всего, пришел независимо от Джонса.

§ 2. Все окружности похожи

— Вот и я говорю, — сказал Шалтай-Болтай. — Все на одно лицо: два глаза, ...в середине нос, а под ним — рот. У всех одно и то же!

Льюис Кэрролл.
Алиса в Зазеркалье

В отличие от произвольных фигур, радующих наш глаз богатством и разнообразием форм, все окружности удивительным образом похожи друг на друга. Каждая из окружностей является либо увеличенной, либо уменьшенной, либо просто копией любой другой окружности. Это простое наблюдение естественным образом приводит нас к идее пропорциональности длин окружностей их диаметрам с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

Естественно предположить, что у похожих фигур соответствующие линейные размеры должны быть пропорциональными: если диаметр окружности увеличивается в какое-то количество раз, то и ее длина должна увеличиться в такое же количество раз. Пусть две *произвольные* окружности имеют длину соответственно C_1 и C_2, а диаметр d_1 и d_2, так что $C_1 : C_2 = d_1 : d_2$. По известному свойству пропорции отсюда заключаем:

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2}.$$

Обозначим это отношение буквой π. Отсюда следует замечательный вывод: для любой окружности ее длина C пропорциональна диаметру d с одним и тем же, не зависящим от окружности коэффициентом пропорциональности: $C = \pi d$, или $C = 2\pi R$, если диаметр d выразить через радиус R окружности $d = 2R$.

Конечно, это соображение носит лишь правдоподобный характер, поскольку основано на интуитивном представлении о длине окружности.

§ 3. Преданья старины глубокой

Поскольку все окружности такие замечательные, что длину каждой из них можно найти, умножив ее диаметр на одно и то же число, то чему равно это универсальное число — единый для всех окружностей коэффициент пропорциональности?

Представления о числе π претерпели удивительную эволюцию — от смутных представлений древних, экспериментально — буквально ощупью открывавших количественные закономерности окружающего мира до чрезвычайно глубоких математических теорий современности.

Между Тигром и Ефратом

— Ур халдеев, — сказал Профессор. — Большие были умники, любили все круглое и знали число π. Оно у них равнялось трем. Не очень точно, зато легко выучить.

Н. Герн. Новые приключения
мистера Томпкинса

Натиск зыбучих песков забвения выдержали величественные «скалы-останцы» — памятник древней шумеро-вавилонско-ассирийской культуры конца IV тысячелетия до нашей эры – начала нашей эры. Возможно, они уцелели под безжалостными ветрами истории лишь потому, что «сложены» были из обожженных на огне клинописных глиняных табличек. Из них мы узнаем о многогранных талантах и умениях древних жителей Междуречья. Древние мастера уже делали многое из того, чем можем похвастаться мы. Делением года на 12 месяцев — по числу знаков зодиака, а также суток — на 24 часа мы обязаны древним халдеям. Прикладывая школьный транспортир к углу и определяя его величину в градусах, мы также отдаем дань памяти вавилонским ученым, впервые разделивших круг на 360 равных частей.

Как явствует из клинописных табличек, возраст которых — ни много, ни мало — несколько тысяч лет! — жители Междуречья могли извлекать квадратные и кубические корни, решать квадратные уравнения, рассчитывать объемы плотин и осадных насыпей, имеющих довольно сложные геометрические очертания.

Но вот что удивительно: будучи искусными мастерами и инженерами, жители Междуречья применяли довольно грубое значение для числа π. Как следует из древних решений ряда задач, в своих расчетах они неявно пользовались значением $\pi \approx 3$.

Словесные рецепты древних вавилонян для вычисления площади круга можно выразить современной формулой

$$S = \frac{C^2}{12},$$

где S — площадь круга, а C — длина ограничивающей его окружности. Способ, применявшийся для вывода этой формулы, неизвестен. Если в нее подставить знакомые современному школьнику выражения площади круга $S = \pi r^2$ и длины окружности $C = 2\pi r$, то из равенства $\pi r^2 = \dfrac{(2\pi r)^2}{12}$ получим $\pi = 3$.

Следующая задача содержится в одном из клинописных текстов, принадлежащих Британскому музею ([Вай], с. 134):

«60 длина окружности. 2, на сколько я спустился. Что есть хорда?» Речь в этой задаче идет о вычислении длины хорды AB, стрелка которой CD равна 2, причем длина окружности равна 60 (рис. 1.1).

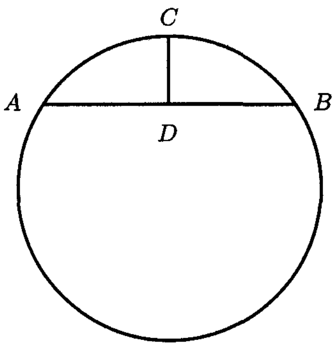


Рис. 1.1

Вот как нам предлагает решать эту задачу неизвестный вавилонский математик (числа записаны в удобной для нас десятичной системе счисления, которой в Междуречье не пользовались):

«Ты возведи 2 в квадрат, 4 ты видишь. 4 от 20, диаметра, отними, 16 ты видишь. 20, диаметр, возведи в квадрат, 400 ты видишь. 16 возведи в квадрат, 256 ты видишь. 256 от 400 отними, 144 ты видишь. Что есть квадратный корень из 144? 12, квадратный корень, это хорда. Таков способ».

Если не обращать внимания на одну вычислительную погрешность, то приведенный рецепт нахождения хорды соответствует формуле $a = \sqrt{d^2 - (d - 2h)^2}$, которую может вывести современный школьник (здесь $a = AB$, $h = CD$, d — диаметр окружности).

Примечательно, что в приведенном тексте при длине окружности $C = 60$ диаметр d получается равным 20 — это соответствует значению $\pi = 3$. Тот факт, что радиус помещается в окружности в качестве хорды 6 раз, оставил неизгладимый отпечаток в мировоззрении жителей Междуречья. Они разделили год на 360 дней и сообразно этому круг (видимую орбиту Солнца) на 360 градусов.

В одной из глиняных табличек, найденных при раскопках 1936 года города Сузы, более чем в 200 милях к востоку от Вавилона, обнаружены расчеты, использующие более точное приближение для числа π: $\pi \approx 3\frac{1}{8}$ ([Ней], с. 61). Известный историк науки профессор Отто Нейгебауэр полагает, что древним месопотамским вычислителям было известно лучшее приближение для π, применявшееся в тех случаях, когда грубое приближение $\pi \approx 3$ приводило к явно неправильным результатам ([Ней], с. 60). Однако не все специалисты разделяют его точку зрения. Например, Айзик Абрамович Вайман считает, что в «математических задачах значение $\pi = 3\frac{1}{8}$ обнаружено лишь в одном случае, и то сомнительном» ([Вай], с. 134).

На древних берегах Нила

Более точное значение для π использовали древние египтяне. В Лондоне и Нью-Йорке хранятся две части древнеегипетского папируса, который цитируют как «папирус Ринда (или Райнда)» — по имени Henry Rhind мецената, приобретшего этот папирус в 1858 году. Гораздо логичнее было бы называть документ именем писца Ахмеса, составившего его в промежутке между 2000 и 1700 годами до нашей эры. Этот папирус был найден в 1858 году, расшифрован и опубликован А. Эйзенлором в 1877 году [Eis].

Стиль изложения Ахмеса близок к стилю древневавилонских табличек. В его записях мы также находим рецепты решения различных практических задач. В одной из таких задач папируса дается «наставление, как вычислить круглый хлебный амбар», имеющий форму круглого цилиндра с диаметром у основания 9 локтей (*локоть* — старинная мера длины, немногим менее 0,5 метра). Для вычисления площади основания предлагается такой рецепт:

«От 9 отними $\frac{1}{9}$, то есть 1. Получится 8. Умножь 8 на 8. Смотри: это 64. Ты правильно нашел».

В данном рецепте содержится следующее правило для определения площади круга. Эта площадь S равна площади квадрата, сторона которого равна диаметру круга d, уменьшенному на $\frac{1}{9}$ своей длины:

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2. \tag{1}$$

Из каких соображений получена эта формула? — Неизвестно. Тем не менее, современные исследователи пытаются найти теоретические обоснования, которыми могли бы руководствоваться древние при ее выводе. Мы остановимся на двух современных реконструкциях вывода этой формулы, не лишенных изящества.

1. Реконструкция А. Е. Ранк ([Хре], с. 180). Опишем вокруг круга диаметра d квадрат. Из этого квадрата удалим четыре угловых квадрата со стороной $\frac{d}{6}$ и восемь еще более мелких квадратов со стороной $\frac{d}{9}$ (рис. 1.2). Тогда оставшаяся часть большого квадрата приближенно равна кругу, и ее площадь вычисляется по формуле (1).

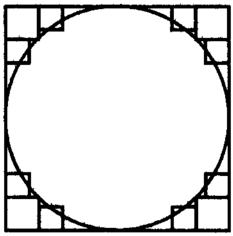


Рис. 1.2

2. Реконструкция А. Даан-Дальмедико и Ж. Пейффер ([Даа], с. 170).

Впишем в квадрат с длиной стороны d восьмиугольник, вершины которого делят стороны квадрата на 3 равные части (рис. 1.3). Площадь этого восьмиугольника приближенно равна площади вписанного в квадрат круга диаметра d и вычисляется по формуле (1).

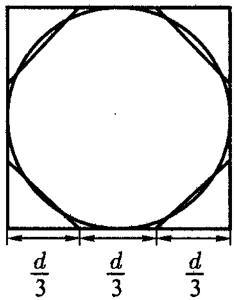


Рис. 1.3

Из формулы (1) следует довольно точная оценка для числа π:

$$S = \pi\frac{d^2}{4} \approx \frac{64}{81}d^2,$$

откуда $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16$.

Находка профессора Глейзера

Одно из ранних приближений для числа π можно извлечь из канонического текста Библии, датируемого примерно X–V веками до нашей эры. В третьей книге Царств подробно рассказывается о том, как мастер Хирам сооружал по заказу правителя Иудейского Израильского царства Соломона храм. Это культовое сооружение украшал большой бассейн для омовения священнослужителей под названием «медного моря»:

> «И сделал литое из меди море — от края его и до края его десять локтей, — совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом»
>
> Третья книга Царств. Гл. 7, стих 23.

Нетрудно подсчитать, что в данном случае используется приближение для числа $\pi = 30/10 = 3$.

Академик Российской академии образования профессор Г. Глейзер сравнительно недавно исследовал первоисточник процитированного выше текста. И вот к каким удивительным выводам пришел (поистине: удивительное рядом, только не нужно закрывать на него глаза!)

В оригинальном тексте Ветхого завета слово линия (*снурок*) имеет два значения. Рядом с этим словом приписана буква ГЕЙ, про которую инструкция на полях указывает, что эта буква не произносится. Древним иудеям было свойственно придавать буквам ивритского алфавита определенные числовые значения (так называемое «учение о гематрии слов»). Если подсчитать сумму значений букв удлиненного слова (с буквой ГЕЙ), и укороченного (без этой буквы), то отношение двух полученных чисел оказывается равным $\frac{111}{106} = 1{,}0471698\ldots$ Профессор Г. Глейзер предполагает, что упоминаемую в тексте длину снурка 30 локтей нужно умножить на этот коэффициент, тогда более точное значение длины окружности «литого моря» окажется равным 31,415094... Соответственно этому новому значению длины снурка получаем $\pi = 3{,}1415094\ldots$, что совпадает с точным значением $\pi = 3{,}141592\ldots$ в первых четырех знаках. Это дало повод профессору Г. Глейзеру выдвинуть сенсационную гипотезу: еще в Древнем мире времен царя Соломона знали о числе π с точностью до 4–5 знаков [Гле].

Наивный период в истории числа π

В числах много многого.

Владимир Казаков.
Ошибка живых

В дошедших до нас с незапамятных времен математических текстах встречаются приближения для числа π различной точности. Все их можно охарактеризовать одной фразой: значение для π есть, но из каких соображений оно было получено — неизвестно. Скорее всего, древние тщательно анализировали и сопоставляли результаты измерений окружающих их предметов. Любой здравомыслящий человек, столкнувшись с практической проблемой измерения длины окружности, может предложить множество способов, как это сделать: «померить» окружность ниточкой, «обкатать» ее линейкой или, наоборот, «прокатить» окружность вдоль линейки. В этой связи не вызывает удивления способ средневекового магистра Франкона из Льежа, который догадался сравнивать площади круга и квадрата взвешиванием фигур на весах ([Кым], с. 64). Опыт, практика, эмпирические данные играют важную роль в осмыслении закономерностей окружающего мира и помогают выдвигать гипотезы, относящиеся к миру идей и абстракций — миру математики.

Ниже приводятся некоторые сведения о найденных древними математиками приближениях для числа π. Происхождение их неизвестно.

		Приближения π:
	Междуречье, 2 тыс. до н. э.	3
	Древний Египет, 2 тыс. до н. э.	3,16
	Древний Китай, XII в. до н. э.	3
	Древняя Иудея, X–V в. до н. э.	3
	(гипотеза Г. Глейзера:	3,1415094...)
	Древняя Индия, VII–V в. до н. э.	3,088
Лю Синь,	Китай, I в. до н. э.	3,1547
Витрувий,	Италия, 14 г. до н. э.	$3\frac{1}{8} = 3{,}125$
Чжан Хэн,	Китай, II в.	$\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$
Цзу Чун-чжи	Китай, V в.	$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$
Брахмагупта,	Индия, 598 г.	$\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$

Любопытно, что живший в раннехристианскую эпоху римский архитектор Витрувий пользовался достаточно грубым приближеиием для числа π. Он проектировал внушительных размеров Римский театр и даже разрабатывал проекты городов. Но точность $3\frac{1}{8}$ для числа π его вполне удовлетворила! (С большой степенью уверенности можно предположить, что используемое им грубое значение π приводило к недочетам в строительстве.)

В приведенной выше таблице обнаруживаются и удивительно точные значения. Результат китайского математика и астронома Цзу Чун-чжи отличается от точного значения $\pi = 3{,}14159265\ldots$ лишь в седьмом знаке после запятой!

Очень долго (вплоть до реформ Петра-I) математическая мысль России находилась в глубоком летаргическом сне. В одной из берестяных грамот XVII века «Чта какое место по округе ведать вдоль и поперег» мы находим различные приближенные способы определения площадей круглых полей. Например, для решения задачи: «Было поле кругом 1 488 сажен. И ты скажи: что в том будет четвероугольном сажен и что вреди круга в дол и поперег до окольной меры мерою» предлагается такой рецепт: «... возьми меры, что кругом ево будет сажен и ту окружную меру раздели на четыре части; а четвертым паем таковожь число умножь: столько в том поле четвероугольных сажен будет, единую сажен не потеряешь.» В нашей символике этот рецепт можно записать в виде формулы:

$$S_{\text{круга}} = \left(\frac{2\pi R}{4}\right)^2, \quad \text{откуда} \quad \pi = 4.$$

«В 1897 году в генеральную ассамблею американского штата Индиана по представлению Эдвина Дж. Гудмена был внесен законопроект №246, в котором повелевалось: „...признать, что де-юре число 'пи' равно 4". В первом чтении этот законопроект был принят. Однако после второго чтения почувствовавшие подвох ликурги решили его — нет, не отменить, а... отложить. В отложенном состоянии он находится до сих пор».

Знание — сила. 1992. №10. С.102.

§ 4. Что такое длина окружности?

Найти одно научное доказательство для меня важнее,чем овладеть всем персидским царством.

Демокрит

Цивилизация древних эллинов подарила миру один из самых значительных подарков в истории человечества — доказательную математику. На смену неизвестно откуда взявшимся вычислительным рецептам древних умельцев и мастеров пришли строгие рассуждения математиков.

Конструкция Антифона

Делать обоснованные суждения о числе π можно лишь в том случае, если хорошо представлять себе, что такое длина окружности.

Попытку осмыслить это понятие одним из первых предпринял философ Антифон, живший в Греции в V веке до нашей эры. В «Истории геометрии» Евдема (IV в. до н. э.) так описывается его попытка определить длину окружности:

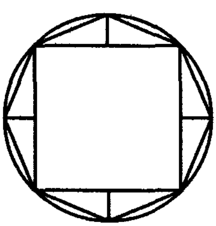


Рис. 1.4

«Начертив круг, он вписал в него такой правильный многоугольник, который мы умеем вписать. Пусть это будет квадрат. Потом он разделил каждую сторону квадрата пополам и через точки деления провел прямые, перпендикулярные к сторонам до пересечения с окружностью. Очевидно, они делят сегменты круга на две равные части (рис. 1.4). Затем он соединил полученные точки с концами сторон квадрата так, что получились четыре треугольника и вся образовавшаяся фигура стала правильным восьмиугольником...» Продолжая этот процесс дальше, Антифон получает 16-угольник, 32-угольник, 64-угольник и т. д. «Поступает он так, пока не исчерпает весь круг, — пишет Евдем. — И Антифон заключает, что таким образом будет вписан многоугольник, периметр которого можно рассматривать как длину окружности» (цитируется по [Бел], с. 15).

Такой подход к определению длины окружности вызвал жаркие споры среди ученых Древней Греции. Симпликий (VI в.) в комментариях к «Истории геометрии» Евдема писал по этому поводу, что «Мы никогда не достигнем окружности круга, даже если бы деление продолжалось до бесконечности» ([Бел], с. 59).

Что же смутило Симпликия и его единомышленников?

Парадоксы бесконечности

Если на клетке слона прочтешь надпись «буйвол», не верь глазам своим.

Козьма Прутков. Мысли и афоризмы, 106

Интуитивное понятие предела, на котором основана конструкция Антифона, чревата хитроумными ловушками, о чем свидетельствуют следующие софизмы (их описание можно найти, например, в книге Е. Фурре «Геометрические головоломки и паралогизмы», изданной одесским издательством “Mathesis” в 1912 году, однако они имеют гораздо более ранее происхождение. Не исключено, что эти софизмы могли войти в утерянную книгу Евклида «Псевдария»).

1. «В любом треугольнике одна из сторон равна сумме двух других».

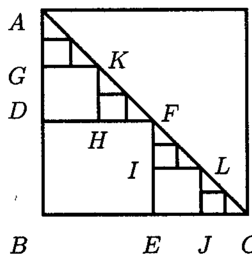


Рис. 1.5

Пусть в рассматриваемом треугольнике ABC точки D, E, F – середины сторон (рис. 1.5). По свойству средних линий треугольника $DF = \frac{1}{2}BC$ и $EF = \frac{1}{2}AB$, так что длина ломаной $ADFEC$ равна сумме длин сторон AB и BC. Если далее взять средние точки G, H, I, J сторон двух новых треугольников ADF и FEC, то точно так же можно показать, что длина ломаной $AGKHFILJC$ равна длине ломаной $ADFEC$ и, следовательно, равна сумме длин сторон AB и BC. Такой процесс измельчения ломаной можно продолжать сколь угодно долго, но на каждом шаге этого процесса длина всех последовательно образованных ломаных равна $AB + BC$. Длина отрезков, составляющих ломаные линии, постоянно уменьшается, их концы все более и более прижимаются к основанию AC, и в пределе периметр ломаных сливается с отрезком AC. Следовательно, $AB + BC = AC$.

2. «Длина окружности равна ее диаметру».

На рис. 1.6 показан символ древнекитайской философии «Инь и Янь», олицетворяющий единение двух противоборствующих начал: дня и ночи, женского и мужского, добра и зла. Контур внутренней дуги этого символа образован из двух полуокружностей, радиус которых вдвое меньше радиуса большого круга, а центры их вместе с центром большой окружности располагаются на диаметре, деля его на 4 равные части (рис. 1.7). Нетрудно подсчитать, что длина «зигзагообразной» дуги внутри круга равна половине длины большой окружности. Далее мы применим бесконечный процесс видоизменения этой дуги, аналогичный измельчению сторон треугольника в предыдущем софизме.

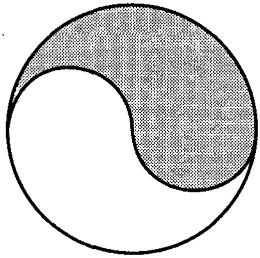


Рис. 1.6

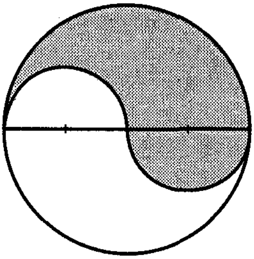


Рис. 1.7

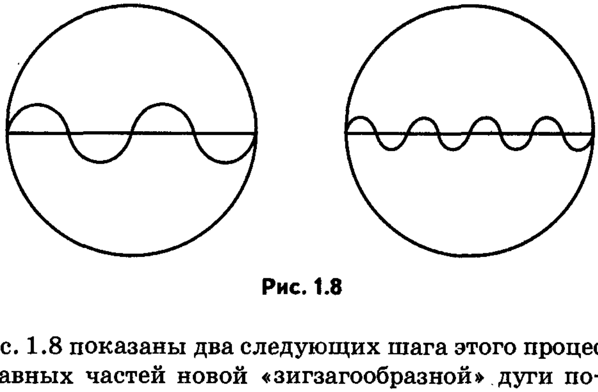


Рис. 1.8

На рис. 1.8 показаны два следующих шага этого процесса. Сумма длин составных частей новой «зигзагообразной» дуги по-прежнему равна половине длины большой окружности. Если продолжать этот процесс неограниченно долго, то в конце-концов «зигзагообразная» кривая сольется с диаметром большой окружности, и в итоге мы «получим», что длина полуокружности равна ее диаметру (отсюда, кстати, следует парадоксальный вывод, что $\pi = 2$).

Идея Бризона

Итак, бесконечность довольно ловко «обводит вокруг пальца» наши наглядные представления о ней. Кажущиеся интуитивно ясными выводы о результатах бесконечного процесса могут отстоять от истины довольно далеко.

Древний ученый, задумавшийся об измерении длины окружности ее диаметром, столкнулся с величайшей проблемой, сродни той, которую выразил поэт: «неизмеримое измерить, любви безбрежной дать предел» (М. Ю. Лермонтов). «Неизмеримое» в данном случае — изворотливая, ускользающая, изгибающаяся в каждой своей точке окружность; измеритель — прямолинейный, как солнечный луч, диаметр.

Действительно ли стремится к какому-нибудь пределу последовательность периметров вписанных в окружность правильных многоугольников? А если стремится, то где гарантия того, что этот предел непременно совпадет с длиной окружности? Не случится ли так, что периметры многоугольников стремятся к какому-то пределу, а длина окружности при этом останется чем-то недосягаемым?

На эти непростые вопросы корректные ответы были даны сравнительно недавно, когда появились строгие методы математического анализа (XVII–XVIII вв.). Удивительно, что за несколько тысячелетий до этого, на самой заре становления точного знания, ученые уже пытались «нащупывать» приемы, обуздывающие норов коварной бесконечности.

Одну из плодотворных идей в этом направлении высказал пифагореец Бризон (V в. до н. э.). Он предложил для нахождения длины окружности не только вписывать в круг (по способу Антифона), но и описывать около него соответствующие правильные многоугольники (рис. 1.9). Длина окружности всегда будет заключена между периметрами вписанного и описанного многоугольников, и может быть установлена тем точнее, чем больше сторон будет у этих многоугольников.

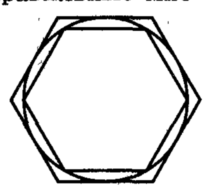


Рис. 1.9

Если периметры вписанных многоугольников стремятся к величине A, а периметры описанных многоугольников — к величине B, то длина окружности C должна находиться между этими двумя числами: $A \leqslant C \leqslant B$. Если вдруг окажется, что $A = B$, то длине окружности C ничего не остается делать, как совпасть с указанными пределами: $A = C = B$. Современные методы анализа позволяют дать этим рассуждениям строгое обоснование.

Ну, а коль скоро идея верна, то за определение длины окружности можно принять следующее:

длиной окружности называется предел периметров правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном возрастании количества их сторон.

Или такое:

длиной окружности называется предел периметров правильных описанных около окружности многоугольников при неограниченном возрастании количества их сторон.

Ничто не мешает также объединить эти два определения в одно.

Математический аккомпанемент

Для обоснования корректности данного в основном разделе определения длины окружности докажем следующие утверждения, следуя [Зво].

1. Существует предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность заданного радиуса R, при неограниченном возрастании количества их сторон.
2. Существует предел последовательности периметров правильных многоугольников, описанных около окружности заданного радиуса R, при неограниченном возрастании количества их сторон.
3. Эти пределы совпадают.

Для доказательства первого утверждения (второе утверждение доказывается аналогично) воспользуемся достаточно очевидным критерием существования предела числовой последовательности: всякая монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет предел. В более строгой формулировке, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть числовая последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ возрастает (убывает), то есть ее члены удовлетворяют условию $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \ldots$ Предположим, она ограничена сверху (снизу), то есть $x_n < B$ (соответствеино $x_n > A$), где A, B — некоторые числа. Тогда у этой последовательности существует предел, равный некоторому числу M (соответственно m), удовлетворяющий неравенству $M \leqslant B$(соответственно $A \leqslant m$).

Доказательство этой интуитивно очевидной теоремы о монотонной и ограниченной последовательности можно найти в стандартном курсе математического анализа (см., например, [Фих], т. 1, с. 71).

Удостоверимся в том, что последовательность периметров правильных вписанных в окружность радиуса R многоугольников удовлетворяет условиям этой теоремы. Обозначим длины сторон правильных n-угольника и $n+1$-угольника, вписанных в данную окружность, соответствеино через a_n и a_{n+1}, тогда их периметры равны соответственно $n\,a_n$ и $(n+1)a_{n+1}$. Докажем, что

$$n\,a_n < (n+1)a_{n+1} \tag{1}$$

На рис. 1.10 показаны стороны AB и $A_1B_1(A_1B_1||AB)$ соответственно правильных n-угольника и $n+1$-угольника, вписанных в окружность с центром O, радиус OA_{n+1} пересекает сторону AB в ее срединной точке C_{n+1}, так что $AC_{n+1} = a_n/2$.

Дуга окружности A_1A_{n+1} составляет $\dfrac{n}{n+1}$-ю часть от дуги AA_{n+1}. Разделим угол AOA_{n+1} на $n+1$ равных частей, и пусть разделяющие радиусы пересекают дугу AA_{n+1} в точках $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Опустим из этих точек перпендикуляры на AB — получим соответственно точки $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$. Несложно убедиться в справедливости неравенств $AC_1 < C_1C_2 < C_2C_3 < \ldots < C_nC_{n+1}$ (отрезки $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_nC_{n+1}$ являются проекциями на AB хорд равной длины $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ с последовательно уменьшающимся углом наклона). Отсюда заключаем, что $AC_1 < \dfrac{1}{n+1} AC_{n+1}$. Но $AC_n = \dfrac{a_n}{2} = AC_1 + \dfrac{a_{n+1}}{2}$, поэтому

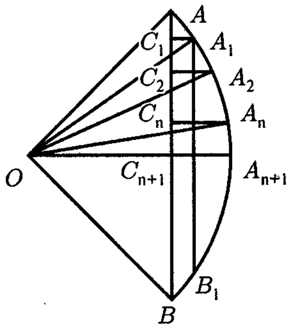


Рис. 1.10

$$\frac{a_n}{2} < \frac{1}{n+1}\frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2},$$

откуда следует неравенство (1).

Итак, последовательность периметров правильных вписанных в окружность заданного радиуса n-угольников с увеличением количества их вершин n монотонно возрастает. Эта последовательность является также ограниченной. Действительно, любой вписанный n-угольник лежит внутри описанного около заданной окружности квадрата. Если же выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то его периметр заведомо меньше периметра объемлющего многоугольника.

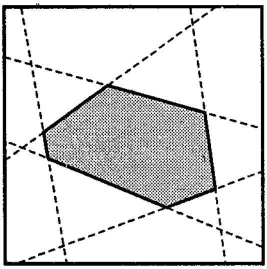


Рис. 1.11

Идея доказательства последнего утверждения видна из рис. 1.11. При каждом «отрезании» периметр внешнего многоугольника уменьшается, так как ломаная заменяется отрезком. Утверждение 1 доказано.

Для доказательства утверждения 3 выразим через радиус окружности периметры вписанного в окружность и описанного около нее правильных n-угольников.

Периметр вписанного n-угольника: $\quad p_n = 2Rn \cdot \sin \dfrac{180^\circ}{n}$;

периметр описанного n-угольника: $\quad P_n = 2Rn \cdot \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}$.

Отношение этих величин $\cos \dfrac{180^\circ}{n}$ при неограниченном увеличении n стремится к 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{P_n} = 1$. По свойству предела отсюда следует $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Как следствие отсюда получаем выражение длины окружности $C = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ через ее радиус $C = 2\pi R$, где через π обозначен предел

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{180^\circ}{n} = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Определив площадь круга как предел площадей вписанных в круг или описанных около него правильных n-угольников при неограниченном увеличении количества их сторон n, аналогичным образом можно вывести формулу для площади круга $S = \pi R^2$.

§ 5. По стопам Архимеда

«Архимедово» число

В колесе же пропорция Архимедова диаметра ко окружности как 7 к 22.

Леонтий Магницкий. Арифметика (1703)

— *Какое из двух чисел больше:* $\frac{22}{7}$ *или 3,14?*
— *Они равны.*
— *Почему?!*
— *Каждое из них равно* π.

А. А. Власов. Из экзаменационных ответов // Квант. 1986. № 2. С. 24

Многие наслышаны о приближении числа π дробью $\frac{22}{7}$, часто ошибочно отождествляя между собой эти два значения. К уже приведенному ошибочному ответу на экзамене (см. эпиграф) можно добавить и решение такой головоломки (см. сайт в интернете: www.joyofpi.com).

Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным (см. рис. 1.12).

Оказывается, одну из вертикальных спичек в знаменателе следует убрать и сделать из нее «крышечку» в левой части равенства. Таким образом, слева образуется стилизованное изображение буквы π.

В чем причина ошибочного отождествления числа π с дробью $\frac{22}{7}$ или 3,14? По всей видимости, причину нужно искать в кривом зеркале популярности. Многие наслышаны о том, что приближение $\pi \approx \frac{22}{7}$ нашел величайший математик древности Архимед

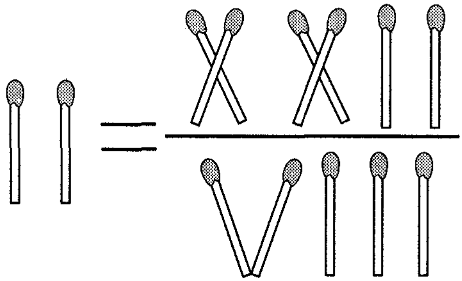


Рис. 1.12

(287–212 до н. э.), в честь которого отношение 22 к 7 часто называют «Архимедовым» числом. На самом деле Архимеду удалось не только найти это довольно хорошее приближение для числа π, но и, — что гораздо важнее, определить точность этого приближения, то есть указать узкий промежуток числовой оси, которому принадлежит отношение длины окружности к ее диаметру.

«Измерение круга»

В этой работе, чудом дошедшей до нас благодаря стараниям многочисленных переписчиков, Архимед доказывает цепочку неравенств, которая в современных обозначениях выглядит так:...

$$3\frac{10}{71} < \frac{6\,336}{2\,017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14\,688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7},$$

или

$$3{,}140\,909\ldots < \pi < 3{,}1\,428\,265\ldots$$

Свои выводы Архимед формулирует в виде теоремы:

«Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше одной седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых» ([Хре], с. 185–191).

Как видим, «архимедово» число $\frac{22}{7}$ приближает число π с избытком, и точность такого приближения равна 0,002. Архимед нашел три точных знака числа π: $\pi = 3{,}14\ldots$ Именно эти три знака чаще всего нами используются в несложных повседневных расчетах.

Сделать точные выводы Архимеду помогли вписанные и описанные многоугольники. Отправляясь от вписанного в заданную окружность и описанного около нее правильных шестиугольников, Архимед затем исследует правильные 12-угольники, 24-угольники, 48-угольники, 96-угольники. При этом Архимед проявляет чудеса изобретательности. Так, для оценки отношения диаметра окружности d к стороне a_6 правильного описанного шестиугольника он привлекает неравенство $\frac{d}{a_6} > \frac{265}{153}$. С высоты сегодняшней эрудиции мы знаем, что $\frac{d}{a_6} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, но во времена Архимеда еще не было тригонометрических функций. Получается, что в своих расчетах Архимед для числа $\sqrt{3}$ подобрал приближение в виде обыкновенной дроби $\frac{265}{153}$ поразительно высокой точности: $\sqrt{3} - \frac{265}{153} < 0{,}000025$. В другом месте он воспользовался оценкой $\frac{1\,351}{780}$, еще более точно приближающей число $\sqrt{3}$ с избытком: $\frac{1\,351}{780} - \sqrt{3} < 0{,}000001$.

Как Архимед мог получить такие точные приближения? Об этом можно только догадываться. Академик С. Н. Бернштейн в комментариях к работе Архимеда ([Руд], с. 224) обращает внимание, например, на такой факт. Запишем число $\sqrt{3}$ в виде цепной дроби (см. одноименную статью в этой книге):

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Если оборвать бесконечную цепочку в этом выражении на 9 звене, а затем преобразовать его к обыкновенной дроби, то получим $\frac{265}{153}$. Если же оборвать цепочку на 12 звене, то получим $\frac{1\,351}{780}$. Удивительное совпадение!

Архимед достоин восхищения еще и потому, что свои высокоточные расчеты с дробями, а также выкладки по извлечению квадратных корней из больших чисел он проводил в неудобной с точки зрения современного человека буквенной системе нумерации. Каким способом пользовался Архимед для приближенного извлечения квадратных корней — неизвестно. В сложных выкладках, проведенных Архимедом, легко может запутаться и современный школьник.

Попробуйте повторить рассуждения Архимеда в решении следующей задачи. На рис 1.13 изображена дуга окружности с центром в точке E и диаметром AC. BC — сторона правильного вписанного в эту окружность шестиугольника, а DC — сторона правильного вписанного двенадцатиугольника. Архимед подбирает величину диаметра окружности таким образом, чтобы для величины $\frac{AB}{BC}$ была

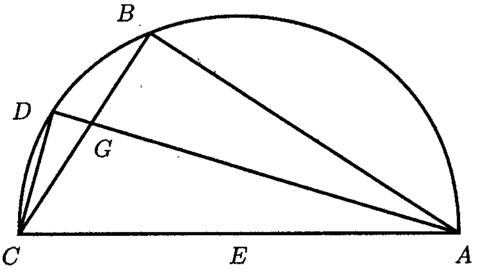


Рис. 1.13

справедлива довольно точная оценка $\frac{AB}{BC} < \frac{1\,351}{780}$. *Для этого он полагает* $AC = 1\,560$ *(убедитесь, что при таком значении диаметра величина* AB^2 *отличается от величины* $\left(\frac{1\,351}{780}BC\right)^2$ *всего на единицу!).*

Исходя из этих числовых данных, докажите неравенство

$$\frac{AC}{CD} < \frac{3\,013\frac{3}{4}}{780}$$

(учтите, что Архимед тригонометрическими функциями не пользовался).

Математический аккомпанемент

Сначала докажем, что треугольник ADC подобен треугольнику CDG, где G — точка пересечения отрезков AD и CB (рис. 1.14).

Действительно, $\angle BAD = \angle DCB$ по свойству вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Но $\angle BAD = \angle DAC$, поэтому $\angle DCB = \angle DAC$. Кроме того, у треугольников ADC и CDG общий угол D. Следовательно, эти треугольники подобны. Тогда

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AC}{CG} \qquad (1).$$

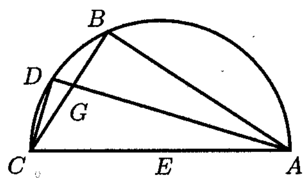


Рис. 1.14

По свойству биссектрисы AG в треугольнике ABC $\frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BG}$. Привлекая далее свойство пропорции и учитывая, что $CG + GB = BC$, имеем: $\frac{AC}{CG} = \frac{AC + AB}{CG + BG} = \frac{AC + AB}{BC}$. Возвращаясь к равенству (1), отсюда заключаем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AC + AB}{BC} \qquad (2).$$

Поскольку $\angle BAC = 30°$, то $BC = \frac{1}{2}AC = 780$. Кроме того, $\frac{AB}{BC} < \frac{1\,351}{780}$, поэтому из равенства (2) следует $\frac{AD}{DC} < \frac{2\,911}{780}$. Отсюда $\frac{AD^2}{DC^2} < \frac{8\,473\,921}{608\,400}$ и

$$\frac{AD^2 + DC^2}{DC^2} < \frac{9\,082\,321}{608\,400}.$$

Но $AD^2 + DC^2 = AC^2$, поэтому

$$\frac{AC^2}{CD^2} < \frac{9\,082\,321}{608\,400} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{CD} < \frac{3\,013\frac{3}{4}}{780}.$$

Длина окружности и площадь круга

«Если дан диаметр и нужно найти суперфицию, то умножь циркумференцию или окружение через диаметр и произведение раздели на 4. И по разделению придет суперфиция».

Леонтий Магницкий. Арифметика. (1703)

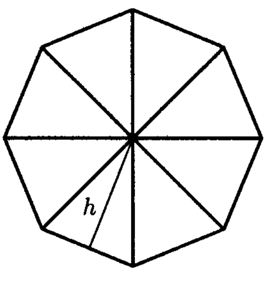


Рис. 1.15

Правильный n-угольник можно разбить на треугольники с общей вершиной в центре n-угольника (рис. 1.15). Площадь n-угольника S представляет собой сумму площадей этих треугольников, откуда получается формула

$$s = n \cdot \frac{ah}{2} = p\frac{h}{2}, \tag{1}$$

где a — сторона n-угольника, h — апофема (высота, опущенная из центра многоугольника на его сторону), p — периметр n-угольника. Приближая круг правильными вписанными и описанными многоугольниками, мы вправе ожидать, что при неограниченном возрастании количества сторон этих многоугольников они в пределе сольются с кругом, и тогда площадь круга можно было бы вычислять по формуле, аналогичной (1):

$$S = C \cdot \frac{r}{2}, \tag{2}$$

где C — длина окружности, r — ее радиус.

Правильность этой формулы Архимед обосновывает в работе «Измерение круга» ([Хре], с. 185–186):

«Каждый круг равновелик прямоугольному треугольнику, один катет которого равен радиусу, а другой — окружности круга».

Идея Архимеда выражать площадь круга через предел площадей правильных вписанных и описанных многоугольников получила дальнейшее развитие при определении объема шара, причем не только в трехмерном пространстве, но и в пространствах многих измерений (см. «π в Многомерии»).

Математический аккомпанемент

Приведем идею доказательства Архимеда, за подробностями отсылая к [Хре], с. 185–186.

Предположим, площадь круга больше площади прямоугольного треугольника с катетами r и C — этот треугольник Архимед обозначает буквой E. Тогда, вписывая в круг правильные многоугольники с последовательно увеличивающимся количеством сторон, мы достигнем того момента, когда площадь одного из них превысит площадь треугольника E. Отрезок h, соединяющий середину стороны такого многоугольника с центром круга, меньше радиуса круга r, а периметр многоугольника p меньше длины окружности C. Отсюда $S_{\text{многоугольника}} = \frac{1}{2}ph < \frac{1}{2}Cr$. Противоречие.

Допустим теперь, что площадь круга меньше площади треугольника E. Проведя аналогичные рассуждения для последовательности описываемых около окружности многоугольников, также приходим к противоречию.

«Значит, круг будет равен треугольнику E» — заключает Архимед.

§ 6. Эра вписанных и описанных многоугольников

Созданный древнегреческими математиками метод вычисления длины окружности посредством вписанных и описанных многоугольников оставался основным на протяжении почти двух тысяч лет.

Клавдий Птолемей (ок. 87–165) для правильного вписанного 720-угольника получает $\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3{,}14166$. Китайский математик Лю Хуэй (III в.) для вписанного 3 072-угольника находит $\pi \approx 3{,}14159$. Самаркандский математик Гияс ад-Дин Джемшид ал-Каши (XIV–XV вв.) в «Трактате об окружности» (1 424) ставит задачу с интригующим условием: выразить окружность через диаметр с такой точностью, чтобы погрешность в длине окружности, диаметр которой равен 600 000 диаметров Земли, не превосходила толщины волоса (примерно 0,5 мм). Для этой цели он определяет число π с точностью до 16 верных десятичных знаков: $\pi \approx 3{,}1415926535897932 5\ldots$, попутно указывая, что «всей истины этого (то есть точного значения π — *А. Ж.*) не знает никто, кроме Аллаха» [Юш1]. Ал-Каши последовательно рассчитывает вписанные многоугольники, начиная с треугольника и дойдя до $3 \cdot 2^{28} = 805\,306\,368$-угольника. В своих вычислениях он использует следующее свойство хорд.

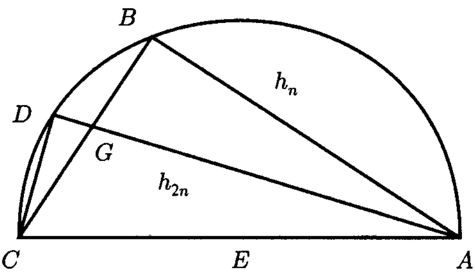


Рис. 1.16

Пусть BC — длина стороны правильного вписанного в окружность с диаметром $AC = 2r$ n-угольника, а DC — длина стороны правильного вписанного $2n$-угольника (рис. 1.16). Тогда длины хорд $h_n = AB$ и $h_{2n} = AD$ связаны соотношением:

$$h_{2n} = \sqrt{r(2r + h_n)}.$$

Полученная ал-Каши точность в измерении окружности была достигнута и превзойдена европейскими математиками лишь в конце XVI века. В 1597 году голландский математик Адриан ван Роомен (1561–1615) публикует свои результаты по вычислению 17 десятичных знаков числа π, для чего применяет $2^{30} = 1\,073\,741\,824$-угольник. На скрупулезные вычисления Адриан ван Роомен потратил несколько лет.

Однако рекорд фантастического прилежания и неимоверной точности побил профессор математических и военных наук Лейденского университета Лудольф ван Цейлен (1539–1610). На протяжении десяти лет, удваивая по методу Архимеда число сторон вписанных и описанных многоугольников и дойдя до 32 512 254 720-угольника, он вычислил 20 точных десятичных знаков числа π. Свое сочинение с изложением результатов в 1596 году профессор завершает патетической фразой: «У кого есть охота, пусть пойдет дальше». И как бы в доказательство того, что «охота пуще неволи» и лучшего охотника, чем он сам, во всем мире не сыскать, Лудольф ван Цейлен опять ринулся вычислять очередные точные знаки числа π, впоследствии доведя их количество до 35. Эти знаки он завещал выбить на своем надгробном камне. В память о неординарном вычислителе современники еще долгое время называли π *числом Лудольфа* ([Руд], с. 54–55).

Отдавая должное мастерству и поистине самоотверженному труду математиков этого периода, посвящавших годы своей жизни, или даже всю жизнь, вычислению точных знаков числа π, все же нужно признать, что их результаты носили скорее спортивный, чем научный характер. Если, например, рассчитать длину экватора сферы, вмещающей известную нам часть Вселенной (радиус сферы $5 \cdot 10^{26}$ метров), используя при этом найденное Лудольфом значение π, то погрешность не превысит одной миллионной доли миллиметра!

Метод вписанных и описанных многоугольников достиг своего наивысшего развития в работах голландских математиков Виллеброрда Снеллия (1580–1626) и Христиана Гюйгенса (1629–1695). Тонкие геометрические рассуждения позволили им получить более точные результаты при меньшем числе сторон используемых многоугольников. Результат Архимеда — три точных знака π — Снеллий получает уже для вписанного и описанного шестиугольников, а 96-угольники помогают ему рассчитать 7 точных знаков π. Христиан Гюйгенс в сочинении «О найденной величине круга» (1654) доказывает ряд теорем о соотношениях между длинами хорд и стягиваемых ими дуг, которые позволили ему вычислить 10 точных знаков числа π уже для 60-угольника.

Один из «тонких» геометрических фактов, обнаруженных Гюйгенсом, состоит в следующем. Отложим на числовой оси значение периметра p_n правильного вписанного в окружность диаметра 1 n-угольника и значение P_n правильного описанного около нее n-угольника. Разделим отрезок $[p_n, P_n]$ на три равные части. Докажите, что для любого n число π принадлежит первой из этих частей, то есть

$$p_n < \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n.$$

Математический аккомпанемент

С оригинальной работой Христиана Гюйгенса можно познакомиться в сборнике [Руд], с. 105–166. Ниже приводится другое решение задачи, использующее известные современному школьнику факты тригонометрии. Неравенство $p_n < \pi$ очевидно, поэтому мы сосредоточим свои усилия на доказательстве неравенства $\pi < p$, где $p = \dfrac{2p_n + P_n}{3}$.

Используем следующие два неравенства:

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{и} \quad \sin x > x - \frac{x^3}{6} \qquad (1)$$
$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что производная функции $f(x) = \operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ положительна:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - (1 + x^2) = \operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0,$$

поскольку $\operatorname{tg} x > x$ — в этом можно убедиться, сравнив площади сектора OAB окружности единичного радиуса с центральным углом x и прямоугольного треугольника OAC, катет AC которого касается дуги этого сектора (рис. 1.17). Это означает, что функция f возрастает. Отсюда следует $f(x) > f(0) = 0$ — первое из неравенств (1).

Доказательство второго неравенства (1) несколько сложнее. Положим $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$. Имеем:

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$$
$$g''(x) = -\sin x + x > 0$$

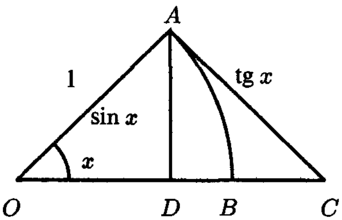


Рис. 1.17

(см. рис. 1.17, длина дуги $AB = x$ больше длины перпендикуляра $AD = \sin x$). Поэтому $g'(x)$ — возрастающая функция. Значит, $g'(x) > g'(0) = 0$. Аналогично заключаем, что $g(x) > g(0) = 0$.

Вернемся к доказательству неравенства $\pi < p$. Используя неравенства (1), имеем:

$$p = \frac{2n \cdot \sin\frac{\pi}{n} + n \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{3} >$$
$$> \frac{2n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}\right) + n\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi^3}{3n^3}\right)}{3} = \pi.$$

В статье [Вав] обосновывается еще более «тонкий» факт:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n - \pi}{\pi - p_n} = 2.$$

Из него следует, что число π, находясь при любом $n \geqslant 3$ в интервале (p_n, p), при всех достаточно больших значениях n ближе к правому концу этого интервала, чем к левому.

§ 7. «Крепкий орешек»: задача о квадратуре круга

В этом есть своя логика, свое пространство, какое-то странное чувство — квадратура Луны.

Например, закон крыш и звезд: он не распространяется ни на крыши, ни на звезды.

Владимир Казаков.
От головы до звезд

Предыстория задачи

Одну из первых научных школ в Древней Греции создал Пифагор (VI в. до н. э.). Задачам геометрических построений ученики Пифагора уделяли много внимания. С помощью циркуля и линейки они строили правильные фигуры, находили способы превращения одних прямолинейных фигур в другие. Естественным образом возникла задача превращения круга в квадрат.

По свидетельству видного древнегреческого историка Плутарха (ок. 46–ок. 127), некий Анаксагор из Клазомен (500–428 гг. до н. э.), сидя в тюрьме за безбожие, «начертал квадратуру круга». Вниманием образованных людей Греции задача о квадратуре круга завладела в V–IV вв. до н. э. К этому времени она приобретает четкую формулировку благодаря стараниям последователей другого известного древнегреческого философа Платона (428–347 гг. до н. э.): построить прямолинейную фигуру, площадь которой была бы равна площади данного круга (или, в родственной формулировке — построить отрезок прямой линии, длина которого совпадает с длиной данной окружности). Да не просто построить, а построить непременно лишь с помощью классических инструментов: циркуля и линейки без делений. Последователи Платона отвергали все геометрические построения с помощью каких-либо других механических приспособлений, «посредством которых благо геометрии устраняется и разрушается, ибо мы снова низводим ее к чувственному миру, вместо того, чтобы поднимать ее и насыщать невещественными мысленными образами так точно, как делает это Бог, по каковой причине Он и остается всегда Богом» (Платон).

Древнеиндийский рецепт

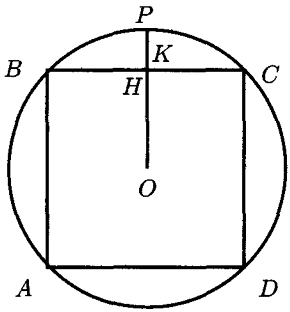


Рис. 1.18

В древнеиндийском сочинении «Шальвасутра» («Правила веревки») (VII–V вв. до н. э.) дается такой способ построения круга, равновеликого данному квадрату.

Опишем вокруг заданного квадрата $ABCD$ круг, и пусть радиус OP круга перпендикулярен стороне BC, этот радиус пересечет сторону BC в точке H (рис. 1.18). Отрезок HP делится на 3 равные части, $HK = \frac{1}{3}HP$. В сочинении без доказательства утверждается, что круг радиуса OK равновелик квадрату $ABCD$. Оцените значение π, исходя из этой гипотезы.

Луночки Гиппократа

Некоторую надежду для искателей квадратуры круга вселяли результаты Гиппократа Хиосского (V в. до н. э.). Он нашел квадратуру некоторых луночек — фигур, ограниченных дугами двух окружностей. Если в полуокружность вписать равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и на его катетах AB и BC построить две полуокружности (рис. 1.19), то мы получим две простейшие луночки, изученные Гиппократом. Пусть их площади равны σ, а площадь треугольника ABC равна S.

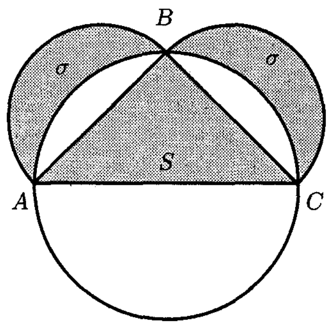


Рис. 1.19

Площадь полукруга, построенного на катетах, обозначим s. Поскольку площади кругов относятся как квадраты их диаметров, то площадь построенного на гипотенузе AC полукруга вдвое превышает площадь полукруга, построенного на катете AB или AC. Образованную на рис. 1.19 фигуру, с одной стороны, можно рассматривать как треугольник ABC, на катетах которого построены два полукруга, с другой стороны — как полукруг с насаженными на него двумя луночками. Из равенства площадей

$$S + 2s = 2s + 2\sigma \quad \text{выводим} \quad S = 2\sigma.$$

Таким образом, две луночки, ограниченные кривыми линиями, Гиппократу удалось превратить в равновеликий треугольник.

Иракский математик Ибн ал-Гайтам (X в.) обобщил результат Гиппократа на произвольный прямоугольный треугольник. Докажите теорему Ибн ал-Гайтама:

$$S = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где S — площадь произвольного прямоугольного треугольника, σ_1, σ_2 — площади соответствующих луночек, построенных на его катетах (рис. 1.20).

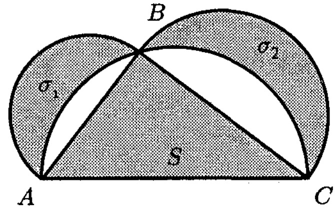


Рис. 1.20

Математический аккомпанемент

Теорему Ибн ал-Гайтама можно рассматривать как обобщение теоремы Пифагора на случай, когда на сторонах прямоугольного треугольника построены не квадраты, а какие-то другие подобные друг другу фигуры. Повторяя рассуждения Гиппократа для показанной на рис. 1.21 фигуры, имеем:

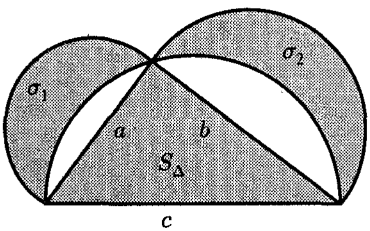


Рис. 1.21

$$S_\Delta + \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} + \sigma_1 + \sigma_2.$$

Благодаря тому, что $a^2 + b^2 = c^2$, отсюда получаем $S_\Delta = \sigma_1 + \sigma_2$.

Невольное разрушение канона

— А это кто?
— Он со мной, — ответила Лошадь.
— Со слоном нельзя, — сказал контролер.
— А с лошадьми можно? — спросил Слон.
— С лошадьми можно, — ответил контролер.
— Она со мной, — сказал Слон и прошел на ипподром.

Вадим Левин. Слон и лошадь

Очень быстро древнегреческие математики заметили, что задача квадратуры круга в ее классической постановке не поддается решению. Уязвленная математическая гордость не позволяла им смириться с научным вызовом, брошенным этой задачей, и они стали искать обходные пути. По выражению отечественного математика Елены Сергеевны Вентцель, они принялись решать сугубо практическую задачу, делая «то, что нужно, так, как можно» (в отличие от подхода «чистых» теоретиков делать «то, что можно, так, как нужно»).

Квадратриса Динострата

Древнегреческий математик Папп (III в.) в своем сочинении «Математическое собрание» писал: «Для осуществления квадратуры круга Динострат (IV в. до н. э.), Никомед и другие более поздние математики пользуются некоторой кривой, которая в силу этого называется квадратрисой». ([Арх], с. 539).

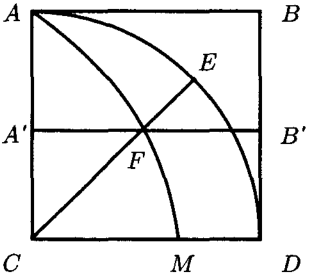


Рис. 1.22

Квадратриса получается как геометрическое место точек F пересечения двух равномерно движущихся отрезков: радиуса окружности CE, равномерно вращающегося вокруг точки C, и горизонтального отрезка $A'B'$, равномерно перемещающегося сверху вниз. В начальный момент радиус CE занимает положение CA стороны квадрата $CABD$, а отрезок $A'B'$ — положение стороны AB этого квадрата. В конце движения отрезки CE и $A'B'$ одновременно совмещаются с отрезком CD (рис. 1.22).

Пусть M — точка пересечения квадратрисы со стороной CD. Динострат указал на следующее замечательное свойство квадратрисы:

$$\frac{\overset{\smile}{AED}}{CD} = \frac{CD}{CM}. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что длина всей окружности равна

$$4 \cdot \overset{\smile}{AED} = 4 \cdot \frac{CD^2}{CM}.$$

Располагая отрезками CD и CM, с помощью циркуля и линейки уже несложно построить отрезок длины $4 \cdot \dfrac{CD^2}{CM}$, и, значит, может быть найден отрезок прямой, равный длине окружности.

Математический аккомпанемент

Введем обозначения, показанные на рис. 1.23. Здесь AFM — квадратриса, $CA = AB = BD = CD = R$; $\angle MCF = \varphi$; $FG \perp CD$; $FH \perp AC$. Зададим угловую скорость вращения радиуса CE 1 радиан в секунду, так что его перемещение от начального положения CA до конечного CD займет $\frac{\pi}{2}$ секунд.

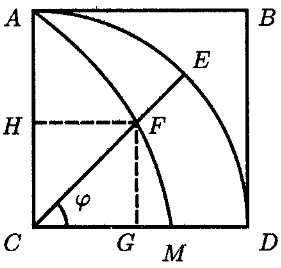


Рис. 1.23

При этом равномерное перемещение точки F квадратрисы по вертикали происходит со скоростью $\dfrac{2R}{\pi}$ единиц в секунду. В любой момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, имеем:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - t; \quad AH = \frac{2R}{\pi}t;$$

$$CH = R - \frac{2R}{\pi}t = \frac{2R}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{2R}{\pi}\varphi;$$

$$CF = \frac{CH}{\sin\varphi} = \frac{2R}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

Поскольку при стремлении φ к нулю отношение $\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$ стремится к единице, то $CM = \lim\limits_{\varphi\to 0} CF = \dfrac{2R}{\pi}$. Отсюда несложно выводится пропорция (1) в основном разделе книги.

Примечание. В приведенном доказательстве используется замечательный предел $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$. Для его обоснования рассмотрим острый угол AOB в круге радиуса R; AB — хорда, AC — касательная к кругу в точке A (рис. 1.24). Тогда, сравнивая между собой площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOC, получаем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{2}R^2\sin\varphi < \frac{1}{2}R^2\varphi < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\varphi.$$

Сократив на $\dfrac{1}{2}R^2$, отсюда получаем

$$\sin\varphi < \varphi < \operatorname{tg}\varphi,$$

или

$$1 < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Поскольку $\lim\limits_{\varphi\to 0}\cos\varphi = 1$, то отсюда следует $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$.

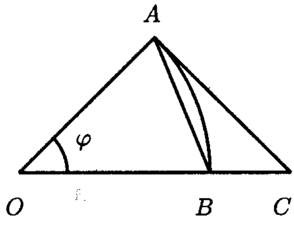


Рис. 1.24

Спираль Архимеда

Эта «механическая кривая», так же как и квадратриса Динострата, получается в результате наложения двух элементарных перемещений. Представим, что в плоскости вокруг заданной точки O равномерно вращается луч, а вдоль луча от точки O равномерно удаляется светлячок. Траектория этого светлячка высветит спираль Архимеда (рис. 1.25). Архимед решил довольно трудные задачи по вычислению площади фигуры, ограниченной первым витком спирали, и построению касательной к спирали в любой ее точке. Из результатов, полученных Архимедом, следовало, в частности, что если провести в точке A, завершающей первый виток спирали, касательную и в точке O восстановить перпендикуляр OB к отрезку OA, B — точка пересечения перпендикуляра и касательной), то длина отрезка OB будет равна длине окружности радиуса OA.

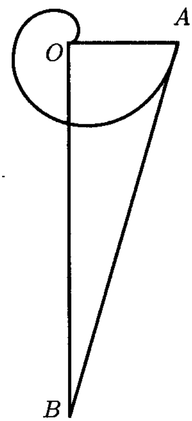


Рис. 1.25

Математический аккомпанемент

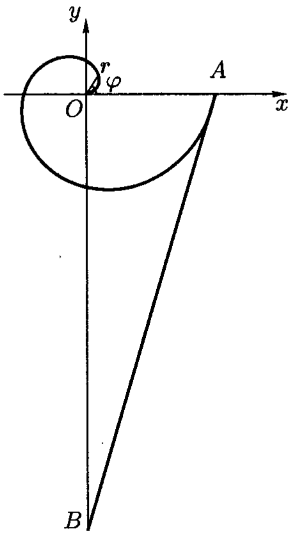


Рис. 1.26

Уравнение спирали Архимеда в полярной системе координат $r = k\varphi$, где r — расстояние от точки спирали до полюса, φ — полярный угол, k — параметр. Введем прямоугольную систему координат, показанную на рис. 1.26, и найдем уравнение касательной в точке A, завершающей первый виток спирали Архимеда.

Координаты точки A: $(2\pi k; 0)$;

Уравнение касательной: $y = a(x - 2\pi k)$,

где a — тангенс угла наклона к оси Ox касательной в точке A.

Определим сначала тангенс угла наклона в произвольной точке спирали с полярными координатами (r, φ). Для этого рассмотрим точку (r, φ) и близкую к ней точку $(r+dr, \varphi+d\varphi)$. Прямоугольные координаты этих точек равны соответственно $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ и $((r+dr)\cos(\varphi+d\varphi), (r+dr)\sin(\varphi+d\varphi))$. Тангенс угла наклона к оси Ox прямой, проходящей через эти две точки, равен

$$\frac{(r+dr)\sin(\varphi+d\varphi) - r\sin\varphi}{(r+dr)\cos(\varphi+d\varphi) - r\cos\varphi}.$$

В пределе, устремляя $d\varphi$ к нулю и учитывая, что $r = k\varphi$и $dr = kd\varphi$, найдем тангенс наклона к оси Ox касательной:

$$\lim_{d\varphi\to 0}\frac{(r+dr)\sin(\varphi+d\varphi) - r\sin\varphi}{(r+dr)\cos(\varphi+d\varphi) - r\cos\varphi} = \frac{\varphi\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

Применительно к рассматриваемому случаю $\varphi = 2\pi$, отсюда $a = 2\pi$.

Итак, уравнение касательной к спирали Архимеда в точке A имеет вид: $y = 2\pi(x - 2\pi k)$. Эта прямая пересекает ось Oy в точке B с координатами $(0, -4\pi^2 k)$. Величина $4\pi^2 k$ в точности совпадает с длиной окружности радиуса $OA = 2\pi k$.

Квадратурные страсти

На круглых дураков число π не распространяется.

Виктор Шендерович. Семечки

Интерес к задаче о квадратуре круга с ноной и удивительной силой вспыхнул в пробуждающейся от средневекового сна Западной Европе. Начиная с VIII века в европейских монастырях, а с XII века — в первых униерситетах, крупица за крупицей стали восстанавливаться знания, добытые в просвещенной Греции, а затем утраченные варварскими цивилизациями. Возрождение математики происходило трудно — в душной атмосфере костров инквизиции, в условиях идеологического засилья религиозного догматизма и схоластики. Многие математические факты приходилось переоткрывать заново. Нередко при этом случались заблуждения и ошибки.

Историческую панораму этого периода очень живо описала профессор Ясского университета (Румыния) Флорика Кымпан в книге «История числа π» [Кым]. На страницах этой книги перед читателем проходит галерея чудаковатых и порой самоуверенных искателей квадратуры круга, не привыкших считаться с мнением своих оппонентов. Многие из них (Иордан Саксонский (XIII в.), Джовани Кампано (XIII н.), Томас Бравардин (1290–1349), Альберт Саксонский (1326–1390)) бездоказательно полагали, что квадратура круга в ее классической постановке возможна. Число «квадратуристов» особенно умножиляе слух, будто император Карл V назначил круглую сумму рыцарю, который сумеет поразить коварный круг своим циркулем и линейкой. Шпага и меч были более привычными инструментами в те смутные времена, когда ученым мужем мог назваться каждый, умеющий за себя постоять и имеющий о себе должное мнение.

Французский математик Симон Дюшен, живший в Голландии под именем Симона Ван дер Эйка, высказал в 1584 году утверждение, будто бы круг равновелик квадрату, сторона которого составляет $\frac{39}{44}$ диаметра. Несколько раньше французский философ и священнослужитель Шарль де Бовель (1470–1533) учил, что диаметр круга равен $\frac{8}{10}$ диагонали равновеликого ему квадрата. Каббалистическая аргументация в пользу квадратуры круга, изложенная в 1644 году профессором Копенгагенского университета Христианом Северином Лонгомонтаном (1562–1647) в трактате «Круглое в плоском или Абсолютная мера круга» получила саркастический отзыв его современника: «... надо иметь криволинейный ум, чтобы допустить нелепости, содержащиеся в ложном трактате о кривых линиях» (цитируется по [Кым], с. 211).

К середине XVIII столетия повальное увлечение квадратурой круга приобрело характер «интеллектуальной эпидемии». На сцену вышли новые действующие лица — коммерсанты. В 1728 году фабрикант из Лиона господин Матюлон во всеуслышанье заявил, что держит пари на 3 000 франков с тем, кто сумеет найти ошибку в его геометрических построениях. Пари выиграл академик Франсуа Николь, впоследствии отказавшийся от приза в пользу Лионской больницы. К этому времени поток псевдорешений настолько захлестнул Парижскую академию наук, что она вынуждена была объявить о прекращении приема работ о квадратуре круга и роспуске рассматривавшей эти работы специальной комиссии.

Впоследствии выяснилось, что задача о квадратуре круга в своей классической постановке *неразрешима*. Этот чрезвычайно глубокий результат связан с алгебраической природой числа π, и его удалось доказать лишь коллективными усилиями многих выдающихся ученых, способствовавших развитию почти всех основных разделов высшей математики: аналитической геометрии, высшей алгебры, математического анализа, теории чисел. Последнюю точку в этом поистине грандиозном массированном наступлении на всех математических фронтах поставил немецкий математик Фердинанд Линдеман (1852–1939) в 1882 году. Но, прежде чем перелистнуть эту страничку из истории числа π, задержимся на некоторых из геометрических конструкций, придуманных изобретательными квадратуристами.

Конструкция Шарля де Бовеля, 1542 г.

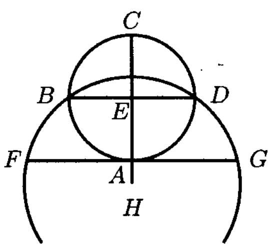


Рис. 1.27

В окружности с центром в точке E проведены два взаимно перпендикулярных диаметра BD и AC (рис. 1.27). Продлив радиус EA на четверть своей длины, получим точку H. Из H, как из центра, опишем дугу окружности радиуса HB. Пусть она в точках F и G пересекает касательную, проведенную к исходной окружности в точке A. Шарль де Бовель был уверен, что длина дуги AD в точности равна длине отрезка AG. Полагая длину дуги AD приблизительно равной длине отрезка AG, покажите, что число π отсюда может быть вычислено по приближенной формуле $\pi \approx \sqrt{10}$.

Конструкция Симона ван дер Эйке, 1584 г. Пусть GD — касательная к кругу с диаметром SD в точке D (рис. 1.28), $SC = DG$. Полагая длину отрезка SC приближенно равной четверти длины окружности, выведите отсюда, что

$$\pi \approx 2\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}.$$

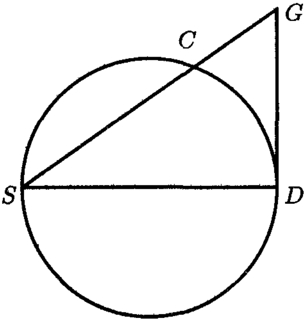


Рис. 1.28

Любопытно, что найденная Симоном Ван дер Эйке простая конструкция позволяет оценить число π с точностью, не уступающей архимедовой.

Способов построения с помощью классических инструментов квадрата, *почти* равновеликого данному кругу, сегодня известно огромное количество. Вот некоторые из них, отличающиеся простотой замысла и изяществом (рис. 1.29; 1.30).

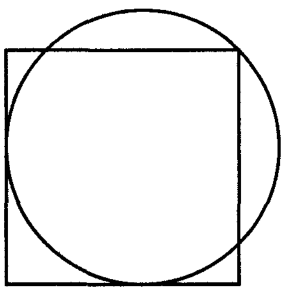


Рис. 1.29

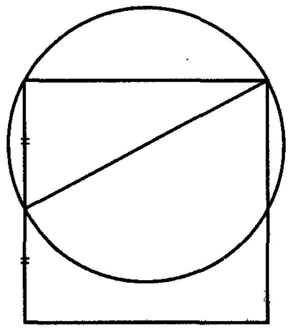


Рис. 1.30

Задачей спрямления дуги окружности (построения с помощью циркуля и линейки отрезка, равного длине дуги окружности) интересовался Христиан Гюйгенс, впрочем, отдавая себе отчет, что такое построение может быть выполнено лишь приближенно. Оцените приближение для числа π, которое следует из конструкции, предложенной Гюйгенсом.

Дана окружность с диаметром BC; точка D делит дугу BDC пополам; точки E, F делят дугу $BEFC$

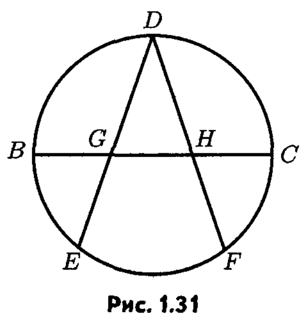


Рис. 1.31

на три равные дуги; G, H — точки пересечения диаметра BC соответственно с хордами DE и DF. Сумма длин отрезков $DG + GH$ (или $DH + GH$) приблизительно равна длине дуги BD.

Математический аккомпанемент

Приравняв сумму длин отрезков $DG + GH$, равную $2R\left(\dfrac{1+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$, длине четверти круга $\dfrac{\pi R}{2}$, получим $\pi \approx 3{,}142349\ldots$.

§ 8. Дальнейшее постижение числа π

Воображение должно опираться на действительность — также, как она опирается на воображение.

Владимир Казаков. Бауцен

Рационально ли число π?

Многие квадратуристы тщетно пытались найти рациональную дробь, в точности равную отношению длины окружности к ее диаметру. Эти попытки не прекращались даже после того, как стали известны результаты вычислений более тридцати точных десятичных знаков числа π Лудольфом. Немецкий математик Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) в статье «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга» в этой связи писал: «... если бы отношение диаметра к окружности выражалось точно посредством целых чисел, то эти числа необходимо должны были бы быть больше последних из указанных здесь: $\dfrac{324\,521\,540\,032\,945}{1\,019\,514\,486\,099\,146}$. Эти два числа дают число Лудольфа до 25-го десятичного знака. Даже если б они были вполне точны, то легко видеть, что было бы слишком длинно и затруднительно пользоваться ими при вычислениях» ([Руд], с. 185). Как характерный курьез, Ламберт отмечает позицию штеттинского профессора Бишофа, издавшего некую работу о квадратуре круга в 1765 году. Последний полагал, что лудольфово число не вполне точно определяет площадь круга, поскольку на самом деле справедливо значение $\pi = \dfrac{3\,844}{1\,225}$.

Существуют ли такие целые числа m и n, что $\pi = \frac{n}{m}$? Другими словами, рационально ли число π?

На этот вопрос ответил Ламберт, дав в 1766 году первое доказательство иррациональности числа π. Ламбертову доказательству недоставало для полной строгости одной леммы, которую позже доказал Адриан Мария Лежандр (1752–1833). Доказательства Ламберта и Лежандра основаны на свойствах так называемых *цепных*, или *непрерывных*, дробей.

Цепные дроби

Коль наверху, так наверху,
А коль внизу, так уж внизу!

Американская считалочка

Мы вкратце остановимся на основных результатах теории цепных дробей, имеющих к герою нашего повествования — числу π — непосредственное отношение.

Цепной, или непрерывной, дробью называется выражение вида

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}}$$

где $a_0, a_1, a_2 \ldots$; $b_0, b_1, b_2 \ldots$, — конечные или бесконечные последовательности действительных чисел. Если числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2 \ldots$, — натуральные, кроме, быть может, целого $a_0 \geqslant 0$, причем $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = 1$, то непрерывная дробь называется *канонической*. Разложение в каноническую непрерывную дробь числа π имеет вид:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

Его можно получить, применив однообразный процесс, состоящий из двух многократно повторяющихся и чередующихся друг с другом действий: «получение достатка» и «обращение остатка». Сначала представляем подлежащее разложению в цепную дробь число в виде суммы целой части (достатка) и дробной (остатка): $\pi = 3+0{,}14159265\ldots$ Если остаток отличен от нуля, как в данном случае, то его можно записать в виде дроби $0{,}14159265\ldots = \frac{1}{7{,}062515\ldots}$

(обращение остатка). Причем знаменатель этой дроби всегда больше единицы, и с ним можно поступить точно так же, как и в предыдущем случае: выделить достаток, обратить остаток и т. д. В итоге получаем «многоподвальную» дробь, количество подвалов которой может простираться сколь угодно глубоко.

Если оборвать каноническую цепную дробь на каком-то этапе ее формирования, то мы получим рациональную, так называемую *подходящую дробь*. Подходящие дроби представляют собой изумительно хорошее приближение к тому числу, для которого ищется представление в виде цепной дроби: оказывается, каждая такая *подходящая* дробь дает самое лучшее приближение, какого только возможно достигнуть, не увеличивая знаменателя приближенной дроби (см., например, [Хин]). Вот запись первых подходящих дробей числа π в виде десятичных дробей:

$$3;$$

$$3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}=3{,}14285\ldots \text{ (приближение, приписываемое Архимеду);}$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=\frac{333}{106}=3{,}141509\ldots;$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=\frac{355}{113}=3{,}14159292\ldots \text{ (приближение Цзу Чун-чжи).}$$

Последовательность подходящих дробей можно выписать и для любой не канонической цепной дроби. Если эта последовательность стремится к некоторому числу, то это предельное число естественно рассматривать в качестве значения цепной дроби.

§ 9. π — число иррациональное

Ученым задали вопрос: «Чему равно π*?».*
Инженер отвечает: «Это приблизительно $3\frac{1}{7}$*».*
Физик говорит: «Это 3,14159*».*
Математик (после небольшого раздумья): «Это равно π*».*

Анекдот

Цепные дроби обладают следующим замечательным свойством. Пусть α — число, которое нужно разложить в каноническую цепную дробь. Если α — рациональное число, то процесс разложения его в каноническую цепную дробь обрывается после конечного числа ступеней, если же α есть иррациональное число, то процесс продолжается бесконечно. Этот результат Адриан-Мария Лежандр обобщил на случай неканонических цепных дробей: если в простирающейся в бесконечность цепной дроби.

$$\alpha = \cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \ldots}}}$$

m, n, m', n', m'', n'' и т. д. — суть целые положительные или отрицательные числа, причем, дроби $\left|\frac{m}{n}\right|, \left|\frac{m'}{n'}\right|, \left|\frac{m''}{n''}\right|$ и т. д. все меньше единицы, то значение цепной дроби α есть иррациональное число. Этот результат справедлив и тогда, когда $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ и т. д. по модулю меньше единицы не самого начала, а только начиная с какого-нибудь звена ([Руд], с. 203–208).

Иоганну Генриху Ламберту удалось найти разложение, удовлетворяющее условиям теоремы Лежандра. В обозначениях Лежандра Ламберт получил

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ldots}}}}$$

откуда следует, что при целых m и $n, m \neq 0$ значение $\operatorname{tg}\frac{m}{n}$ иррационально. Если бы число π было рациональным, то существовали бы такие натуральные числа m и k, что $\pi = \frac{m}{k}$. Тогда число $\frac{\pi}{4}$ также было бы рациональным: $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$, где $n = 4k$, и величина

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{m}{n}$$

оказалась бы иррациональной. Однако это не так, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Противоречие.

В настоящее время известны и другие доказательства иррациональности числа π (см., например, [Бух], с. 69–72).

«Постоянно тренируясь и идя в этом направлении от простого к сложному, студентка МГУ Т. Слоненко, начав с запоминания десяти цифр в течение двух минут, добилась того, что может

воспроизвести в прямом и обратном порядке две тысячи (!) цифр в числе π после запятой».

Лялина Г. «Эйдетика творит чудеса»/«Книжное обозрение», № 29 от 22.07.97. С. 25.

§ 10. Эра математического анализа

Эге! И тут сидит собака, глаза что мельничные колеса.

Г. Х. Андерсен. Огниво

С конца семнадцатого столетия бурная река человеческой пытливости вышла из берегов элементарной математики — началась эра математического анализа. Бесконечные последовательности и ряды стали привычными объектами исследований математиков. Возникло дифференциальное и интегральное исчисление, базирующееся на строго определенном понятии предела. Новые инструменты исследований позволили взглянуть на число π с совершенно неожиданной стороны.

Лейбниц, Грегори и другие

— Какая следующая цифра в последовательности 78539816339744830961566084581987...?

— По-видимому, здесь какие-то случайные цифры.

— А какое следующее число в последовательности

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, -\frac{1}{15}, \ldots ?$$

— На этот вопрос ответить легко: $\frac{1}{17}$.

— А как вы отнесетесь к тому, что обе эти последовательности представляют одно и то же число $\frac{\pi}{4}$*?*

Jauch J.M., Are Quanta Real? Bloomington, Ind. Indiana University Press, 1973

Одним из первых неожиданных и красивых результатов стал ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots, \tag{1}$$

названный в честь открывшего его в 1673 году немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716) *рядом Лейбница*. Три точки, поставленные справа от знака «+» в формуле (1), следует понимать так. Чем больше слагаемых взять в правой части этого равенства, тем меньше их алгебраическая сумма будет отличаться от числа $\frac{\pi}{4}$. Это дает, по крайней мере, принципиальную возможность вычислять π со сколь угодно большой точностью.

Ряд Лейбница является частным случаем более общего ряда, открытого английским математиком Джеймсом Грегори (1638–1675) в 1670 году:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (\text{здесь } |x| \leqslant 1) \tag{2}$$

Грегори не заметил, что этот ряд имеет отношение к числу π. Ряд Лейбница (1) получается из ряда Грегори (2) при $x = 1$.

Коль скоро появился удобный инструмент, вычислители не преминули им воспользоваться. Ряд (1) не очень удобен для расчетов: чтобы получить π с двумя верными знаками после запятой, надо сложить 50 членов ряда, а для трех десятичных знаков понадобится более 300 действий. Если же в формуле (2) положить $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то получится ряд

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2\,673} + \ldots\right) \tag{3}$$

с гораздо более быстрой сходимостью (обратите внимание, как быстро здесь увеличиваются знаменатели). Именно этим разложением (3) воспользовался Авраам Шарп (1651–1742) для вычисления в 1699 году рекордного количества из 71 точного десятичного знака числа π.

Следующая «хитрость», которой воспользовались вычислители, состояла в подборе комбинаций арктангенсов, каждый из которых выражается рядом с более быстрой сходимостью, чем ряд Лейбница (1):

$$\operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad (\text{Джон Мэчин (1680–1751)});$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \quad (\text{Леонард Эйлер (1707–1783)});$$

$$\operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99} \quad (\text{Джеймс Стирлинг, Томас Симпсон, Уильям Резерфорд});$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \quad (\text{Л.К.Шульц}).$$

Проверить эти формулы можно, исходя из известных тригонометрических тождеств:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}; \qquad (\text{здесь } xy < 1);$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}; \qquad (\text{здесь } xy > -1);$$

$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}; \qquad (\text{здесь } |x| < 1).$$

Раскладывая каждый из арктангенсов $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ в ряд Грегори, получим

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \ldots\right).$$

Последнее разложение позволило Джону Мэчину вычислить 100 десятичных знаков числа π. Его результат был опубликован в 1706 году У. Джонсом в уже упоминавшейся работе «Обозрение достижений математики», где впервые зарегистрировано использование буквы π для обозначения отношения длины окружности к диаметру.

Используя ряд Лейбница (1), докажите формулу:

?

$$\pi = \frac{10}{3} - 24 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \ldots\right).$$

Дж. Белентайн, [Изб], с. 40.

Математический аккомпанемент

Представим n-ый член стоящего в круглых скобках ряда в виде суммы элементарных дробей. Для этого введем неизвестные коэффициенты a, b, c, d, e и запишем:

$$\frac{24}{(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n} + \frac{c}{2n+1} + \frac{d}{2n+2} + \frac{e}{2n+3}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в правой и левой части этого уравнения после приведения к одному знаменателю и упрощения выражений, получим систему уравнений относительно a, b, c, d, e:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0, \\ 6a+5b+4c+3d+2e=0, \\ 11a+5b+c-d-e=0, \\ 6a-5b-6c-3d-2e=0, \\ -b=4. \end{cases}$$

Ее решение: $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$, $d = -4$, $e = 1$. Представляя каждый член ряда в виде суммы элементарных дробей, получаем:

$$-\frac{24}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = -\frac{1}{1} + \frac{4}{2} - \frac{6}{3} + \frac{4}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{24}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} = \frac{1}{3} - \frac{4}{4} + \frac{6}{5} - \frac{4}{6} + \frac{1}{7}$$

$$-\frac{24}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} = -\frac{1}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{4}{8} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{24}{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11} = \frac{1}{7} - \frac{4}{8} + \frac{6}{9} - \frac{4}{10} + \frac{1}{11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Суммируя, находим:

$$-24\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} - \ldots\right) =$$

$$= 1 - \frac{5}{3} - 4 + \frac{4}{3} + 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

Привлекая формулу Лейбница $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, отсюда получаем требуемый результат.

Тайна азарта

Пи смеха! Пи подков и бега искры!

Велимир Хлебников. Зангези

Успехи Шенкса и Мэчина окрылили других вычислителей, и они с азартом присоединились к удивительному соревнованию, начатому математиками эпохи вписанных и описанных многоугольников.

Де Ланьи (1660–1734), используя метод Шарпа, в 1719 году вычисляет 127 точных десятичных знаков числа π. Вскоре Леонард Эйлер другим способом проверил результат Ланьи и обнаружил ошибку в 113 знаке. В 1794 году Вега указал значение π с точностью до 140 десятичных знаков, из которых точными оказались 136. В 1841 году Уильям Резерфорд сообщает 208 десятичных знаков. Его результат перепроверил талантливый гамбургский вычислитель Захария Дазе. Дазе показал, что Резерфорд ошибся, начиная со 153 знака. В 1844 году Дазе довел точность до 205 знаков, из которых 200 были вычислены верно. В 1847 году Томас

Клаузен продвинулся до 250 знаков, из которых 248 были точны. В 1853 году Резерфорд увеличил свое достижение до 440 десятичных знаков. Рекорд этого года устанавливает Уильям Шенкс — 530 знаков (из них 527 верных). В последующем Шенкс упорно работает над вычислениями новых знаков, доведя их количество до 707, но ошибка в 528 знаке свела не нет все его дальнейшие усилия.

В этом состязании принимали участие отнюдь не рядовые «спортсмены». Заслуженной славой выдающегося вычислителя пользовался Леонард Эйлер. Когда в 1735 году Российская Академия получила от правительства срочный заказ на выполнение трудоемких расчетов, для их выполнения сотрудники академии запросили несколько месяцев. Эйлер же вызвался выполнить это поручение всего за три дня. Ко всеобщему удивлению, Эйлер действительно справился с заданием в указанный им срок. Расчеты Ланьи, требующие от обычного вычислителя месяца непрерывной работы, Эйлер проверил за 80 часов.

Феноменальным вычислителем слыл и Иоганн Мартин Захария Дазе (1824–1861). Умножение двух восьмизначных чисел он выполнял в уме в течение одной минуты. В уме же, но за более длительное время, он мог извлекать квадратные корни из 100 значных чисел ([Бол], с. 396–398).

§ 11. Невозможность квадратуры круга

Среди людей привычного мне круга
(А у меня культурные друзья)
Есть мнение, что квадратуру круга,
Как ты не бейся, доказать нельзя.

Евгений *Сазонов*

Тесный мир циркуля и линейки

Сомнения о возможности квадратуры круга с помощью циркуля и линейки, в свое время одолевавшие математиков Древней Греции, еще более усилились по мере углубления математических изысканий учеными эпохи Возрождения и более позднего периода. Мнение о невозможности квадратуры круга высказывали Леонардо да Винчи (1452–1519), И. К. Штурм (1635–1703), Х. Гюйгенс, (1629–1695), Д. Грегори (1638–1675), И. Ньютон (1643–1727) и другие. Немецкий математик Михель Штифель (1487–1567) в «Общей арифметике» (1545) утверждал, что «квадратура круга превосходит разум вычислителя из смертных людей». На то, что число π не выражается «обыкновенными иррациональностями», а должно быть отнесено к «гораздо более высокому роду иррациональностей», указывал Леонард Эйлер ([Юш2], с. 187).

Математики более пристально стали присматриваться к геометрическим объектам, порождаемым классическими инструментами, и постепенно пришли к выводу, что мир циркуля и линейки не столь уж богат и разнообразен, как представлялось последователям Платона.

Пусть круг задан своим радиусом, который для простоты можно принять за единицу. Какие отрезки возможно построить циркулем и линейкой, отправляясь от этого отрезка единичной длины?

Из школьного курса геометрии мы знаем, как произвольный отрезок удлинить или уменьшить в целое число раз, а из трех отрезков длины 1, a, b построить отрезок длины $\frac{a}{b}$. Кроме того, мы знаем, как сооружать отрезки, длина которых выражается с помощью квадратных радикалов из длин других, ранее построенных отрезков (рис. 1.32).

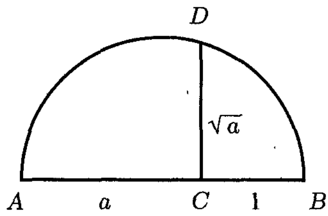


Рис. 1.32

Комбинируя эти возможности, можно строить отрезки, длина которых представляется довольно замысловатой конструкцией дробей и радикалов, например,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{7}-1}}{2002}, \quad \sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+\sqrt{5}} \quad \text{и т. д.}$$

Однако при всем своем впечатляющем разнообразии такие конструкции подвержены одному существенному ограничению — в них могут участвовать одни лишь *квадратные* радикалы. Отрезкам длины $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ и т. п. в мире циркуля и линейки места нет.

А как же быть с отрезком длины π? Если бы с помощью циркуля и линейки удалось построить такой отрезок, то можно было бы построить и отрезок длины $\sqrt{\pi}$, и, значит, — сторону квадрата, равновеликого кругу с радиусом 1. Задача квадратуры круга была бы решена!

Увы, отрезку длины π в мире циркуля и линейки также не суждено оказаться. Однако обосновать этот факт оказалось не так уж просто.

Здесь мы вынуждены на время оставить владения элементарной математики и осторожно переступить пределы математики, условно называемой высшей.

Математический аккомпанемент

Отнесем к множеству *конструктивных* чисел те вещественные числа, которые получаются из рациональных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления (разумеется, в случае отличного от нуля делителя) и извлечения квадратного корня из неотрицательных чисел.

Поскольку всякий отрезок задается двумя точками — его концами, прямая задается двумя точками на ней, а окружность — своим центром и произвольной точкой на ней, то процесс геометрического строительства с помощью циркуля и линейки представим себе как процесс последовательного наращивания некоторой совокупности специально построенных *точек*. В процессе построений к исходному набору точек добавляются другие точки, к полученным точкам — новые точки, и так далее, пока не получится набор, содержащий искомые точки (концы искомых отрезков).

Теперь перекинем мостик из геометрии в алгебру: соорудим на плоскости систему декартовых прямоугольных координат, выбрав ее начало в одном из концов заданного отрезка единичной длины и направив ось Ox вдоль этого отрезка. Таким образом, одна из заданных по условию точек будет иметь координаты (0,0), а другая — (1,0). Произвольная точка плоскости характеризуется двумя координатами (x, y).

Заметим, что координаты точек, задающих концы исходного единичного отрезка, — числа конструктивные.

Рассмотрим следующие элементарные операции:

а) новая прямая строится с помощью линейки, приложенной к двум построенным ранее точкам;

б) новая окружность строится с помощью циркуля, одна ножка которого помещается в построенную ранее точку, а длина раствора (радиус) равна расстоянию между двумя построенными ранее точками;

в) новая точка строится как пересечение двух построенных прямых;

г) новая точка строится как пересечение построенных прямой и окружности;

д) новая точка строится как пересечение двух построенных окружностей.

Покажем, что перечисленные в пунктах а)–д) элементарные операции, примененные к исходному набору точек, координаты которых выражаются конструктивными числами, могут породить *только* такой набор новых точек, координаты которых также выражаются конструктивными числами. Доказательство основано на аккуратном вычислении координат новых точек. Разберем, например, наиболее сложный для анализа случай д). Координаты (x, y) точек пересечения двух окружностей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2, \end{cases}$$

коэффициенты которой — конструктивные числа. Вычитая второе уравнение системы уравнений из первого, приходим к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = r_1^2 - r_2^2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2. \end{cases}$$

Выразив затем из первого уравнения полученной системы переменную y через переменную x и подставив это выражение во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно переменной x. Его решение и, следовательно, значение y — конструктивные числа.

Хорошо, а как же быть с еще одной довольно «хитрой» элементарной операцией, допустимой при геометрических построениях с помощью циркуля и линейки? Имя этой операции — выбор *произвольной* точки.

Если какое-то построение возможно осуществить, выбирая произвольные точки, то его можно также осуществить, выбирая произвольные точки с рациональными (и, следовательно, с конструктивными) координатами.

Если нужно выбрать произвольную точку на построенной прямой l или окружности s, выберем две произвольные точки P и Q с рациональными координатами на плоскости и найдем точку пересечения прямой PQ с прямой l или окружностью s. По доказанному ранее, эта точка будет иметь конструктивные координаты, являясь, тем не менее, произвольной.

Таким образом, в процессе наших построений будут получаться точки, имеющие исключительно конструктивные координаты.

Мир алгебраических чисел

Любое число, выражающееся в квадратных радикалах, есть корень некоторого многочлена с целыми коэффициентами. (Доступное доказательство этого факта можно найти в книге [Пра], с. 166–177). Покажем, например, как построить многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}$.

Начнем с того, что представим число $\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}$ как корень уравнения

$$x - \sqrt{2} - \sqrt[4]{3} = 0.$$

Сначала избавимся от радикала $\sqrt[4]{3}$, для этого изолируем его в правой части:

$$x - \sqrt{2} = \sqrt[4]{3}.$$

Возведем обе части этого равенства в четвертую степень:

$$x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 12x^2 - 8x\sqrt{2} + 4 = 3.$$

Теперь осталось привести подобные члены и изолировать в правой части слагаемые с общим множителем $\sqrt{2}$:

$$x^4 + 12x^2 + 1 = \sqrt{2}\left(4x^3 + 8x\right).$$

Еще раз возводим обе части этого равенства в квадрат и группируем слагаемые. Окончательно получаем ответ:

$$x^8 - 8x^6 + 18x^4 - 104x^2 + 1 = 0.$$

Способ «изоляции» в правой части равенства радикала, подлежащего «уничтожению», имеет общий характер. Если различных радикалов много — с ними расправляются поодиночке. В случае, если радикалы встречаются в знаменателе дроби, предварительно избавляются от иррациональности в знаменателе.

Числа, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами, принято называть *алгебраическими*. Все другие числа Леонард Эйлер в 1775 году предложил называть *трансцендентными* (от латинского transcendens (transcendentis) — выходящий за пределы).

Таким образом, мир циркуля и линейки выступает частью более обширного мира алгебраических чисел: если отрезок построен с помощью циркуля и линейки исходя из заданного единичного отрезка, то его длина выражается в квадратных радикалах и, следовательно, заведомо является алгебраическим числом.

Число *e*

I-й игрок: Как трудно придумать какое-нибудь новое число!
II-й игрок: Ну что вы, новые числа следуют сразу же вслед за старыми!

Владимир Казаков. Жизнь прозы

Дальнейшее постижение числа π стало возможным благодаря его неожиданному «союзнику» — числу e. Это число выражает собой предел, к которому сколь угодно близко приближаются члены последовательности

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

при неограниченном возрастании натурального n. Это число в 1736 г. ввел и предложил обозначать буквой e Леонард Эйлер.

Так же, как и число π, число e иррационально, оно выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. С помощью вычислительных машин сегодня найдено более миллиона цифр числа e. Вот первые знаки его десятичной дроби: e=2,718281828459045...(удобное правило для запоминания: 2 и 7, а далее — дважды год рождения Льва Николаевича Толстого 1828).

Число e замечательно во многих отношениях. Для него существуют красивые разложения, указанные Эйлером в виде ряда:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \quad (\text{здесь } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n),$$

в виде цепной дроби:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}$$

Функция e^x единственная среди всех «школьных» функций (за исключением, конечно, функции, тождественно равной нулю — но стоит ли ее принимать в расчет?), которая имеет производную, совпадающую с ней самой.

Эйлеру принадлежит изумительная по красоте формула, собирающая в один «букет» примечательные математические константы 1, π, e и $i = \sqrt{-1}$:

2

$$e^{i\pi} = -1 \tag{1}$$

Встретившееся в этой формуле число i (*мнимая единица*) — главный персонаж теории *комплексных чисел*. Оно обладает тем замечательным свойством, что $i^2 = -1$, и, следовательно, является алгебраическим числом — корнем многочлена $x^2 + 1 = 0$.

Тождество Эйлера (1) было опубликовано им в 1748 году. Ныне оно высечено над дверью математического отделения парижского Дворца Открытий.

Математический аккомпанемент

1 Существование предела $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ доказывается в стандартном курсе математического анализа (см., например, [Фих], т. 1, с. 78–82).

Приведем изящное доказательство иррациональности числа e, данное Жаном Батистом Жозефом Фурье (1768–1830) в 1815 году.

Допустим, что число

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

равно некоторой рациональной дроби $\frac{p}{q}$. Перенесем в левую часть равенства все члены ряда до $\frac{1}{q!}$ включительно и умножим равенство на $q!$. Тогда в левой части получается не равное нулю целое положительное число, в правой же части — ряд

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots,$$

который имеет значение, меньшее, чем

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots=\frac{1}{q},$$

следовательно, не может равняться целому положительному числу.

Для расчета точных знаков числа e удобно пользоваться рядом

$$e=3-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+2)!}=\frac{87}{32}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)(n+5)!},$$

частичные суммы которого сходятся к e намного быстрее частичных сумм ряда

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad \text{[Cop].}$$

2 Тождество Эйлера $e^{i\pi}=-1$ представляет собой частный случай более общей формулы Эйлера

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \text{при} \quad x=\pi.$$

По аналогии с рядом Тейлора для функции e^x вещественного переменного x Эйлер рассматривает ряд для функции e^z комплексного переменного z:

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots.$$

Подставляя сюда вместо z значение ix, где x — вещественное число, и учитывая, что последовательными степенями i являются числа i, -1, i, 1, получаем:

$$e^x=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right).$$

Выражения, стоящие в круглых скобках — это ряды Тейлора для функций $\cos x$ и $\sin x$.

Еще задолго до становления теории функций комплексиого переменного, созданной в XIX столетии в первую очередь благодаря работам О. Коши (1789–1857), Г. Римана (1826–1866), К. Вейерштрасса (1815–1897), Эйлер вводит новые математические объекты и с легкостью производит над ними формальные преобразования, законность которых со всей надлежащей строгостью была обоснована лишь в дальнейшем.

π — число трансцендентное

Лицо π было скрыто маской. Все понимали, что сорвать ее, оставшись при этом в живых, не сможет никто. Сквозь прорези маски пронзительно, безжалостно, холодно и загадочно смотрели глаза.

Бертран Рассел (1872–1970).
Цитируется по [Гар]

Мне страшно! Пи-пи-пи! — запищал Мышонок и юркнул под крыльцо.

В. Сутеев. Кто сказал мяу?

«Не побоюсь, ей-богу не побоюсь!» — сказал он и, очертивши по-прежнему около себя круг, начал припоминать все свои заклинания.

Н. В. Гоголь. Вий

В 1873 году, основываясь на свойствах определенных интегралов, французский математик Шарль Эрмит (1822–1943) доказал трансцендентность числа e. Усилив метод Эрмита, немецкий математик Фердинанд Линдеман (1852–1939) в 1882 году доказал теорему:

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — не равные нулю алгебраические числа, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные алгебраические числа. Тогда равенство $a_0e^{\lambda_0} + a_1e^{\lambda_1} + a_2e^{\lambda_2} + \ldots + a_ne^{\lambda_n} = 0$ невозможно.

С доказательством частного случая теоремы Линдемана, которое, вместе с тем, заключает в себе и доказательство трансцендентности числа π, можно познакомиться по книге [Кле].

Из теоремы Линдемана следует, что равенство $1 + e^{\lambda} = 0$ невозможно, если λ — алгебраическое число. Но в таком случае невозможно и равенство $1 + e^{i\pi} = 0$, если $i\pi$ — алгебраическое число. Произведение алгебраических чисел всегда является алгебраическим числом (этот факт доказывается в курсах высшей алгебры — см., например, [Кур], с. 350–364). Если бы число π было алгебраическим, то и его произведение на алгебраическое число i также было бы алгебраическим, но тогда результат теоремы Линдемана противоречил бы тождеству Эйлера $e^{i\pi} = -1$.

Следовательно, число π трансцендентно, и, как следствие, получаем: задача квадратуры круга в ее классической постановке неразрешима.

В память об открытии свойства трансцендентности числа π бюст Фердинанда Линдемана установлен в зале Мюнхенского университета. Под его именем начертан круг, пересеченный квадратом равной площади, внутри которого изображена буква π.

§ 12. Новая эра: на арену соревнований выходят компьютеры

Планка рекордов взмывает ввысь

Про что ты хочешь? Про длинное π? Так я тебе такое π подарю, что с ним ты можешь делать все, что хочешь.

Сергей Бобров. Волшебный двурог

Впечатляющие результаты Уильяма Шенкса возглавляли таблицу рекордов вплоть до середины XX века. Вычисленные Шенксом 707 десятичных знаков числа π стали красоваться на страницах научно-популярных изданий. Архитекторам понравилось украшать ими свои сооружения. Именно эти 707 цифр были размещены в виде гипсового фриза под потолком «цифирной палаты» в Доме занимательной науки на Фонтанке (Ленинград), организованном по инициативе Якова Исидоровича Перельмана в 1934 году. Этими же 707 цифрами Уильям Голени в 1937 году украсил купол циклической галереи парижского Дворца Открытий.

Двадцатый век вошел в историю человеческой цивилизации не только своими разрушительными войнами. Он ознаменовался значительными достижениями человеческого духа, в частности, компьютерной революцией. Уже первые проверки на появившихся в 1945 году электронно-вычислительных машинах показали, что Уильям Шенкс в своих расчетах ошибся, начиная с 528 знака, так что весь последующий «хвост» из 180 знаков оказался неверным. Это дало повод канадскому математику Г. Коксетеру (1907–2003) с горечью констатировать: Нельзя без грусти думать о том, что вычисления, на которые бедный Шенкс потратил значительную часть своей жизни, современная ЭВМ может воспроизвести (без его роковой ошибки) всего за несколько секунд просто для «разминки» ([Бол], с. 379).

С появлением компьютеров темпы погони за точными десятичными знаками числа π резко ускорились.

В июне 1949 года Джон фон Нейман (1903–1957) и его сотрудники вычислили 2037 знаков на одной из первых вычислительных машин ENIAC. Рубеж в 10 000 знаков был достигнут в 1958 году Ф. Женюи с помощью компьютера IBM 704. Сто тысяч знаков π вычислили в 1961 году Дэниэл Шенкс (однофамилец Уильяма Шенкса) и Джон Ренч с помощью компьютера IBM 7090. В 1973 году Жан Гийу и М. Буйе преодолели отметку в 1 000 000 знаков, что заняло меньше одного дня работы компьютера CDC-7600.

Казалось бы, эра компьютеров окончательно и безвозвратно устранила человека с арены соревнований. Лавры победителей-рекордсменов стали делить между собой роботы. У кого тактовая частота процессора больше, тот и победил.

Но не тут-то было! Оказалось, рано списывать виновника всей этой кутерьмы с вычислениями числа π. Он стал придумывать не просто схемы умножения многозначных чисел, а схемы *сверх быстрого* умножения, не просто алгоритмы вычисления числа π, а *сверх эффективные* алгоритмы...

Схемы сверх быстрого умножения

Способ умножения «в столбик», которым мы обычно пользуемся, с «точки зрения» современного компьютера довольно расточителен. Чтобы перемножить таким способом два натуральных n-разрядных числа, нужно произвести n^2 попарных умножений цифр и еще некоторое количество сложений. Объем этой вычислительной работы можно существенно уменьшить, если рационально распорядиться промежуточными вычислениями.

На одно из «рационализаторских» усовершенствований подобного рода обратил внимание отечественный математик Анатолий Алексеевич Карацуба в 1962 году (см., например, статью [БТ]). Предположим, каждый из сомножителей x и y имеет $2n$ цифр. Разобьем их на 2 блока по n цифр:

$$x = 10^n x_1 + x_0; \qquad y = 10^n y_1 + y_0,$$

здесь x_1, x_0, y_1, y_0 — n-значные числа. Воспользовавшись тождеством

$$(x_1 - x_0)(y_0 - y_1) = -x_1y_1 - x_0y_0 + x_1y_0 + x_0y_1,$$

произведение xy можно записать так:

$$xy = \left(10^n x_1 + x_0\right)\left(10^n y_1 + y_0\right) = \left(10^{2n} + 10^n\right)x_1y_1 + \\ + 10^n\left(x_1 - x_0\right)\left(y_0 - y_1\right) + \left(10^n + 1\right)x_0y_0.$$

Таким образом, задача умножения $2n$−разрядных чисел свелась к трем операциям для n — разрядных чисел x_1y_1, $(x_1 - x_0)(y_0 - y_1)$, x_0y_0 и еще к операциям сложения и сдвига. Вместо $4n^2$ операций поразрядного умножения обычным способом здесь требуется всего $3n^2$ операций. Выигрыш, казалось бы, небольшой, но ведь и возникшие здесь n — значные числа также можно перемножать подобным образом, их составные части — тоже, и так далее. По мере увеличения n экономия вычислений может оказаться существенной.

Современные алгоритмы «сверхбыстрого» умножения используют еще более изощренную технику вычислений. Например, алгоритм Шенхаге—Штрассена (1971) умножения целых чисел использует интерполяцию полиномов и так называемое «быстрое преобразование Фурье» (см., например, [Ахо], с. 304–310). Объем вычислений по этому алгоритму двух целых n — разрядных чисел по сравнению с методом умножения «в столбик» уменьшается в $\dfrac{n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$ раз. Например, поиск произведения двух 2^{16}–разрядных сомножителей по этому алгоритму ускоряется более чем в тысячу раз (2^{10}) по сравнению с обычным способом умножения.

Довольно существенная экономия для электронных добытчиков точных знаков числа π!

Сверхэффективный алгоритм Джонатана и Питера Борвейнов

π идут, 2π идут, 3π идут. Стали уже попадаться изоклины.

Как три вектора один детерминант в нуль обратили [Физ]

Канадские математики Джонатан и Питер Борвейны в 1987 году нашли удивительный ряд:

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n(6n)![212\,175\,710\,912\sqrt{61} + 1\,657\,145\,277\,365 +}{(n!)^3(3n)!\left[5\,280\left(236\,674 + 30303\sqrt{61}\right)\right]^{3n+\frac{3}{2}}}\right.$$
$$\left.\frac{+n(13\,773\,980\,892\,672\sqrt{61}) + 107\,578\,229\,802\,750]}{(n!)^3(3n)!\left[5\,280\left(236\,674 + 30\,303\sqrt{61}\right)\right]^{3n+\frac{3}{2}}}\right\}$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$; $0! = 1$.

Последовательность стоящих под знаком суммы слагаемых при $n = 0, 1, 2,\ldots$добавляет около 25 точных цифр числа π с каждым новым членом. Первый член (соответствующий $n = 0$) дает число, совпадающее с π в 24 десятичных знаках [Бор].

Джонатан и Питер Борвейны предложили также алгоритм расчета десятичных знаков числа π, имеющий фантастическую эффективность: каждый новый шаг выполнения этого алгоритма уточняет количество верных цифр в разложении числа π более, чем вчетверо! [Бор]. Вот этот удивительный алгоритм:

Вначале положим $y_0 = \sqrt{2} - 1$, $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$, а затем каждое новое значение y_{n+1} будем находить, отправляясь от предыдущего значения по формуле:

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Похожим образом будем находить члены последовательности a_0, a_1, $a_2, \ldots$, вычисляя их по формуле:

$$a_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Оказывается, по мере увеличения номера шага n величина $\frac{1}{a_n}$ очень быстро приближается к π. Так, уже при $n = 4$ количество верных знаков равно 694.

Авторы этого поразительного алгоритма утверждают, что у истоков их открытия лежали идеи гениального индийского математика Сринивазы Рамануджана (1887–1920). (Дальнейшее обсуждение темы см. в § 33.)

Гений Рамануджана

Сриниваза Рамануджан родился в небогатой семье бухгалтера в местечке Эрод на юге Индии. В юношестве, самостоятельно изучая математику, Рамануджан настолько увлекся собственными изысканиями, что дважды провалился на экзаменах в Мадрасском колледже. В поисках заработка он устроился бухгалтером в Трест мадрасского порта. Неизвестно, как сложилась бы дальнейшая судьба Рамануджана, если бы друзья не уговорили его сообщить свои результаты трем видным английским математикам. Двое из них не сочли нужным отвечать на математические фантазии далекого индийского дилетанта. Первоначальное недоверчиво-скептическое отношение у третьего математика, Готфри Харольда Харди (1877–1947), сменилось восхищенным потрясением, когда он вместе со своим коллегой Джоном Идензором Литлвудом (1885–1977) попытался проверить несколько из 120 формул, приложенных Рамануджаном к своему письму.

Двое выдающихся специалистов в математическом анализе и теории чисел обнаружили целую россыпь неизвестных им красивых и глубоких формул. По словам Харди, этот эпизод и то, что за ним последовало, было единственным романтическим событием в его жизни. Харди пригласил Рамануждана в Кембридж. И когда тот спустя год появился на берегах Туманного Альбиона, открылась новая яркая страница в творчестве двух прекрасных математиков.

По свидетельству школьных товарищей, Рамануджан знал огромное число знаков в разложениях e, π и других чисел в десятичные дроби. Играючись, он строил приближения

$$\frac{19}{16}\sqrt{7}, \quad \left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{63}{25}\cdot\left(\frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}\right)$$

числа π с точностью до $3, 8, 9$ знаков после запятой. С огромными числами он обращался без помощи какой бы то ни было вычислительной техники. Удивления достойны, например, вереницы цифр, вышедшие из-под его легкой руки:

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743{,}99999999999992\ldots.$$

К числам у Рамануджана отношение было по особенному трепетное. Однажды, навещая Рамануджана в больнице, Харди сообщил ему, что приехал на такси со «скучным» номером 1729. Рамануджан разволновался и ответил: «Харди, ну как же, Харди, это же число — наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы кубов двумя различными способами!». Впоследствии в своих мемуарах Харди с ностальгической теплотой отмечает, что «каждое натуральное число было личным другом Рамануджана».

Рамануджан шел непроторенными путями, прокладывал свои, оригинальные маршруты. По словам профессора С. Г. Гиндикина [Гин], его формулы нельзя спутать с формулами других математиков:

$$1-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\cdot\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi};$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\cdot e^{\frac{2\pi}{5}};$$

$$1+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{e\pi}{2}}$$

Примечательно, что в последней формуле ни бесконечный ряд, ни цепная дробь в отдельности не выражаются через числа e и π, а в сумме они дают поразительную комбинацию!

Удивительно прозрение Рамануджана в оценке числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. Для небольших n число $p(n)$ найти несложно, например, $p(4) = 5$, так как

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

При больших n, согласно тереме Харди-Рамануджана, величину $p(n)$ можно оценить по приближенной формуле:

$$p(n)\approx \begin{matrix}\text{целая}\\ \text{часть}\end{matrix}\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)}-\frac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot e^{\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}\right].$$

Эта приближенная формула имеет поразительную точность, например, при $n = 200$ она дает точный ответ $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$. Вот как этот факт прокомментировал профессор С. Г. Гиндикин [Гин]:

«Наиболее загадочна в формуле для $p(n)$ маленькая „поправочка“ $\left(-\frac{1}{24}\right)$, придуманная Рамануджаном. Никто —ни Харди, ни даже сам Рамануджан —не сумел объяснить, откуда она взялась».

Один из результатов Рамануджана в теории так называемых *модулярных функций* сегодня используется в рекордно быстрых алгоритмах вычисления десятичных знаков числа π.

Так, функция

$$y(x) = 16x\cdot\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^8\cdot\left(\frac{1+x^4}{1+x^3}\right)^8\cdot\left(\frac{1+x^6}{1+x^5}\right)^8\cdot\ldots$$

обладает тем замечательным свойством, что выражение — $-\frac{2}{\sqrt{p}}\ln\frac{k_p}{4}$, где $k_p = \sqrt{y\left(e^{-\pi\sqrt{p}}\right)}$, имеет много первых десятичных знаков, общих с π, причем, их число тем больше, чем больше значение p. Рамануджан поражал своей способностью «угадывать» значения k_p. Ему удавалось сооружать совершенно фантастические конструкции вида:

$$k_{210} = (\sqrt{2}-1)^2(2-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2(8-3\sqrt{7})(\sqrt{10}-3)^2 \times \\ \times (\sqrt{15}-\sqrt{14})(4-\sqrt{15})^2(6-\sqrt{35}).$$

Виртуозно используя свойства модулярных функций, Рамануджан построил много замечательных рядов для числа π, например,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9\,801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

По словам Д. И. Литлвуда, открытия Рамануджана могли быть получены лишь в результате исключительно блестящих прозрений гения. Более подробные обсуждения результатов Рамануджана см. в книгах [Хар], [Энд].

Продолжение марафона

Людовик XV: Шуазель, назовите порядковый номер мгновения.
Шуазель: Сир, это невозможно из-за погоды.
Людовик XV: Как?!
Шуазель: Число во всю длину ветра.

Владимир Казаков. Король-правнук

Удивительный «марафон», начатый с вычисления Архимедом трех точных знаков числа π, сегодня так же далек от завершения, как и две тысячи лет назад.

По алгоритму Джонатана и Питера Борвейнов в январе 1986 года Дэвид Х. Бейли получил 29 360 000 десятичных знаков π на суперкомпьютере Cray-2, а в 1987 году Я. Канада и его сотрудники — 134 217 000 знаков на суперкомпьютере NEC SX–2. Результат наших земляков Дэвида и Грегори Чудновски из Колумбийского университета в городе Нью-Йорке (США), вычисливших в 1989 году 1 011 196,691 знак числа π, попал даже в Книгу рекордов Гиннеса. Для своих расчетов они использовали суперкомпьютер Cray-2 и сеть компьютеров IBM–3090. К октябрю 1995 года сотрудниками Токийского университета Ясумасой Канадой и Дайсуке Такахаши было вычислено свыше 6 миллиардов цифр. Они же в 1999 году на компьютере HITACHI SR 8000 вычислили 206 158 430 000 цифр числа π (см., например, [PiR]).

Когда эта книга готовилась к изданию (2003 г.), на сайте «Клуба друзей Пи» www.astro.univie.ac.at/wasi/PI/ появилось сообщение о неофициально установленном рекорде вычисления цифр числа Пи Ясумасой Канадой — 1 242 100 000 000 знаков.

Планета — компьютер

Прошлое — всегда с нами, стоит только позвать,
а будущее все отдаляется и отдаляется.

Владимир Казаков. Жизнь прозы

В конце прошлого столетия посетители сайта www.cecm.sfu.ca/projects/pihex встречали объявление, приглашающее их принять участие в глобальном проекте "Pi-Hex". Любой житель Земли, подключив свой компьютер к сети Internet, мог стать участником коллективных вычислений отдельных цифр двоичной записи числа π. Координатором этого глобального проекта выступил студент университета Симона Фрезера (США) Колин Персивал. В проекте приняло участие около 2 000 добровольцев. Вычисления на каждом отдельном компьютере в глобальной сети проводились в так называемом «фоновом» режиме, когда участвующий в совместных работах компьютер не занимался решением каких-то своих собственных задач. В основу расчетного алгоритма были положены формулы Фебрайса Биллерда.

Объединенная общим проектом команда нашей планеты в 1998 и 1999 годах вычислила цифры, стоящие на 5 000 000 000 000 и на 40 000 000 000 000 местах двоичной дроби числа π. Ими оказались нули (данные сайта www.geom.com).

Остановится ли когда-либо удивительная погоня за исчезающими в бесконечности знаками числа π? — По-видимому, этот вопрос можно переформулировать так: прекратит ли когда-либо свое существование человеческая цивилизация?

Математический аккомпанемент

В основу проекта PiHex были положены расчетные соотношения Фебрайса Биллерда (Fabrice Bellard, 1997). Познакомимся с выводом одной из формул, который поучителен с точки зрения использования комплексных чисел [Bel].

Рассмотрим комплексное число

$$z = x + iy, \quad \text{где} \quad x = 1 - \frac{1}{a}, \quad y = -\frac{1}{a},$$

a — некоторый вещественный параметр, $a > \sqrt{2}$. Аргумент φ этого числа, с одной стороны, равен мнимой части функции $\ln z$ (это видно из записи числа z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$); с другой стороны, по определению он равен $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Итак, $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \operatorname{Im}(\ln z)$, откуда, выражая x и y через параметр a, получаем:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{a-1} = \operatorname{Im}\left[-\ln\left(1-\frac{1+i}{a}\right)\right].$$

Поскольку для любого комплексного числа t такого, что $|t| < 1$, справедливо разложение

$$-\ln\,(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n},$$

то, полагая $t = \dfrac{1+i}{a}$, отсюда выводим:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{a-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{a^{4n+3}}\left(\frac{a^2}{4n+1}+\frac{2a}{4n+2}+\frac{2}{4n+3}\right). \qquad (*)$$

Здесь использованы результаты:

$$t^2 = \frac{2i}{a^2}, \quad t^3 = \frac{2(i-1)}{a^3}, \quad t^4 = -\frac{4}{a^4}, \quad t^5 = -\frac{4(i+1)}{a^5},$$
$$t^6 = -\frac{8i}{a^6}, \quad t^7 = \frac{8(1-i)}{a^7}, \quad t^8 = \frac{16}{a^8} \quad \text{и т. д.}$$

Если в формуле $(*)$ положить $a = 2$, то получим быстро сходящийся ряд

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1}+\frac{2}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}\right).$$

Расчеты, аналогичные предыдущим, дают быстрее сходящийся ряд, полученный в 1995 году Дэвидом Бейли, Петером Борвейном и Саймоном Плауфом [Bei]:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^n.$$

Фебрайс Биллерд в [Bel] приводит еще более быстро сходящийся ряд:

$$\pi = \frac{1}{2^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\left(-\frac{2^5}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{2^8}{10n+1}-\right.$$
$$\left.-\frac{2^6}{10n+3}-\frac{2^2}{10n+5}-\frac{2^2}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}\right).$$

§ 13. Нерешенные проблемы

Стал считать и сбился на бесконечности.

Владимир Казаков. Жизнь прозы

Нормально ли число π?

С точки зрения здравого смысла число π вполне нормально, ничем не хуже других чисел (правда, имеются и патологии такого восприятия, но об этом речь пойдет в последней главе). Здесь мы познакомимся с определением нормальности числа, которое дал французский математик Э. Борель в 1909 году. Грубо говоря, положительное меньшее единицы число называется нормальным, если в его десятичной записи любая комбинация цифр встречается одинаково часто. Это определение можно распространить и на другие, недесятичные системы счисления. Вот более точное определение [Сте]. рассмотрим последовательность десятичных цифр дробной части числа π:

$$1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, \ldots \tag{1}$$

Зададимся какой-нибудь одной цифрой, например 9, и подсчитаем количество появлений этой цифры среди первых n членов последовательности (1). Обозначим это количество через $N(9, n)$. Имеем: $N(9,1) = 0$; $N(9, 2) = 0$; $N(9, 3) = 0$; $N(9, 4) = 0$; $N(9, 5) = 1$; $N(9, 6) = 1$ и т. д. Если в среднем среди 10 цифр последовательности (1) оказывается одна девятка, то при больших значениях n естественно ожидать появления приближенного равенства $\frac{N(9, n)}{n} \approx \frac{1}{10}$, или, более точно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(9, n)}{n} = \frac{1}{10} \tag{2}$$

Если бы аналогичное (2) равенство выполнялось не только для девятки, но и для любой цифры 0, 1, ..., 9, то в этом случае дробная часть числа π, по терминологии Э. Бореля, являла бы собой вещественное число, *слабо нормальное к основанию* 10. Естественно, что число π можно представить в системе счисления с другим основанием g (например, в двоичной ($g = 2$) или в троичной ($g = 3$) системе). Тогда можно рассматривать новые цифры δв этой новой системе и исследовать выполнимость равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(\delta, n)}{n} = \frac{1}{g}, \tag{3}$$

являющегося аналогом равенства (2), здесь $0 \leqslant \delta < g$. Если бы вдруг оказалось, что для любой системы счисления (для любого $g \geqslant 2$) и для любой цифры δ в этой системе последовательность цифр дробной части числа π удовлетворяла равенству (3), то в этом случае дробная часть числа π представляла бы собой *слабо нормальное* число.

Наконец, чтобы ввести понятие нормального числа, рассмотрим не одиночные цифры, а произвольные кортежи из цифр. Представим, что в k-местные сани для бобслея (k — любое натуральное число) друг за другом садятся произвольные k цифр $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ g-ичной системы счисления, а затем эти сани проносятся вдоль последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{4}$$

получающейся при разложении действительного числа α; $0 < \alpha < 1$ в бесконечную g-ичную дробь

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{g} + \frac{\alpha_2}{g^2} + \frac{\alpha_3}{g^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{g^n} + \ldots$$

Пусть $N(\delta, n)$-число совпадений скобки $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ среди первых n скобок последовательности (4). Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(\delta, n)}{n} = \frac{1}{g^k},$$

то число α называется *нормальным*.

В настоящее время неизвестно даже, является ли дробная часть числа π слабо нормальной к основанию 10 или к какому-либо другому основанию. Иными словами, неизвестно, одинаково ли часто встречаются все цифры в записи π. Имеющиеся в настоящее время данные вычислительного эксперимента свидетельствуют о том, что среди первых 200 000 000 000 десятичных знаков числа π (не считая целой части) все цифры встречаются примерно одинаково:

цифра	сколько раз появляется	
0	20 000 030 841	
1	19 999 914 711	
2	20 000 013 697	
3	20 000 069 393	
4	19 999 921 691	
5	19 999 917 053	
6	19 999 881 515	
7	19 999 967 594	
8	20 000 291 044	
9	19 999 869 180	(данные [PiR]).

Как видно из этой таблицы, доля появлений каждой десятичной цифры примерно равна одной десятой (погрешность такого приближения не превышает 0,0015 %).

Любопытные статистические данные приводятся на сайте www.angio.net/pi/piquery. Автор этого сайта Дэйв Андерсен разработал программу поиска среди первых 100 000 000 цифр числа π произвольного вводимого посетителем сайта натурального числа (и сообщающую пользователю о результатах этого поиска):

количество цифр поискового числа	доля успешных результатов поиска
1–5	100 %
6	близко к 100 %
7	99,995 %
8	63 %
9	9,5 %
10	0,995 %
11	0,09995 %

Предположение о равном «представительстве» цифр в десятичном разложении π было выдвинуто уже при вычислении первых сотен его знаков в начале XIX века. Английского математика де Моргана (1806–1871) в свое время очень удивил тот факт, что среди 700 цифр десятичной дроби числа π, вычисленных Уильямом Шенксом, цифра 7 оказалась на особом положении. Если любая другая цифра встречалась примерно одинаково — около 70 раз, то цифра 7 — всего 53 раза. «Если бы все циклометристы и апокалипсисты объединили свой разум, — писал де Морган, — и до тех пор, пока они не придут к единому мнению относительно причин этого явления, не печатали бы ни единой строки, то они бы заслужили признательность всего человечества» (цитируется по [Гар], с. 426).

Причина этого явления, как мы уже знаем, скрывается в неверно вычисленных Шенксом знаках π, начиная с 528-го. Последующее устранение этой ошибки устранило и «дискриминацию» цифры 7 — все недостающие семерки заняли подобающее им равноправное место.

Впрочем, — подобающее ли? — Этот вопрос сегодня остается открытым.

«Тонкая структура» числа π

Какие комбинации цифр возможны, а какие невозможны в десятичном разложении числа π? До недавнего времени на этот счет нельзя было сказать ничего вразумительного. Но вот забрезжил первый просвет. Результат, о котором пойдет речь ниже, сообщил профессор Восточно-Иллинойсского университета Григорий Александрович Гальперин.

Рассмотрим любые m цифр числа π, идущие подряд, начиная с самого начала: 314.... Австралийский математик Альф ван дер Поортен доказал [Alf], что сразу же за этими m цифрами в десятичном разложении числа π не может идти набор из $7m$ девяток: за первой цифрой 3 не идет 7 девяток; за цифрами 31 не идут 14 девяток и так далее.

Григорий Александрович Гальперин выдвигает гипотезу, что сразу же за m первыми цифрами числа π не может идти набор из m девяток. Эта гипотеза верна по крайней мере для тех цифр числа π, которые в настоящее время вычислены с помощью компьютеров. Верна ли эта гипотеза в общем случае — неизвестно. «А дальше я не знаю, и никто не знает — увы!» — заключает Григорий Александрович. (Дальнейшее обсуждение темы см. в § 37, задача 7; § 44.)

Романтическая гипотеза

Знаете любимую игру бесконечности?
Мерцать на ресницах.

Владимир Казаков. Объемы

Мы остаемся в неведении относительно того, какие комбинации цифр могут встретиться в десятичном разложении числа π. Это незнание лежит в основе следующей красивой гипотезы ([Гар], с. 427).

Закодируем используемые при наборе этой книги типографские символы комбинациями цифр от 0 до 9. Например, каждому символу можно сопоставить уникальный десятицифровый код, в котором задействованы различные цифры. Вся книга тогда представится длинным цифровым кодом, в котором одинаковые цифры могут стоять не более чем на двух соседних местах (на границах кодов двух соседних символов). Очевидно, все ныне известные ограничения, свойственные «тонкой структуре» числа π, при этом будут соблюдены.

Гипотеза состоит в том, что где-то на «бескрайних просторах» десятичного разложения числа π может встретиться построенный нами код. Ясно, что вместо данной (не очень «толстой») книги можно закодировать и солидные сочинения: роман Л. Н. Толстого «Война и мир», «Британскую Энциклопедию», и вообще, как фантазирует Мартин Гарднер, «любую книгу, которая была, будет или могла быть написана».

Поистине, число π — это открытая книга, которая еще никем не прочитана до конца.

Глава 2

НА ПРОСТОРАХ ГЕОМЕТРИИ

Чья рука этот круг роковой разорвет?
Кто конец и начало у круга найдет?

Омар-Хайям

§ 14. Житейская история

Эту историю мне рассказал знакомый.

«Ищу я как-то на рынке приличные обои, выбираю, и тут возникает передо мной мужичок, хитрый такой. „Купи, говорит, эти шикарные обои. Дешево продам.“ А в руках держит такой тощий-тощий рулончик, ну, палка, одним словом, и все.

— Сколько же в нем погонных метров? — так, на всякий случай, спрашиваю.

— Как сколько? Все десять и будет!

— Да неуж-то?

— Можешь поверить или проверить.

Ну, проверить—это просто. Итак, диаметр рулона примерно 6 сантиметров, а толщина слоя бумаги около 1 миллиметра. Значит, рулон можно представить в виде совокупности цилиндрических слоев бумаги с радиусами $1, 2, \ldots, 30$ миллиметров. Отсюда общая длина рулона $2\pi(1 + 2 + \ldots + 30) = 2\pi \cdot 31 \cdot 15$ миллиметров, то есть где-то около 3 метров. Одним словом, обрезок, а не нормальный рулон. Палка — она и есть палка.

Вот так число π уберегло меня от подлога.»

Математический аккомпанемент

Приведенная в рассказе знакомого оценка длины обоев носит приближенный характер. Более точная модель рулона обоев в виде $n = \dfrac{D}{2h}$ цилиндрических слоев бумаги, где D — диаметр рулона, h — толщина слоя, с радиусами слоев $r_i = h\left(i + \dfrac{1}{2}\right)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ дает следующую оценку для длины l бумаги в рулоне:

$$l = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} r_i = \pi h n^2 = \pi \frac{D^2}{4h}. \qquad (*)$$

Эту же оценку можно получить из более простых соображений, приравняв объем бумаги в цилиндрическом рулоне $w\pi\frac{D^2}{4}$ (здесь w — ширина рулона) объему whl плоского прямоугольного параллелепипеда, который представляет развернутый лист рулона.

Любопытно, что оценка по формуле при $h = 1$ мм, $D = 600$ мм дает такое же приближенное значение длины обоев $l \approx 3$ м, которое было получено знакомым из более грубых соображений.

§ 15. Коза, блины и планеты

С любопытной «теорией голодной козы» можно познакомиться в статье [Кру]. Козы, по определению авторов этой статьи, «прожорливые создания, которые съедают все, до чего могут дотянуться». Если привязать козу к колышку на лугу, то она объест всю траву вокруг этого колышка в круге радиуса R, где R– длина веревки. Если же вместо колышка натянуть проволоку, а на конце веревки сделать петлю и надеть ее на проволоку, то коза объест участок луга, показанный на рис. 2.1.

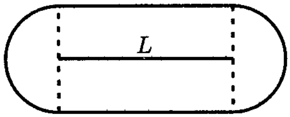


Рис. 2.1

Площадь этого участка равна πR^2+2RL, где L– длина проволоки. Если закрепить проволоку так, как цепляют «усики» троллейбусов к электрическим проводам, и протянуть направляющий провод вдоль периметра многоугольника, то коза общиплет травку в окрестности этого многоугольника. Длина линии, ограничивающей длину этой окрестности с наружной стороны многоугольника, равна $P + 2\pi R$, где P—периметр многоугольника. По этой же формуле рассчитывается длина приводного ремня, насаженного на систему шкивов радиуса R (рис. 2.2). В данном случае периметр P равен сумме расстояний между осями шкивов.

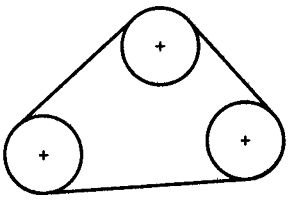


Рис. 2.2

В общем случае, если каждую точку выпуклой замкнутой линии длины l сдвинуть наружу в перпендикулярном линии направлении на расстояние R (рис. 2.3), то длина L полученной линии вычисляется по формуле:

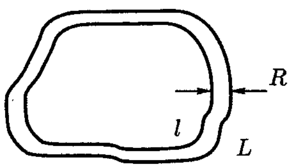


Рис. 2.3

$$L = l + 2\pi R$$

(линия называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые ее две точки, полностью находится внутри фигуры, ограниченной этой линией).

Предположим, выпуклая фигура периметра l и площади S сплошь покрыта светящимися бактериями, причем каждая бактерия освещает круг радиуса R. Освещенная всеми бактериями площадь вычисляется по формуле:

$$S + Rl + \pi R^2.$$

Построим всевозможные шары радиуса R с центрами внутри описанной выше фигуры. Получится некоторое геометрическое тело, которое условно можно назвать «блином». Объем «блина» вычисляется по формуле:

$$2RS + \frac{\pi R^2 l}{2} + \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В некоторой звездной системе обнаружены одинаковые планеты— шары одного и того же радиуса R. На каждой из этих планет отметим множество всех точек, из которых не видна ни одна другая планета. Сумма площадей отмеченных частей равна $4\pi R^2$ (то есть равна площади поверхности одной планеты) [Пра].

§ 16. Узаконенные неравенства

С числом π связано множество замечательных геометрических неравенств. Наиболее известное из них — так называемое *изопериметрическое неравенство*, связывающее площадь S и периметр p любой плоской фигуры:

$$4\pi S \leqslant p^2, \qquad (1)$$

причем равенство достигается только в том случае, если фигура— круг. Иными словами, круг из всех фигур с заданным периметром имеет наибольшую площадь. Справедлив и пространственный аналог этого утверждения: шар из всех тел с заданной площадью поверхности имеет наибольший объем. Соответственно, из всех тел заданного объема наименьшую площадь боковой поверхности имеет шар. Это объясняет, в частности, почему мыльные пузыри приобретают форму шара, а кошки в холодную погоду пытаются свернуться клубочком.

Возможно, знание изопериметрического неравенства позволило финикийской царевне Дидоне ловко решить в свою пользу важную практическую задачу. По преданию, спасаясь от преследований брата, Дидона оказалась во владениях нумидийского короля Ярба. Жадный Ярб согласился ей выделить такой клочок земли, который «можно окружить бычьей шкурой». Находчивая Дидона изготовила из бычьей шкуры длинный тонкий ремешок и окружила им территорию огромных размеров. По легенде, на этом месте возник город Карфаген [Але].

Для выпуклых фигур неравенство (1) получается как частный случай более общих неравенств, доказанных Т. Боннезеном ([Шкл], с. 68):

$$p^2 - 4\pi S \geqslant (p - 2\pi r)^2,$$
$$p^2 - 4\pi S \geqslant (2\pi R - p)^2,$$

здесь r – радиус вписанного в фигуру круга (то есть радиус наибольшего круга, полностью содержащегося в данной фигуре), а R – радиус описанного вокруг фигуры круга (то есть радиус наименьшего круга, заключающего фигуру внутри себя).

Диаметром фигуры называется наибольшее из расстояний между двумя ее точками. Оказывается, периметр p и площадь S произвольной плоской выпуклой фигуры диаметра d удовлетворяют неравенствам:

$$2d < p \leqslant \pi d;$$
$$0 < S \leqslant \pi \frac{d^2}{4},$$

причем из всех выпуклых фигур диаметра d наибольшую площадь $\frac{\pi d^2}{4}$ имеет лишь круг, но наибольший периметр πd могут иметь бесконечно много разных фигур. Если же фигура не обязательно выпуклая, то по-прежнему $0 < S \leqslant \pi \frac{d^2}{4}$, однако в этом случае периметр p фигуры уже может быть сколь угодно большим [Ягл].

Несмотря на то, что многие геометрические неравенства допускают простую формулировку, доказательство их требует незаурядной изобретательской сноровки.

§ 17. «Мисс-покрышка»

Может быть, вам удастся справиться с нерешенной проблемой, которую сформулировал Анри Лебег (1875–1941) в 1914 году.

Назовем *универсальной покрышкой* такую фигуру, которой можно покрыть любое множество точек на плоскости, никакие две из которых не находятся друг от друга на расстоянии, большем 1. Задача Лебега состоит в том, чтобы найти универсальную покрышку наименьшей возможной площади.

Круг диаметра 1, вопреки нашей интуиции, не может претендовать на призовое место в этом конкурсе, поскольку не в состоянии покрыть даже правильный треугольник с длиной стороны 1. В 1920 году венгерский математик Йожеф Пал (р. 1881) доказал, что минимальная площадь S универсальной покрышки, если таковая существует, должна лежать в пределах $\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} \leqslant S < \frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$, однако выделить одну или несколько фигур, которые только и могут являться искомыми «минимальными» покрышками, никому до сих пор не удалось.

Фигуры, участвующие в конкурсе «Мисс-Покрышка», следующие.

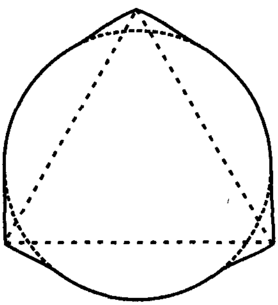


Рис. 2.4

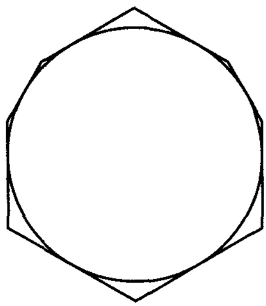


Рис. 2.5

Фигура, «натянутая» на правильный треугольник с длиной стороны 1 и круг диаметра 1 с общим центром (см. рис. 2.4).

Фигура, образованная из правильного шестиугольника диаметра 1 отсечением двух угловых частей по касательным к вписанному кругу ([Шкл], с. 86–88) (см. рис. 2.5).

§ 18. Бочки, бублики и другие тела вращения

В 1615 году вышла книга немецкого математика и астронома Иоганна Кеплера (1571–1630), сыгравшая заметную роль в становлении дифференциального и интегрального исчисления. Называлась она «Новая стереометрия винных бочек». Заинтересовавшись тем, как торговец вином измеряет объем бочки, Кеплер провел обширные исследования по вычислению объемов тел вращения. Он рассмотрел 92 различных тела, которым придумал запоминающиеся названия: «лимон», «яблоко», «груша», «слива», «айва», «турецкая чалма»,... При подсчете объема он разбивал тело на множество элементарных частей. Так, тор (математическую модель бублика) Кеплер разбил его меридиональными сечениями на кружки (рис. 2.6). Каждый

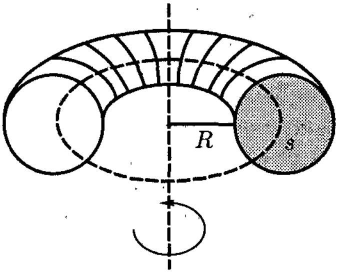


Рис. 2.6

из кружков может быть приближен цилиндром — точность такого приближения тем выше, чем меньше высота цилиндров. В пределе, когда количество кружков стремится к бесконечности (и, значит, высота каждого элементарного цилиндра стремится к нулю), объем тора совпадает с объемом цилиндра, у которого площадь основания равна площади круга s в меридиональном сечении, а высота равна длине окружности, которую описывает центр этого сечения при его вращения вокруг оси тора (см. рис. 2.6):

$$V = 2\pi R \cdot s.$$

Если радиус вращающегося круга равен r, то $V = 2\pi^2 R r^2$.

В 1635–1641 годах вышел трактат «О центре тяжести» швейцарского математика Пауля Гюльдена (1577–1643). Во второй книге этого трактата Гюльден изложил следующие теоремы.

Теорема первая Гюльдена. *Площадь S поверхности тела, образованного вращением плоской линии (замкнутой или незамкнутой) вокруг оси, лежащей в плоскости этой линии и не пересекающей ее, равен произведению длины L вращающейся линии на длину окружности, радиус r которой равен расстоянию от оси вращения до центра масс, равномерно распределенных вдоль этой линии:*

$$S = L \cdot 2\pi r$$

Теорема вторая Гюльдена. *Объем V тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади S фигуры на длину окружности, радиус r которой равен расстоянию от оси вращения до центра масс, равномерно распределенных по фигуре:*

$$V = S \cdot 2\pi r.$$

Во многих простейших случаях центр масс линии или фигуры определить несложно. Центром масс отрезка является его середина. Помещая в середине каждого звена ломаной линии массу, численно равную длине этого звена, можно определить центр масс ломаной линии (в частности, контура многоугольника). Центр масс окружности находится в ее геометрическом центре. Центр масс центрально-симметричной плоской фигуры: круга, правильного многоугольника, параллелограмма—находится в ее центре симметрии. Центр масс треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан. Последний факт позволяет находить центр масс произвольного многоугольника, разбивая его на треугольники.

Знание теорем Гюльдена позволяет упростить решение многих геометрических задач. Хотя в практике школы или экзамена их использовать не принято, однако эти теоремы могут помочь быстро найти правильный ответ [Эпп].

1. Пользуясь второй теоремой Гюльдена, найдите объемы следующих тел:

а) кругового цилиндра радиуса R и высоты H;

б) кругового конуса с радиусом основания R и высотой H.

2. Пользуясь теоремами Гюльдена, найдите центр масс:

а) полукруга радиуса R;

б) полуокружности радиуса R.

Математический аккомпанемент

1. а) Круговой цилиндр получается вращением прямоугольника площади HR вокруг одной из его сторон (рис. 2.7). Центр тяжести прямоугольника (точка пересечеиия его диагоналей) находится на расстоянии $\frac{R}{2}$ от оси вращения. По второй теореме Гюльдена объем цилиндра равен

$$V = HR \cdot 2\pi\frac{R}{2} = \pi R^2 H.$$

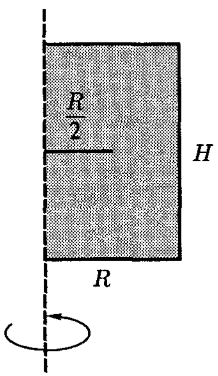


Рис. 2.7

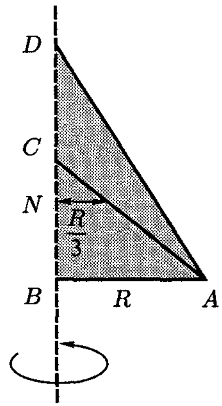


Рис. 2.8

б) Круговой конус получается вращением прямоугольного треугольника ABD вокруг катета BD (рис. 2.8). Поскольку $AB = R$; $BD = H$, то площадь этого треугольника равна $\frac{RH}{2}$. Центр масс треугольника ABD находится в точке M пересечения его медиан. Если AC — медиана, $MN \perp BD$, то

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{AC} = \frac{1}{3}, \quad \text{откуда} \quad MN = \frac{R}{3}.$$

По второй теореме Гюльдена объем конуса равен

$$V = \frac{RH}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

2. а) Вращая полукруг площади $\frac{\pi R^2}{2}$ вокруг его диаметра, получим шар объема $\frac{4}{3}\pi R^3$. По второй теореме Гюльдена этот объем равен $\frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi r$, где r — расстояние от оси вращения до центра масс полу-

круга. Из равенства двух выражений для объема следует $r = \dfrac{4R}{3\pi}$. Центр полукруга находится на его оси симметрии на удалении r от диаметра (рис. 2.9).

б) Аналогично, привлекая первую теорему Гюльдена, находим, что центр масс полуокружности располагается на ее оси симметрии на удалении $r = \dfrac{2R}{\pi}$ от ее диаметра.

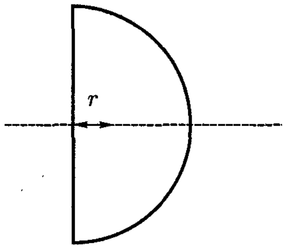


Рис. 2.9

О некоторых обобщениях теоремы Гюльдена можно прочитать в статье [Бол].

§ 19. Как запугать читателя куриным яйцом

Так мой отец, декан Летаев,
промолвив: интеграл из пи,
взвихрится и взлетит, растаяв,
взлетая в голубой степи.

А. Г. Розенберг,
А. М. Финкель,
Э. С. Паперная.
Парнас дыбом

Оригинальный способ запугивания своих читателей придумали в редакции журнала «Наука и жизнь». В десятом номере этого журнала за 1983 год (с. 122–123) можно увидеть заметку, начинающуюся со «страшилки»:

• В МАСТЕРСКОЙ ПРИРОДЫ

Эти не столь уж простые уравнения вывел английский исследователь Т. К. Картер. Они описывают всем известную и простую, казалось бы, вещь — куриное яйцо.

ПРОСТО, КАК ЯЙЦО

$$Y = \pm b\left[\frac{1}{4} - \left(x^p - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$S = \int_0^1 \pi Y\sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} \cdot dX$$

Давайте, все же, не будем пугаться, а попытаемся разобраться в этих устрашающего вида выкладках.

Куриное яйцо — классический образчик тела вращения. Рассмотрим сначала в декартовой прямоугольной системе координат xOy

дугу полуокружности (рис. 2.10), заданной уравнением:

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (1)$$

Вращая ограниченный этой дугой полукруг вокруг оси Ox, получим шар радиуса $\frac{1}{2}$, центр которого располагается в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Затем слегка «подпортим» функцию (1), вводя в нее некоторые вспомогательные константы b и p (это обычный прием математического моделирования):

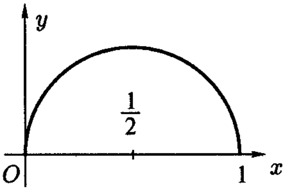


Рис. 2.10

$$y = b\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x^p - \frac{1}{2}\right)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (2)$$

Подбирая числовые значения констант b и p, можно добиться того, чтобы график функции (2) напоминал профиль «полуяйца» — рис. 2.11. Вращая ограниченную им область вокруг оси Ox, получим тело вращения, напоминающее яйцо.

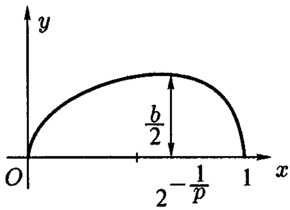


Рис. 2.11

Все, на этом можно было бы и остановиться. Однако в заметке «Просто, как яйцо» приведен также устрашающего вида интеграл. Откуда он взялся?

В математическом анализе с помощью интегралов выражаются различные геометрические характеристики тела вращения (впрочем, и не только — вращения): его площадь поверхности и объем. Предположим, тело вращения получено посредством вращения криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $y = f(x) \geqslant 0$. Тогда площадь S его боковой поверхности выражается формулой

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \qquad (3)$$

а его объем V — формулой:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx \qquad (4)$$

Доказательство этих формул можно найти в любом стандартном курсе математического анализа, а также в книге: *Фаддеев Д. К.*

Никулин М.С. Соколовский И.Ф. Элементы высшей математики для школьников. М.: Наука, 1987. Гл. 6 (с. 219–275). Формулой (4) пользовался английский исследователь Т. К. Картер для определения числовых параметров b и p в математической модели яйца. Он измерял объемы большого количества куриных яиц, опуская их в воду. Затем сравнивал полученные экспериментальные значения с объемом, вычисленным по формуле (4), стараясь подобрать константы b и p таким образом, чтобы рассогласование теории с практикой было минимальным.

§ 20. π в Многомерии

Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением, ничего не стоит раздвинуть помещение до желательных пределов. Скажу Вам больше, уважаемая госпожа, до черт знает каких пределов!

Михаил Булгаков. Мастер и Маргарита

...а там, за оградой, начиналось пространство.

Владимир Казаков. Ряды

В книге «Флатландия» (ее название происходит от английского слова flat — *плоский*) английского писателя XIX века Эдвина Э. Эбботта описана сказочная страна, в которой обитают одушевленные геометрические фигуры. Повествование в ней ведется от имени Квадрата, считающего себя не последним математиком Флатландии. Мы узнаем, что неправильность фигуры в сознании флатландца ассоциируется с моральной нечистоплотностью, попранием нравственных устоев и совершением уголовного преступления. Столпами и хранителями Конституции Флатландии выступают Окружности, приравниваемые к жрецам.

Представьте себе изумление Квадрата, когда ровно в полночь 31 декабря 1999 года в его жилище появилось Нечто, напоминающее одновременно и «богоподобную» окружность и «мерзейшую» неправильную фигуру. Сохраняя форму, Нечто было способно изменять свои размеры! Незнакомец добросовестно прочитал Квадрату популярную лекцию о третьем измерении и продемонстрировал несколько геометрических фокусов. Последние, однако, возымели неожиданный эффект. С криками: «Глупец! Безумец! Неправильная фигура!» Квадрат набросился на проповедника, и Сфере (а это была она) пришлось срочно ретироваться из Флатландии.

Да, порой нелегко бывает постичь геометрию умозрительного мира. Вместе с тем, количественные характеристики многомерных объектов, получающихся в результате обобщения двумерных и трехмерных аналогов, легко постигаются нашей логикой. Например, рассматривая уравнение окружности радиуса r с центром в начале системы координат

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

а затем аналогичное уравнение сферы в трехмерном пространстве

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

мы без труда можем написать выражение

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r^2$$

и объявить его уравнением некоторой *гиперсферы* (от греческого *υπερ — повышение, чрезмерность*) в четырехмерном пространстве. Более того, мы напишем

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2 \tag{1}$$

и скажем, что это — уравнение гиперсферы радиуса r с центром в начале n-мерной системы координат $Ox_1x_2 \ldots x_n$ n-мерного пространства. По аналогии с трехмерным пространством, *шаром* радиуса r с центром в начале системы координат в n-мерном пространстве является множество точек с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющими неравенству $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant r^2$. Будучи последовательным, мы можем объявить двумерным шаром круг, а одномерным — отрезок длины $2r$. Объемы шаров $V_n(r)$ по мере увеличения размерности $n = 1, 2, 3, \ldots$ описываются рядом

$$V_1(r) = 2r;$$

$$V_2(r) = \pi r^2;$$

$$V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

$$V_4(r) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4;$$

$$V_5(r) = \frac{8}{15}\pi^2 r^5;$$

$$\ldots\ldots$$

и вообще $V_n(r) = \omega_n r^n$, где ω_n — объем шара единичного радиуса в n-мерном пространстве; $n \geqslant 2$:

$$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot n} & \text{при четном } n; \\[2ex] \dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot n} & \text{при нечетном } n. \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, объем любого n-мерного шара при $n \geqslant 2$ выражается через число π.

Последнюю формулу можно записать проще, привлекая так называемую.

Г-функцию Эйлера:

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^n. \qquad (3)$$

Такая замена обоснована следующими свойствами функции $\Gamma(x)$, которые мы здесь приведем без доказательства (см. [Фих]). Для всех вещественных $x > 0$ и натуральных n справедливы равенства:

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x);$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!;$$
$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)x\Gamma(x).$$

Кроме того, $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Г-функция Эйлера обладает многими замечательными свойствами, в частности, она определена не только для целых значений аргумента, но и для дробных. Последнее обстоятельство позволяет определить, например, объем π-мерного шара по формуле (3), положив в ней $n = \pi$.

Точно так же, как и в 2-мерном и 3-мерном пространствах, число π фигурирует в выражении для площади поверхности сферы (гиперсферы) в многомерном пространстве. Формулу для площади поверхности такой сферы легче всего получить, обратив внимание на связь n-мерного объема шара с $(n-1)$-мерной площадью поверхности ограничивающей его сферы. В этом нам хорошую службу сослужат тела, называемые *симплексами* (от латинского simplex — *простой*). Поднимаясь все выше по шкале размерностей при $n = 1, 2, 3, \ldots$, мы последовательно встречаемся со следующими симплексами: отрезок, треугольник, тетраэдр,...Каждый новый симплекс этого ряда получается из предыдущего симплекса добавлением одной вершины, выбираемой вне его «подпространства». Вспоминая выражение для площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$, объема тетраэдра $v = \frac{1}{3}sh$ (здесь a — длина основания треугольника, h — соответствующая высота), мы вправе ожидать (и это можно строго обосновать — см., например, [Роз1]), что и в общем случае объем n — мерного симплекса V выражается через объем его $(n-1)$-мерного основания S по формуле $V = \frac{1}{n}Sh$. Теперь, разбивая поверхность $(n-1)$-мерной сферы на большое число $(n-1)$-мерных симплексов и соединяя их вершины с центром сферы, мы получим некоторое приближение шара совокупностью элементарных n-мерных симплексов. n-мерный объем шара $V_n(r)$ при этом будет приближенно равен сумме n-мерных объемов элементарных симплексов. При неограниченном увеличении количества элементарных симплексов «площадь их основания» покроет площадь сферы, высота каждого из них будет стремиться к радиусу шара r, а их суммарный объем будет стремиться к объему шара. Тогда $V_n = \frac{1}{n}S_{n-1}r$, где V_n — объем n-мерного шара, S_{n-1} — площадь ограничивающей его поверхности. Отсюда:

$$S_{n-1} = \frac{n}{r}V_n = nr^{n-1}\omega_n,$$

где ω_n — объем n-мерного шара единичного радиуса, определенный в (2).

Приведенные формулы свидетельствуют о том, что π имеет постоянную прописку в Многомерии!

В пространства многих измерений переносятся различные геометрические свойства, в частности, знаменитое изопериметрическое неравенство. Если бы царевне Дидоне пришлось ограничить кусочек n-мерного объема $(n-1)$-мерной поверхностью заданной площади, то несомненно, что она постаралась бы выбрать себе n-мерный шар. Именно шар из всех тел с фиксированной площадью поверхности S_{n-1} в n-мерном пространстве имеет минимальный объем. Это следует из обобщенного «изопериметрического» неравенства [Хад]:

$$S_{n-1} \geqslant n\omega_n^{1/n}V^{(n-1)/n},$$

где V_n — объем n-мерного тела, причем равенство достигается только в том случае, если это тело — шар.

Математический аккомпанемент

Приведенная в первой части книги формула (2) принадлежит немецкому математику Карлу Густаву Якоби (1804–1851). Дадим комментарий по поводу вывода этой формулы, следуя [Роз].

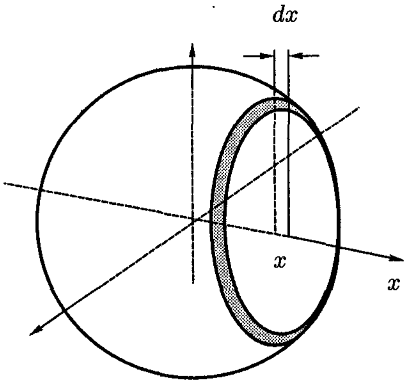


Рис. 2.12

Для объема $V_n(r)$ n-мерного шара радиуса r существует рекуррентная зависимость:

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx, \qquad (*)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

связывающая объемы шаров в пространствах соседних размерностей n и $n - 1$. n-мерный шар радиуса r можно представить в виде совокупности большого числа цилиндрических «долек» маленькой толщины dx и радиуса $\sqrt{r^2 - x^2}$ (см. рис. 2.12). Сумма объемов таких «долек» при $dx \to 0$ как раз и дает интеграл в правой части $(*)$.

Зная $V_1(r) = 2r$, из $(*)$ последовательно вычисляем $V_2(r) = \pi r^2$, $V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ и т. д.

Для попутного вычисления интегралов вида

$$\int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^{n-1}\, dx, \qquad (n > 1)$$

делаем замену $x = r\cos\alpha$, тогда

$$\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{n-1} dx = 2\int_{0}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{n-1} dx =$$

$$= -2r^n \int_{-\pi/2}^{0} |\sin\alpha|^{n-1} \sin\alpha\, d\alpha = 2\cdot(-1)^n r^n \int_{-\pi/2}^{0} \sin^n \alpha d\alpha = 2r^n I_n,$$

где $I_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n \alpha d\alpha$.

Интегрируя последнее выражение по частям, находим: $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, откуда $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Так как $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, то

$$I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k-2)\cdot 2k}\cdot\frac{\pi}{2}; \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$I_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k-2)2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot(2k+1)}. \qquad (**)$$

Полученные выражения непосредственно участвуют в выводе формулы (2) в основной части главы.

Любопытно, что с их помощью можно также вывести и *формулу Валлиса* (см. главу «В мире чисел»). Действительно, заметим, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливы неравенства

$$\sin^{2k-1} x > \sin^{2k} x > \sin^{2k+1} x,$$

и, следовательно,

$$I_{2k-1} > I_{2k} > I_{2k+1} \quad \text{или} \quad \frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} > \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} > 1.$$

Подставляя сюда выражения (**), получаем:

$$\frac{2k+1}{2k} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)(2k+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k) \cdot (2k)} \cdot \frac{\pi}{2} > 1.$$

переходя к пределу при $k \to \infty$, отсюда выводим формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k) \cdot (2k) \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k-1) \cdot (2k+1) \cdot \ldots}$$

§ 21. Квадратура доктора Шарадека

Если ограничить жизнь домашним кругом, то квадратуру круга найти нетрудно.

Дон-Аминадо. Новый Козьма Прутков

Если вы не знакомы с доктором Шарадеком, то я с удовольствием его представлю: «Доктор всех математических наук» Сильвестр Шарадек, главный герой увлекательных задач известного польского математика Гуго Штейнгауза (1929–1972). Размышляя над математическими проблемами картографии, доктор Шарадек придумал следующую задачу ([Ште], с. 102):

Представим себе остров, береговая линия которого имеет форму идеальной окружности. Как начертить квадратную карту такого острова? Отображение острова должно быть таким, чтобы береговая линия переходила в контур квадрата и масштаб точно сохранялся, то есть все части острова, имеющие одинаковую площадь, должны переходить в равновеликие области на карте.

Вот как он ее решает.

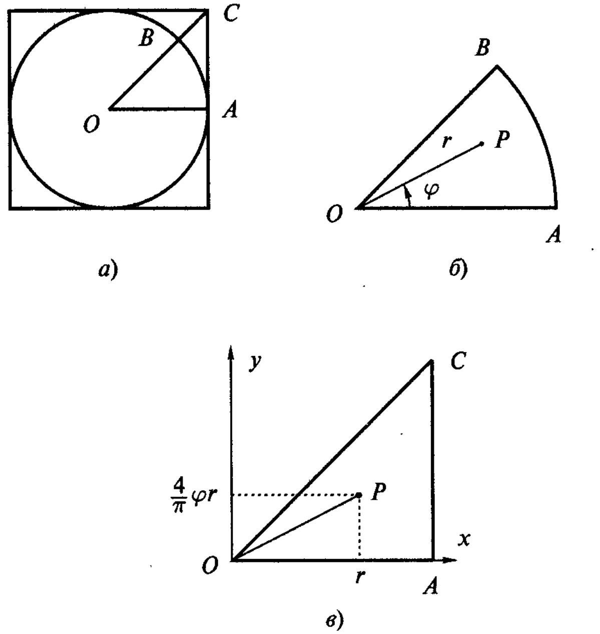


Рис. 2.13

Построим отображение круга на описанный вокруг него квадрат. Способ такого отображения станет понятным, если мы рассмотрим отображение сектора OAB на треугольник OAC (рис. 2.13). Точке P сектора круга с полярными координатами (r, φ) сопоставим точку P' треугольника с координатами (x, y) так, чтобы

$$x = r; \quad y = \frac{4}{\pi}\varphi r, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}; \quad 0 \leqslant r \leqslant R;$$

R — радиус круга. При таком отображении все точки дуги AB сектора с полярными координатами (R, φ) перейдут в точки с прямоугольными координатами $(R, \frac{4}{\pi}\varphi R)$. Таким образом, дуга AB переходит в отрезок AC. Нетрудно убедиться, что элемент S_1 сектора

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2; \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2$$

отображается в трапецию S_2:

$$\frac{4}{\pi}\varphi_1 x \leqslant y \leqslant \frac{4}{\pi}\varphi_2 x; \quad r_1 \leqslant x \leqslant r_2 \quad (\text{рис. } 2.14).$$

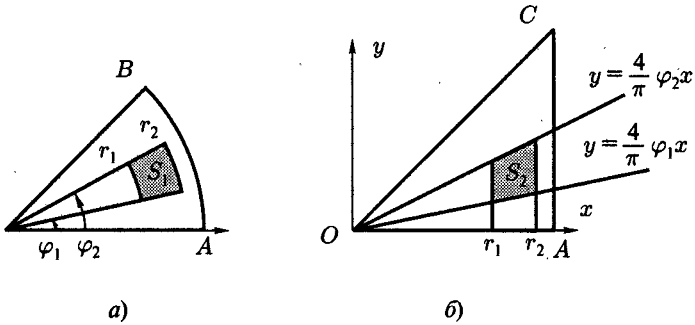


Рис. 2.14

Обозначив площади элемента сектора и трапеции так же, как и сами фигуры, найдем:

$$S_1 = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(r_2^2 - r_1^2);$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{\pi}\varphi_2 r_2 - \frac{4}{\pi}\varphi_1 r_2\right) + \left(\frac{4}{\pi}\varphi_2 r_1 - \frac{4}{\pi}\varphi_1 r_1\right)\right](r_2 - r_1) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)(r_2^2 - r_1^2).$$

Отсюда $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\pi}{4}$, то есть указанное отображение сохраняет масштабы.

Слегка подправив отображение доктора Шарадека, а именно положив $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}r$; $y = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\varphi r$, можно добиться того, чтобы круговой сектор перешел в равновеликий ему прямоугольный треугольник.

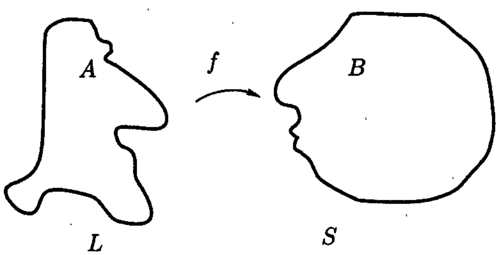


Рис. 2.15

Оказывается, произвольную область A можно так отобразить на заранее заданную область B (рис. 2.15), чтобы малые части области A при отображении переходили в подобные им части области B

и граница L области A переходила в границу S области B. Это доказал Бернхард Риман (1826–1866) в 1851 году.

«Мы ограничили срок подачи материалов началом этого года, но поток писем не прекращается до сих пор. Только когда их количество перевалило за $2\pi R$, где R — наш тираж, мы поняли, что круг читателей исчерпан и некоторые повторяются».

Редакция журнала «Химия и жизнь», 1992, 12. С.5

§ 22. Неевклидовы, но геометрии

Теперь у всех свои дела-заботы,
свой опыт неевклидовых начал.

Мартин Мелодьев

Злоключения пятого постулата

Неевклидовыми называют все геометрические системы, отличные от геометрии Евклида (III в. до н. э.). Здесь мы осуществим краткий визит в геометрию Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856) и геометрию Бернхарда Римана (1826–1866). Разногласие этих геометрий вызвано различной трактовкой вопроса: сколько прямых (в плоскости) можно провести через данную точку A параллельно данной прямой l (сама точка A не принадлежит прямой l)? В геометрии Евклида постулируется единственность параллельной прямой (V постулат), в геометрии Римана — таких прямых нет вовсе, а в геометрии Лобачевского возможно существование более одной параллельной прямой.

Судьба пятого постулата Евклида чем-то сродни судьбе задачи о квадратуре круга. Интуитивно чувствуя его неочевидность, многие математики пытались вывести этот постулат из других аксиом, но тщетно. Среди известных ученых, безуспешно пытавшихся штурмовать неприступную крепость, были Архимед (ок. 287 – ок. 212 до н. э.), Омар Хайям (ок. 1048–1131),... Французский математик А. М. Лежандр (1752–1833) 14 раз переиздавал свой учебник «Начала геометрии», каждый раз меняя доказательство V постулата и каждый раз обнаруживая новую ошибку в опубликованном доказательстве. А о его современнике Ж. Л. Лагранже (1736–1813) рассказывают, что, выступая с доказательством V постулата в академии, он остановился и сказал: «Нужно, чтобы я еще подумал об этом».

Независимость пятого постулата от остальных аксиом Евклида впервые осознал Карл Фридрих Гаусс (1777–1855). Из его рукописного научного наследия явствует, что о неевклидовой геометрии он имел точное представление уже в 1816 году, хотя ничего об этом не опубликовал. Первые опубликованные работы по неевклидовой геометрии написали Н. И. Лобачевский (1829) и Янош Бояи (1832), которые нашли эти результаты независимо один от другого.

Идеи Н. И. Лобачевского и Я. Бояи не сразу получили признание общественности. В 1834 году в журнале «Сын Отечества» появилась анонимная рецензия на работу Лобачевского, в которой, в частности, писалось: «Как можно подумать, чтобы господин Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезною целию книгу, которая не много принесла бы чести и последнему приходскому учителю?» [Сил]. Многие современники Лобачевского были уверены, что его геометрия ошибочна, внутренне противоречива. Даже люди, весьма далекие от математики, пытались привнести свой голос в общий хор обструкции и хулы. Образованнейший Н. Г. Чернышевский в письме к сыновьям геометрию Лобачевского сравнил с «возведением сапог в квадраты» и «извлечением корней из голенищ».

Геометрия великанов

Если бы великаны—герои волшебных сказок жили наяву, они наверняка придумали бы другую геометрию, отличную от той, которую мы сейчас изучаем в школе. Исполины гораздо быстрее, чем мы, заметили бы, что поверхность Земли — не плоскость, а обладает некоторой кривизной. Так же, как и мы, они проводили бы кратчайшие линии между двумя точками на поверхности планеты, и довольно быстро обнаружили бы, что сумма внутренних углов треугольника, образованного такими линиями, отличается от 180 градусов. Великанша-учительница этому факту могла бы дать такое объяснение: «прямые» линии на сфере — ни что иное, как *большие окружности*, центры которых совпадают с центром сферы. Они вполне могут пересекаться под прямым углом (таков угол, например, между любым меридианом и экватором). Если две вершины треугольника выбрать на экваторе, а третью — на Северном полюсе, то сумма внутренних углов такого треугольника заведомо будет больше 180 градусов.

Итак, приглашая на роль прямых линий большие окружности сферы, мы строим иную геометрию, отличную от геометрии Евклида. Именно на таком подходе основана геометрия немецкого математика Бернхарда Римана.

Большие окружности сферы пересекаются в двух противоположных точках сферы. Следовательно, аксиома: «через каждые две

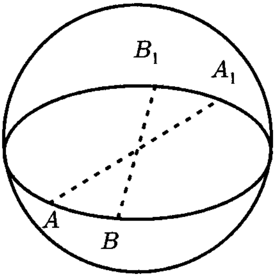


Рис. 2.16

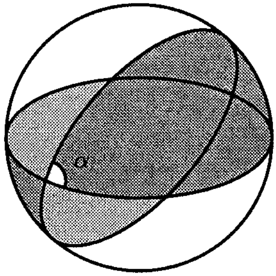


Рис. 2.17

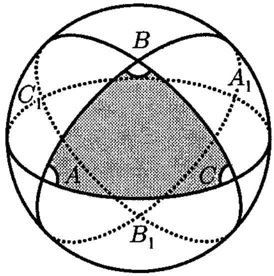


Рис. 2.18

точки проходит единственная прямая» в такой интерпретации уже не верна. Однако нашу модель можно немного «подправить», как это сделал Риман, с таким расчетом, чтобы вышеприведенная аксиома была справедливой.

Плоскость Римана можно представить как полусферу, в которой отождествляются диаметрально противоположные точки ограничивающей ее окружности (рис. 2.16).

Несложно убедиться, что в плоскости Римана через точку, взятую вне заданной прямой, нельзя провести прямую, которая не пересекала бы заданную прямую. В геометрии Римана не существует параллельных прямых! Здесь выполняется аксиома: «Всякие две прямые пересекаются в точке и притом только в одной».

Под расстоянием между двумя точками в плоскости Римана понимается длина соответствующей дуги большой окружности на полусфере. Задавшись радиусом полусферы $R = 1$, отсюда получим, что длина прямых в геометрии Римана ограничена числом π! Более того, площадь всей неевклидовой плоскости Римана ограничена числом 2π (поскольку площадь сферы радиуса $R = 1$ равна 4π). Площадь любого треугольника ABC в плоскости Римана равна $A + B + C - \pi$, где A, B, C — величины соответствующих углов, выраженные в радианах. Последний факт, обнаруженный голландским математиком Альбером Жираром (1595–1632) может быть получен следующими изящными соображениями из области сферической геометрии.

Предположим, сфера единичного радиуса разрезается проходящими через ее центр двумя плоскостями таким образом, что угол между дугами больших окружностей, вырезаемых этими плоскостями на сфере, равен α (рис. 2.17). Плоскости вырезают на сфере часть площадью 4α (на рис. 2.18 эта часть закрашена). Это следует из того, что площадь вырезаемой части пропорциональна α, а площадь остальной части пропорциональна числу $\pi - \alpha$, площадь же всей сферы равна 4π.

Три таких области на рисунке 2.18 покрывают всю сферу, причем треугольник ABC и центрально симметричный ему треугольник

$A_1B_1C_1$ эти области покрывают три раза. Отсюда

$$4A + 4B + 4C = 4\pi + 4S_{ABC},$$

или $S_{ABC} = A + B + C - \pi$.

Поистине, число π в геометрии Римана выступает «законодателем мод».

Фантастика? — Нет, геометрия

— Даль, которая здесь, и даль, которая там, перекликаются.
— Простите, я не расслышал вопроса.
— Нет, нет, они перекликаются не вопросами.

Владимир Казаков. Зиглинда

Немецкому математику Давиду Гильберту (1862–1943) принадлежит следующая характеристика, данная им одному своему бывшему ученику:

— Ах, этот? Да, я прекрасно помню его. По-видимому, для занятий математикой ему не хватало фантазии, поэтому он стал поэтом.

Действительно, математики порой придумывают такие изощренные конструкции, которым могли бы позавидовать изобретательнейшие писатели-фантасты.

Изучая геометрию в школе, мы привыкли к тому, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

описывает сферу единичного радиуса в трехмерном пространстве. Современный же математик, глядя на уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1,$$

вполне может сказать, что оно описывает сферу мнимого радиуса $i = \sqrt{-1}$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в трехмерном пространстве мы привыкли вычислять, исходя из соотношения.

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \qquad (1)$$

Давайте пофантазируем, и вместо формулы (1) возьмем другое соотношение, например,

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \qquad (2)$$

Таким образом мы допускаем, что отрезки прямых могут иметь положительную, нулевую или даже отрицательную длину. Фантастика? — Конечно. Но, вместе с тем, и реальность. Оказывается, что так называемое *псевдоевклидово пространство*, в котором введена «фантастическая» формула (2) для измерения расстояний, находит вполне реальное приложение в современной теории относительности [Роз2].

В псевдоевклидовой геометрии существует удобная модель для иллюстрации планиметрии Лобачевского. Чтобы ее представить, нужно хорошо напрячь свое воображение.

Так же как и в обычном евклидовом пространстве сферой псевдоевклидова пространства назовем множество всех его точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром, на постоянное расстояние, называемое радиусом. (Напомним, для расчета расстояний в псевдоевклидовом пространстве используется формула (2)). Уравнение такой сферы единичного радиуса:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{3}$$

А теперь представим, что радиус—величина мнимая, равная $i = \sqrt{-1}$. Тогда уравнение (3) перепишется так:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1. \tag{4}$$

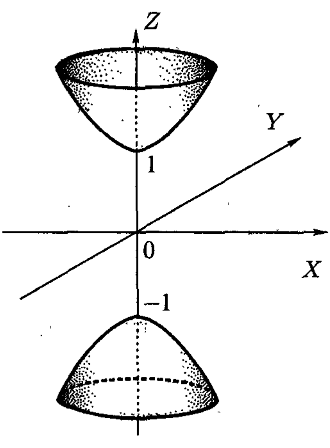


Рис. 2.19

В обычном евклидовом пространстве уравнение (4) описывает так называемый *двуполосный гиперболоид* — поверхность, которая получается вращением гиперболы $x^2 - z^2 = -1$ вокруг ее оси симметрии Oz (рис. 2.19).

Первый сюрприз: сфера в псевдоевклидовом пространстве состоит из двух несвязанных частей, каждая из них располагается внутри конуса, заданного уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

По аналогии с ранее рассмотренной геометрией Римана на полусфере, геометрию Лобачевского представим на полусфере мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве. Попросту говоря — на одной из частей двуполосного гиперболоида, показанного на рис. 2.19. Так же, как и в геометрии Римана, под прямыми в *плоскости Лобачевского* будем понимать дуги больших окружностей на сфере мнимого радиуса, другими словами — сечения одной из полостей гиперболоида плоскостями, проходящими через начало системы координат (центр сферы).

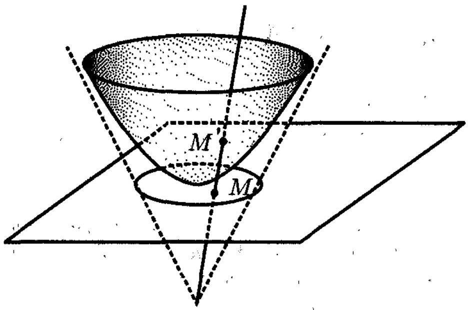


Рис. 2.20

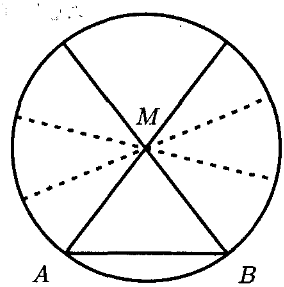


Рис. 2.21

В плоскости Лобачевского справедлива аксиома: «через точку вне прямой можно провести (в плоскости этих точки и прямой) более одной прямой, не пересекающих данную прямую». Чтобы убедиться в ее справедливости, спроектируем из начала координат верхнюю полость гиперболоида (4) на евклидову плоскость $z = 1$, касающуюся гиперболоида в точке (0, 0, 1) (рис. 2.20).

При этом между точками верхней полости гиперболоида и точками внутренности круга

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

установится взаимно-однозначное соответствие. Прямые плоскости Лобачевского перейдут в хорды круга. На рис. 2.21, показаны проекции в круг некоторой прямой AB и точки M, лежащей вне ее. Из рисунка видно, что все хорды, проходящие через точку M вне угла AMB, не пересекают хорду AB. Следовательно, через точку плоскости Лобачевского, не принадлежащую данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих данную прямую.

Популярное изложение геометрии Лобачевского можно найти во многих публикациях (см., например, [Роз2], [Гин], [Шир] и др.). Оказывается, в этой геометрии вновь встречаются знаменитые константы π и e. Если в обозначениях рисунка 2.21 из точки M опустить перпендикуляр MC на прямую AB, то угол BMC удовлетворяет уравнению Лобачевского:

$$\operatorname{tg} \frac{\angle BMC}{2} = e^{-p}, \tag{5}$$

где p — длина перпендикуляра. Из (5) в частности следует, что при стремлении параметра p к нулю величина угла BMC стремится к значению $\frac{\pi}{2}$.

Всегда ли $\pi = 3{,}14\ldots$?

— Всегда! — восторженно ответил Полесов.

И. Ильф, Е. Петров. Двенадцать стульев

Экзаменационные задачи будут подобны тем, которые мы обсудили в аудитории. Конечно, числа могут различаться. Но не все. π по-прежнему будет равно 3,14159 ...

Анекдот

На автора кирпич упал на стройке.
И стало π намного больше тройки.

А. И. Зайчик

Расстояние ρ как функция двух точек A и B в евклидовом пространстве удовлетворяет очевидным аксиомам:

1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
2) $\rho(A, B) \geqslant 0$ и $\rho(A, B) = 0$ лишь в том случае, если точка A совпадает с точкой B;
3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$ для любых точек A, B, C.

Условимся считать, что вдоль любой прямой евклидовой плоскости расстояния измеряются как обычно с той лишь разницей, что единица длины различна для прямых разных направлений, но одинакова для параллельных прямых. Это соглашение лежит в основе причудливой геометрии, придуманной Германом Минковским (1864–1909) и Стефаном Банахом (1892–1945)[1].

Выберем фиксированную точку O плоскости и отложим от нее во всех направлениях отрезки единичной длины. Мы получим некоторую замкнутую кривую — *единичную окружность*. Эта единичная окружность может быть совсем не похожей на привычную нам фигуру, о которой поэтесса Рената Муха сказала: «Я никогда не видела окружности такой безукоризненной наружности». Можно показать (см., например, [Роз2], с. 465–469), что если точка O лежит внутри единичной окружиости, причем ограниченный этой окружностью *единичный круг* является выпуклой фигурой, то все перечисленные выше аксиомы расстояния 1)–3) выполняются. В дальнейшем наличие этих условий мы будем предполагать.

[1] Идея этой геометрии вполне могла возникнуть при обдумывании ответа на вопрос: «Почему все квадраты похожи друг от друга?».

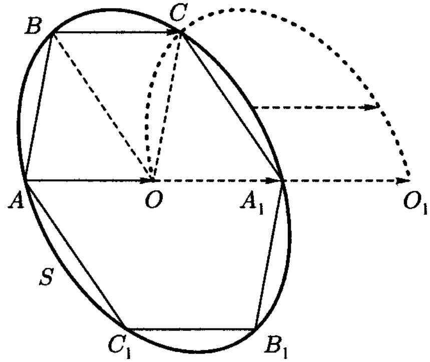


Рис. 2.22

Обозначим длину единичной окружности 2π. Следуя [Роз2], докажем, что в геометрии Минковского—Банаха $3 \leqslant \pi \leqslant 4$, причем, число π может принимать любые значения в указанном промежутке.

Пусть A — произвольная точка единичной окружности S с центром O, A_1 — диаметрально противоположная ей точка окружности S (рис. 2.22). При непрерывном обносе вектора $\overrightarrow{AO}$ вдоль кривой S, при котором начало A этого вектора описывает дугу AA_1, его конец O опишет некоторую непрерывную линию, начинающуюся *внутри* S, а заканчивающуюся *снаружи* S в такой точке O_1, что $\overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{AO}$. Следовательно, найдется такое положение BC этого вектора, при котором и его начало B и его конец C будут принадлежать окружности S. Так как четырехугольники $OABC$ и OA_1CB — параллелограммы, то

$$\rho(A, B) = \rho(O, C) = 1;$$
$$\rho(B, C) = \rho(A, O) = 1;$$
$$\rho(A_1, C) = \rho(O, B) = 1.$$

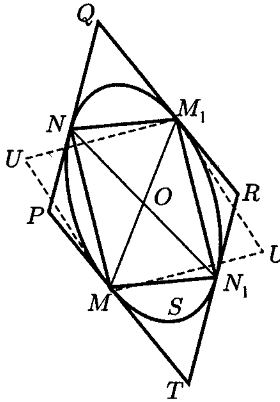
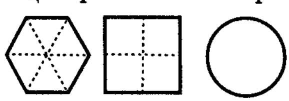


Рис. 2.23

Отсюда вытекает, что периметр центрально симметричного выпуклого шестиугольника $ABCA_1B_1C_1$, вписанного в единичную окружность S, в геометрии Минковского—Банаха равен 6, поэтому периметр 2π окружности S не меньше 6 и, значит, $\pi \geqslant 3$.

А теперь покажем, что $\pi \leqslant 4$.

Рассмотрим всевозможные вписанные в S параллелограммы с центром O и выберем среди них параллелограмм MNM_1N_1 наибольшей возможной (евклидовой) площади. Опишем вокруг MNM_1N_1 параллелограмм $PQRT$, стороны которого параллельны диагоналям MM_1 и NN_1. Если бы кривая S содержала некоторую точку U, расположенную дальше от прямой MM_1,



а) б) в)

Рис. 2.24

чем прямая PQ (рис. 2.23), то параллелограмм MUM_1U_1 имел бы большую площадь, чем MNM_1N_1, что невозможно. Итак, кривая S целиком заключена внутри параллелограмма $PQRT$. С другой стороны, $\rho(P,Q)=\rho(M,M_1)=2$; $\rho(Q,R)=\rho(N,N_1)=2$, поэтому периметр параллелограмма $PQRT$ в геометрии Минковского—Банаха с единичной окружностью S равен 8, и, значит, $2\pi \leqslant 8$, то есть $\pi \leqslant 4$.

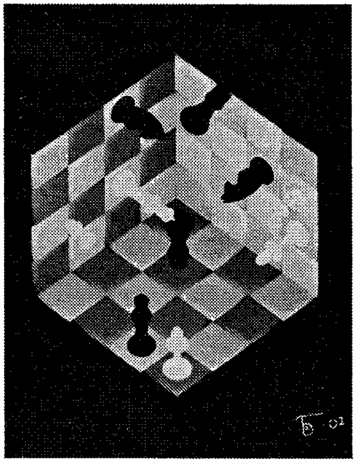


Рис. 2.25. «π-мерные шахматы» (2002). (Публикуется с разрешения автора, Татьяны Бонч-Осмоловской)

Нетрудно убедиться, что число π может принимать любые значения в промежутке от 3 до 4. Равенство $\pi = 3$ выполняется, если S представляет собой, например, правильный шестиугольник (рис. 2.24 а), $\pi = 4$, если S представляет собой квадрат (рис. 2.24 б), если S совпадает с обыкновенной (евклидовой) окружностью, то $\pi = 3{,}14159\ldots$

§ 23. Существуют ли объекты размерности π?

Вы, без сомнения, знаете, что математическая линия, линия без толщины, воображаема и реально не существует... Вы знаете, что не существует также и математической плоскости.

Все это чистые абстракции.

— Совершенно верно, — подтвердил Психолог.

— Но ведь точно так же не имеет реального существования и куб, обладающий только длиной, шириной и высотой...

Герберт Уэллс. Машина времени

Четыре стены: первая, вторая и две третьих.

Владимир Казаков. Ошибка живых

До сих пор (см., например, «π в Многомерии» под размерностью мы понимали наименьшее число координат, необходимое для однозначного определения положения точки в пространстве (одна координата для числовой прямой, две — для координатной плоскости и так далее). В этом случае размерность задается натуральным числом, и ответ на вопрос, вынесенный в заголовок пункта, отрицателен. Однако существуют другие определения размерности, сулящие немало сюрпризов. Рассмотрим одно из них, восходящее к немецкому математику Феликсу Хаусдорфу (1868–1942).

Разрезая квадрат на одинаковые составляющие его квадратики, мы получим количество N этих квадратиков, пропорциональное величине $\frac{1}{k^2}$, где k — коэффициент подобия маленького квадратика разрезаемому квадрату. Разрезая куб на одинаковые составляющие его кубики, мы получаем количество кубиков N, пропорциональное величине $\frac{1}{k^3}$, где k — коэффициент подобия маленького кубика данному кубу.

Поскольку и в общем случае для n — мерного куба существует аналогичная связь $Nk^n = 1$, то последнее соотношение при заданных значениях N и k может служит для определения размерности n-мерного куба:

$$n = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{k}}. \qquad (1)$$

В книге французского математика (ныне работающего в США) Бенуа Мандельброта [Man] определение размерности (1) распространено не только на многомерные кубы, но и на причудливые объекты, называемые *самоподобными фракталами*. Слово фрактал происходит от латинского fractus — *дробный*. Самоподобный фрактал — множество, которое представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала. Если N — число таких подмножеств, а k — коэффициент подобия (масштабирования), то характеристика n самоподобного фрактала, вычисленная по формуле (1), называется его *фрактальной размерностью*. В общем случае такая размерность не обязана быть целым числом, поэтому ее иногда называют еще *дробной* размерностью.

Существует несколько самоподобных фракталов, достойных умозрительного Музея изящной математики.

Пример самоподобного фрактала был построен шведским математиком Гельгой фон Кох в 1904 году. Он получил название **снежинка** Кох (рис. 2.26).

Ее граница составлена из трех одинаковых фракталов. Каждый из них строится итеративно (рис. 2.27).

Из начального отрезка K_0 выбрасывается средняя третья часть и добавляются два новых отрезка такой же длины (стороны равностороннего треугольника, построенного на выброшенном отрезке — см. рис. 2.27). В итоге получается множество K_1. С каждым звеном фигуры K_1 производится такая же операция — образуется фигура K_2, и так далее. Последовательность кривых $\{K_n\}$ сходится к некоторой предельной кривой К. Если взять копию К, уменьшенную в три раза $\left(k = \frac{1}{3}\right)$, то все множество К можно составить из $N = 4$ таких копий. Отсюда размерность множества К равна

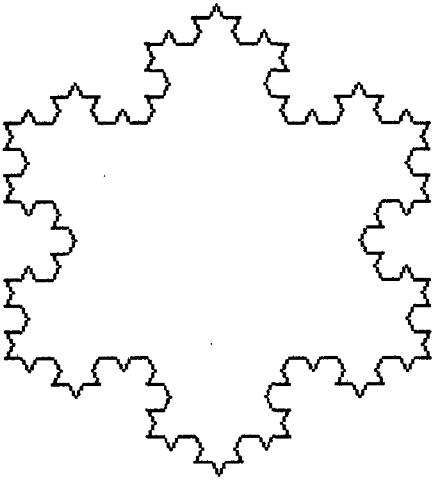


Рис. 2.26

$$n = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2618.$$

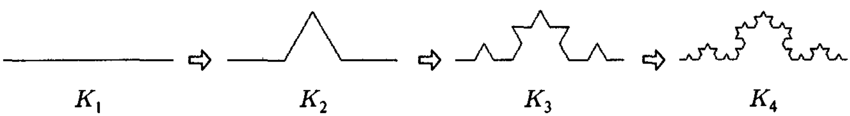


Рис. 2.27

Убедитесь в том, что граница снежинки Кох имеет бесконечную длину.

Ковер Вацлава Серпиньского (1882–1969) (рис. 2.28).

Ковер представляет собой объединение $N = 3$ непересекающихся уменьшенных в 2 раза копий. Его размерность

$$n = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}5850.$$

Губка Карла Менгера (р. 1902) (рис. 2.29).

Губка представляет собой объединение $N = 20$ непересекающихся уменьшенных в 3 раза копий. Ее размерность

$$n = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2{,}7268.$$

Коль скоро существуют самоподобные фракталы дробной размерности, то не исключено, что может существовать и некий загадочный

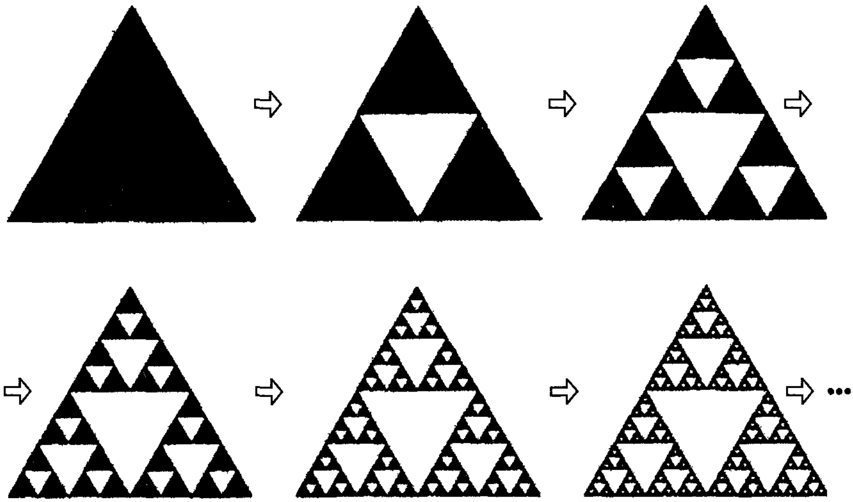


Рис. 2.28

фрактал размерности π. Существует ли он на самом деле? — Неизвестно. Может быть, его удастся сконструировать вам?

Если не ограничиваться самоподобными фракталами, то объект размерности π можно указать. Таким объектом, например, является π — мерный шар, о котором было сказано в статье «π в Многомерии».

Имея в виду размерность Хаусдорфа, можно поставить вопрос о существовании таких натуральных N и k, что

$$\pi = -\frac{\ln N}{\ln k} = -\log_k N.$$

Круг подобных вопросов можно расширять и дальше. Например, существует ли такое натуральное число n, что $\sin n = \dfrac{1}{\pi}$?

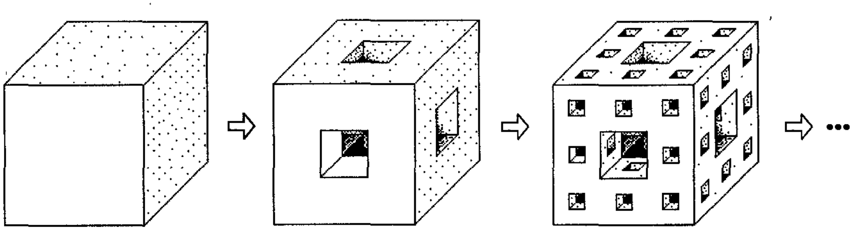


Рис. 2.29

Математический аккомпанемент

Если отрезок K_0 имеет единичную длину, то длина кривой K_n, полученной после n итераций из отрезка K_0, равна $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. В пределе при $n \to \infty$ эта длина стремится к бесконечности.

§ 24. Венок задач

— Вот вопросительный знак, вот два-три слова. Где же ваш ответ?

Владимир Казаков. Теория паузы

1. а) Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем, и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее вообразим, что длина каждого обруча увеличилась на 1 метр, в результате чего обручи равномерно приподнялись над поверхностями стягиваемых ими тел. В каком случае изменение радиуса будет больше — в случае с Землей или в случае с апельсином?

б) Представим, что вместо обруча земной шар по экватору обтянут нерастяжимым канатом. После того, как канат удлинился на 1 метр, его взяли в одной точке и оттянули от поверхности Земли на максимально возможное расстояние. Чему оно равно?

2. У каких изображенных на рис. 2.30 полуокружностей сумма длин больше — у верхних, или у нижних?

(*Файзуллаев Ю.* Квант. 1987. № 5. С. 31).

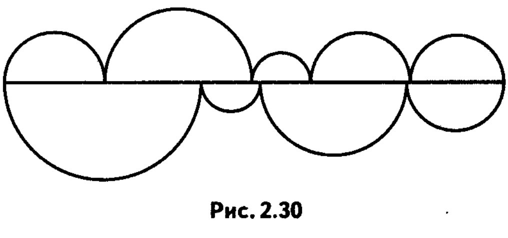


Рис. 2.30

3. — Через этот лес нужно проложить кабель. — Командир роты развернул перед связистом топографическую карту. — Длина прямой линии по карте один километр, но здесь очень много деревьев, так что берите моток проволоки побольше, километра два-два с половиной.

— Пожалуй, можно обойтись мотком и меньшей длины, — предположил связист.

Какой длины кабель нужно взять с собой связисту, чтобы выполнить приказ и, вместе с тем, не обременять себя лишним грузом?

(*А. Альтшуллер*).

4. Магнитофонная лента перематывается с левой катушки на правую, как показано на рис. 2.31. При каком расстоянии l между осями этих катушек лента сможет полностью перемотаться? Размеры полной и пустой катушек показаны на рисунке.

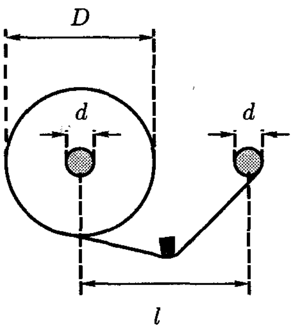


Рис. 2.31

(*Савин А. П.* Проволока, магнитофон, пишущая машинка и математика // Квант. 1990. № 4. С. 44–45).

5. Итальянский математик Лоренцо Маскерони (1750–1800) в своей получившей широкую известность книге «Геометрия циркуля» (1797) доказал, что всякая задача на построение, решаемая с помощью циркуля и линейки, разрешима и с помощью только циркуля. Ниже описывается способ приближенного спрямления окружности, предложенный Маскерони (при этом используется только один циркуль).

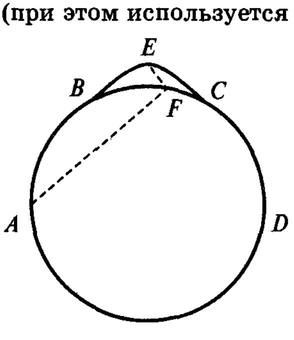


Рис. 2.32

Описываем окружность радиуса $r = 1$ (рис. 2.32). Этим же раствором циркуля, начиная от некоторой точки A, делаем засечки B, C, D, тогда точки A, B, C, D будут вершинами правильного шестиугольника. Из точек A и D, как из центров, радиусом $AC = DB$ проводим дуги CE и BE. Затем из точки B, как из центра, радиусом BE проводим дугу EF, где F — точка пересечения этой дуги с основной окружностью. Длина отрезка AF приближенно равна четверти окружности радиуса 1.

Какова точность такого приближения?

6. На рис. 2.33 представлена фигура, по свидетельству Сабита ибн-Корры (836–901) построенная Архимедом. Она называется *арбелоном* или *сапожным ножом*. Докажите, что площадь арбелона S равна площади круга, относитель-

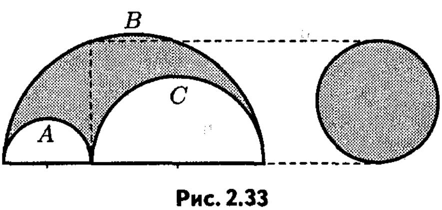


Рис. 2.33

ные размеры которого и способ построения показаны на рисунке. Пусть A, B, C — точки, делящие пополам соответствующие полуокружности. Докажите, что $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S} = \pi$.

(*Березин В.Н.* Луночки Гиппократа // Квант. 1971. № 5. С. 17–21).

7. *Золотым кубоидом* называют прямоугольный параллелепипед с ребрами $\Phi, 1, \dfrac{1}{\Phi}$, где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — число Фидия (см. «Число π и золотое сечение», глава 3). Пусть S_k — площадь поверхности золотого кубоида, а S — площадь описанной около него сферы. Докажите, что $\dfrac{S}{S_k} = \dfrac{\pi}{\Phi}$.

(*Савин А.П.* Замечательные числа // Квант. 1987. № 4. С. 33)

8. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Рассмотрим полусферу с полюсом O и разделим ее экватор на n равных частей. Площадь полусферы в n раз больше площади каждого из маленьких сферических треугольников, изображенных на рис. 2.34. Рассмотрим такой треугольник. Его основание равно $\dfrac{2\pi R}{n}$, а высота стремится к $\dfrac{\pi R}{2}$ при $n \to \infty$. Следовательно, его площадь стремится к $\dfrac{\pi^2 R^2}{2n}$, поэтому площадь полусферы равна $n \cdot \dfrac{\pi^2 R^2}{2n} = \dfrac{\pi^2 R^2}{2}$, а площадь сферы — $\pi^2 R^2$.

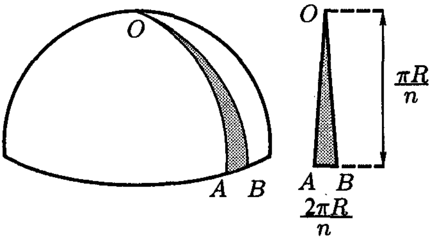


Рис. 2.34

(*Дубов Я.С.* Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1955. С. 58).

9. Два прямых круговых цилиндра пересекаются под прямым углом (рис. 2.35). Радиусы обоих цилиндров равны единице. Чему равен объем фигуры, образованной пересечением цилиндров?

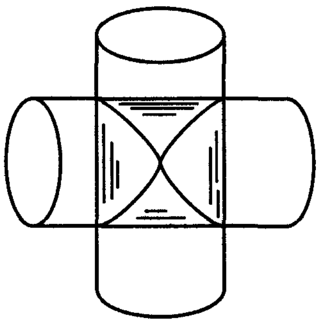


Рис. 2.35

10. Рассмотрим плоскую пластину, составленную из бесконечного числа специально подобранных прямоугольников (рис. 2.36). Пусть n — ый по счету прямоугольник имеет длину 2^{n-1} и ширину 2^{1-n} сантиметров, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Та-

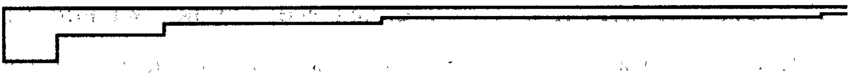


Рис. 2.36

ким образом, площадь всей пластины, состоящей из бесконечного числа прямоугольников фиксированной площади 1 см^2, бесконечна. Следовательно, для ее окрашивания потребуется бесконечное количество краски. С другой стороны, рассмотрим систему цилиндров (рис. 2.37), полученную в результате вращения пластины вокруг ограничивающего ее луча. Для цилиндра с номером n имеем $r_n = 2^{1-n}$ см, $h_n = 2^{n-1}$ см, поэтому его объем $V_n = \pi \cdot 2^{1-n}$ см^3, а объем всей системы цилиндров

$$V = \pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = 2\pi \text{ см}^3.$$

Залив в систему 2π см^3 краски, погрузим в нее пластину. Она окрасится, причем даже не с одной, а с двух сторон!

Где же была допущена ошибка?

(*Панов А.А.* Малярный парадокс // Квант. 1986. № 8. С. 13).

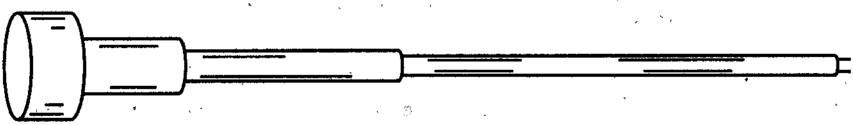


Рис. 2.37

11. Известно, что за площадь сферы принимается производная функции $V(R)$ по R:

$$S = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2.$$

Аналогичное определение можно дать и для площади боковой поверхности цилиндра: $S = (\pi R^2\ H)' = 2\pi RH$. Однако, если аналогичное определение дать площади боковой поверхности конуса, получится неверный результат:

$$\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)' = \frac{2}{3}\pi RH \neq \pi RL$$

$\left(\frac{2}{3}H \text{ совсем не обязательно равно } L\right)$.

Почему так?

(*Смоляков А.* Почему так? // Квант. 1982. № 8. С. 59)

Математический аккомпанемент

1. а) Эта задача, пожалуй, может считаться рекордсменкой по числу публикаций в популярных изданиях, что, впрочем, не мешает ей числиться рекордсменкой по числу неверных решений, предлагаемых читателями. В обоих случаях удлинение радиуса обруча равно $\frac{1}{2\pi}$ метра.

б) Данный вариант классической задачи предложил профессор Анатолий Дмитриевич Мышкис на одной из своих лекций. Вопреки нашей интуиции, ответ в этой задаче довольно неожиданный.

Введем обозначения, показанные на рис. 2.38: $AB = a$; $AD = h$; $OB = OD = R \approx 6371\,000$ м (средний радиус Земли), длину дуги BC обозначим l, $\angle AOB = \alpha$.

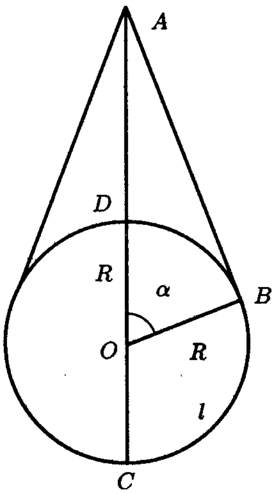


Рис. 2.38

Из условия задачи следует, что $a + l = \frac{2\pi R + 1}{2}$, откуда

$$\frac{l}{R} = \pi + \frac{1}{2R} - \frac{a}{R} \qquad (*)$$

Кроме того, $\frac{l}{R} = \pi - \alpha$, откуда

$$\operatorname{tg}\frac{l}{R} = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{R}.$$

С учетом (*) отсюда получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{a}{R}.$$

Воспользовавшись первыми членами разложения функции $\operatorname{tg} x$ в *ряд Тейлора*:

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3},$$

последнее соотношение запишем так:

$$\frac{a}{R} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{R} - \frac{1}{2R}\right)^3 \approx \frac{a}{R}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{R} - \frac{1}{2R}\right)^3 \approx \frac{3}{2R}.$$

Пренебрегая малым слагаемым, отсюда получаем

$$\frac{a}{R} \approx \sqrt[3]{\frac{3}{2R}}. \qquad (**)$$

Гипотенузу OA из прямоугольного треугольника OAB найдем по теореме Пифагора:

$$OA = R\left[1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Воспользовавшись первыми разложениями функции $(1+x)^p$ в ряд Тейлора: $(1+x)^p \approx 1 + px$, последнее выражение запишем так:

$$OA \approx R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right],$$

а привлекая (**), отсюда выводим

$$OA \approx R + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}R}.$$

Итак, расстояние, на которое оттягивается канат от поверхности земли, приблизительно равно

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}R} \approx 120 \text{ метров}.$$

2. Суммы длин у верхних и нижних полуокружностей одинаковы и равны $\frac{\pi l}{2}$, где l — длина отрезка AB.

3. Естественно предположить, что в лесу растут деревья, стволы которых у основания имеют цилиндрическую форму. Тогда для прокладки кабеля между двумя точками A и B, расстояние между которыми равно l, достаточно взять моток проволоки длиной $\frac{\pi l}{2}$. Покажем это.

Там, где прямая AB пересекает контур какого-либо дерева, провод следует пустить по меньшей из двух дуг окружности, ограничивающей сечение ствола перпендикулярной стволу плоскостью. Если диаметры пересекающих линию AB деревьев равны $d_1, d_2, \ldots, d_n$, то сумма длин указанных дуг не больше, чем

$$\frac{1}{2}\pi(d_1 + d_2 + \ldots + d_n) \leqslant \frac{1}{2}\pi l.$$

Если $AB = 1$ км, то связисту достаточно взять с собой моток проволоки длиной 1,6 км.

4. Обозначим p толщину ленты. После того, как на правую катушку намотается лента длиной x, площадь левой катушки уменьшится на величину xp и станет равной $\frac{\pi D^2}{4} - xp$. В этот момент ее радиус

$$r_1 = \sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{xp}{\pi}},$$

соответственно радиус второй катушки

$$r_2 = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{xp}{\pi}};$$

расстояние между катушками

$$f(x) = l - \left(\sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{xp}{\pi}} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{xp}{\pi}}\right).$$

Наименьшее значение функция $f(x)$ принимает при

$$x = \frac{\left(D^2 - d^2\right)\pi}{8p},$$

в чем можно убедиться, исследовав ее производную

$$f'(x) = \frac{p}{2\pi}\left[\left(\frac{D^2}{4} - \frac{xp}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{d^2}{4} + \frac{xp}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

В этой точке $f_{\min}(x) = l - \sqrt{\dfrac{D^2 + d^2}{2}}$.

«Следовательно, если величина l больше, чем $\sqrt{\dfrac{D^2 + d^2}{2}}$, то магнитофонную ленту удастся прослушать, а если нет — то увы...» (А. П. Савин).

5. Ответ:

$$AF = \sqrt{\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{6} + \sqrt{6\sqrt{6} - 9}\right)} = 1{,}5711995\ldots,$$

при этом $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}570796\ldots$

8. Никакой сферический треугольник не может быть развернут на плоскость, поскольку у него два прямых угла.

9. Эта задача может быть решена остроумным способом, предложенным итальянским математиком Бонавентурой Кавальери (1598–1647) (способ восходит еще к Архимеду). Рассмотрим шар радиуса 1 с центром в точке пересечения осей цилиндров. Любое сечение плоскостью шара и общей части цилиндров, параллельной их осям, дает квадрат, описанный около круга (рис. 2.39). Для любого такого сечения отношение площадей квадрата и круга равно $\dfrac{4}{\pi}$. Значит, таким же будет и отношение объемов общей части цилиндров и шара (объем шара равен «сумме» всех круговых сечений, а объем общей части цилиндров — «сумме» всех квадратов). Поскольку объем шара равен $\dfrac{4}{3}\pi$, то объем искомого тела равен $\dfrac{16}{3}$.

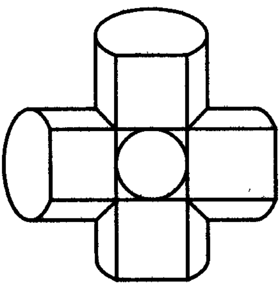


Рис. 2.39

10. Несмотря на то, что тело конечного объема получено вращением плоской фигуры бесконечной площади, парадокса в этом нет (хотя факт, конечно, удивительный). Разница в ответах получается из-за того, что в первом случае окраска пластины предполагается равномерным слоем (и тогда, конечно же, потребуется бесконечное количество краски), а во втором случае толщина слоя краски по мере уменьшения толщины цилиндра убывает.

11. Для конуса за площадь боковой поверхности необходимо принять предел отношения приращения объема конуса к приращению боковой высоты h (см. рис. 2.40). Поскольку

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{1}{3}\frac{\pi h^3}{\sin^2\alpha\cos\alpha},$$

то

$$S(h) = \pi \cdot \frac{h^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha} = \pi RL,$$

где

$$L = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

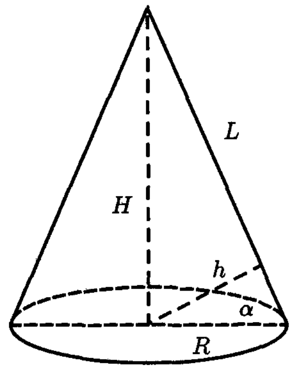


Рис. 2.40

Идея определения площади поверхности через предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{V(\delta)}{\delta}$, где $V(\delta)$ — объем так называемой δ-окрестности тела (слоя, «окутывающего» поверхность и имеющего постоянную толщину δ) принадлежит немецкому физику и математику Герману Минковскому (1864–1909). Подробно об этом можно прочитать, например, в статье [Дуб].

Глава 3

В МИРЕ ЧИСЕЛ

Пусть ветер унесет листвы златые числа...

Владимир Казаков. От головы до звезд

§ 25. π в коллективе целых чисел

Что было однажды —
Случится и дважды
А может, и трижды
А может, и π-жды.

Из иррационального числа π можно получить целое число 3, если воспользоваться операцией выделения целой части числа — так называемой функцией *антье* (от французского entier — *целый*). Целая часть числа x записывается $[x]$ и выражает наибольшее целое число, которое не превосходит x. Таким образом, $[\pi] = 3$.

Несколько сложнее придумать выражения, которые из числа π с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня и функции антье позволяют получать другие целые числа. Известный популяризатор науки Мартин Гарднер в книге [Гар], с. 43, приводит рекордные результаты, содержащие наименьшее количество используемых чисел π и указанных математических операций:

1: $[\sqrt{\pi}]$;	2: $-[-\sqrt{\pi}]$;	3: $[\pi]$;
4: $-[-\pi]$;	5: $[\pi \times \sqrt{\pi}]$;	6: $[\pi + \pi]$;
7: $[\pi^{\sqrt{\pi}}]$;	8: $-[-\pi] - [-\pi]$;	9: $[\pi \times \pi]$;
10: $-[-\pi \times \pi]$;	11: $[(-[-\pi])^{\sqrt{\pi}}]$;	12: $[-\pi \times [-\pi]]$;
13: $-[\pi \times [-\pi]]$;	14: $[[\pi] \times (\pi + \sqrt{\pi})]$;	15: $[\pi] \times [\pi \times \sqrt{\pi}]$;
16: $[-\pi] \times [-\pi]$;	17: $[\pi \times \pi \times \sqrt{\pi}]$;	18: $[\pi] \times [\pi + \pi]$;
19: $[\pi \times (\pi + \pi)]$;	20: $\left[\dfrac{\pi^{\pi}}{\sqrt{\pi}}\right]$.	

В некоторых случаях количество знаков числа π можно уменьшить, если дополнительно использовать другие математические операции.

Например, привлекая знак модуля и знак факториала, число 10 можно выразить с помощью одного единственного знака π:

$$10 = \left[\sqrt{\left|\left[-\sqrt{|[-\pi]|!}\right]\right|!}\right]. \tag{1}$$

Задача представления целых чисел с помощью знаков числа π родственна другой известной задаче, приписываемой английскому физику Полю Дираку (1902-1984) [Мал]: как представить любое целое число двойками и математическими знаками?

Оказывается, это можно сделать так:

$$0 = \log_2(\log_2 2);$$

$$\pm 1 = \mp \log_2 \left(\log_2 \sqrt{2}\right);$$

$$\pm 2 = \mp \log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt{2}}\right) \quad \text{и так далее.}$$

Совершенно очевидно, что вместо двойки здесь может быть использовано число 10:

$$0 = \lg(\lg 10);$$

$$\pm 1 = \mp \lg \left(\lg \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}\right);$$

$$\pm 2 = \mp \lg \left(\lg \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}_{7\ \text{корней}}\right) \quad \text{и так далее.}$$

Мы приходим к замечательному выводу: если в каждом таком представлении число 10 заменить на равносильное ему выражение (1), то в итоге любое целое число выразится с помощью одного-единственного знака π!

(М. Е. Апозян) Докажите тождества:

а) $\cos 3 = -\cos\{\pi\}$;

б) $\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} = \sin 1$,

здесь фигурными скобками обозначена дробная часть числа: $x = [x] + \{x\}$.

Математический аккомпанемент

а) $\cos 3 = \cos[\pi] = -\cos(\pi - \{\pi\}) = -\cos\{\pi\}$.

б) $\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \left[\dfrac{\pi}{2}\right]\right) = \sin\left[\dfrac{\pi}{2}\right] = \sin 1$.

§ 26. Предпочтительные числа и приближение числа π

Глаз не хмуря,
Огляните чисел лом.
Ведь уже трепещет буря,
Полупоймана числом

Велимир Хлебников. Зверь + число

С 1957 года в нашей стране действует государственный стандарт (ГОСТ 8032–56), рекомендующий при введении новых количественных характеристик изделий промышленности придерживаться *предпочтительных чисел* [Ник]. Так называются округленные значения чисел вида $10^{k/n}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, n — натуральное. Например, при $n = 5$ получаем ряд рекомендуемых ГОСТом предпочтительных чисел 1,00; 1,60; 2,50; 4,00; 6,30, а при $n = 10$ — ряд 1,00; 1,25; 1,60; 2,00; 2,50; 3,15; 4,00; 5,00; 6,30; 8,00. Данному стандарту следуют, например, мощности электрических лампочек, продаваемых в магазинах электротоваров: 25 w; 40 w; 60 w; 100 w; 150 w — это слегка подправленный первый ранее выписанный ряд.

В чем преимущества предпочтительных чисел? Если отказаться от слишком высоких требований к точности вычислений, то можно считать, что произведение предпочтительных чисел также является предпочтительным числом (при умножении чисел вида $10^{k/n}$ в результате получается число такого же вида). Поэтому предпочтительными будут площади (объемы) прямоугольников (параллелепипедов), если только их размеры выражены предпочтительными числами.

Хорошо, а какое отношение к предпочтительным числам имеет герой нашего повествования — число π?

Самое непосредственное. Среди предпочтительных чисел указанного ранее второго ряда есть число $3{,}15 \approx 10^{5/10} = \sqrt{10}$. Это приближение числа π, известное еще древнеиндийскому математику Брахмагупте (р. 598 г.). Близость числа π к коллективу предпочтительных чисел гарантирует, что площадь круга и объем цилиндра с радиусами предпочтительной величины также будут (в некотором приближении) предпочтительными числами.

(П. Сальников) Не пользуясь таблицами, докажите равенство:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

Математический аккомпанемент

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \frac{\lg 2}{\lg \pi} + \frac{\lg 5}{\lg \pi} = \frac{1}{\lg \pi} > \frac{1}{\lg \sqrt{10}} = 2.$$

---

§ 27. Числа π и e

В «пи» цифры не пересчитать,
«е» бесконечно столь же.
А если их с конца писать,
какое будет больше?

[Гар], с. 61

Профессор: *«Ваш ответ заслуживает оценки где-то между е и π».*

Случай на экзамене

В редакции научно-популярных журналов постоянно приходят письма, в которых читатели делятся своими находками таинственной связи между числами π и e:

> «Здравствуй, „Квант"!» — пишет ученнк 10 класса из города Дюртюш Сергей Р. в редакцню физнко-математнческого журнала для школьннков и студентов. — «На днях, балуясь на своем микрокалькуляторе „Электроника МК-60", мне удалось составить удивительно красивую комбинацию чисел π н e:
>
> $$e^6 = \pi^5 + \pi^4.$$
>
> Надеюсь, что вы отклнкнетесь на мою формулу».

Из ответа редакции:

> «Сначала мы посчитали левую и правую часть на микрокалькуляторе и получнли 403,428775 и 403,428793. Затем посчнтали то же самое на компьютере IBM / AT н получили 403,42897 и 403,42893»
>
> (Квант. 1991. № 7. С. 54).

Проверьте, что $e^6 > \pi^4 + \pi^5$. При каком наибольшем натуральном n выполняется неравенство $e^6 - \pi^4 - \pi^5 < 10^{-n}$? Числа π и e даны с 15 точными знаками после запятой:

$e = 2{,}718281828459045\ldots$, $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$

(XI Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1985 г.)

Еще одно письмо в упоминавшийся выше журнал (Квант. 1992. №7. С. 72). В редакцию пишет Фирдаус Шафигуллин:

«Высылаю вам два бесконечных ряда, сочиненных мной интуитивно. Вычисляя ряды на калькуляторе МК-51, я доходил до погрешности 10^{-7} для обоих рядов и получал число π. Однако прошу проверить результат на ЭВМ.

$$\pi = 2 + \left(\ln\sqrt{e^{1/e} + \sqrt{e^{1/e} + \sqrt{e^{1/e} + \ldots}}}\right)^{-1/4},$$

$$\pi = 2 + \left(\ln\left(1 + \sqrt{e^{1/e} - \sqrt{e^{1/e} - \sqrt{e^{1/e} - \ldots}}}\right)\right)^{-1/4}.$$ »

Первое, что сделали в редакции, это освободились от необходимости рассматривать в первом выражении бесконечную последовательность под знаком логарифма. Обозначив это число через x, получаем $x = \sqrt{e^{\frac{1}{e}} + x}$, откуда

$$x = \frac{\sqrt{4e^{1/e} + 1} + 1}{2}.$$

Аналогично вычисляется последовательность корней во втором выражении, она равняется

$$\frac{\sqrt{4e^{1/e} + 1} - 1}{2}.$$

Таким образом, в обоих выражениях под знаком логарифма (и, следовательно, в правых частях равенств) стоят одинаковые числа. Дальнейшее сравнение числа $\pi = 3{,}141592653589\ldots$ со значением выражения

$$2 + \left(\ln\frac{\sqrt{1 + 4e^{\frac{1}{e}}} + 1}{2}\right)^{-1/4} = 3{,}141592758733\ldots$$

уже не вызывает трудностей и показывает приближенный характер найденных Фирдаусом Шафигуллиным равенств.

Следующее письмо А. Ямпольского опубликовано в журнале «Наука и жизнь», 1983, 3, с. 150:

« **Неожиданности в области иррациональных чисел**

Иррациональные числа π и e оказываются связанными между собой далеко не очевидными и довольно неожиданными зависимостями.

$$\pi^e = e^\pi,$$

$$\pi \cdot e^2 = e^\pi,$$

$$\frac{\pi^2 + e^2}{\pi^3 - e^3} = \frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{\sqrt{\pi^\pi} + \sqrt{e^e}} = \pi.$$

Кроме того, число π связано с некоторыми физическими величинами, например, $\pi^2 = g$ (с точностью до 0,6%, где g — ускорение свободного падения). Может быть, читателям удастся найти и другие интересные закономерности?»

Конечно, встретить точные равенства на том месте, где должны стоять приближенные — довольно неожиданно (с доводами изумившихся читателей редакция журнала «Наука и жизнь» согласилась в одном из следующих номеров).

Приближенное равенство, связывающее число π и константу земного тяготения g, указанное А. Ямпольским, для многих также представляется забавным курьезом. Однако оно имеет под собой серьезную естественно-научную подоплеку — об этом будет рассказано в главе «Число π и наука о природе».

Докажите неравенство

$$e^\pi > \pi^e$$

(В. Дроздов) Убедитесь в справедливости равенств:

$$[\pi] + [\pi^e] = [e] + [e^\pi];$$

$$[\pi]^{[e]} + [e] = [e]^{[\pi]} + [\pi];$$

$$2\pi + e \approx [\pi]^2.$$

Математический аккомпанемент

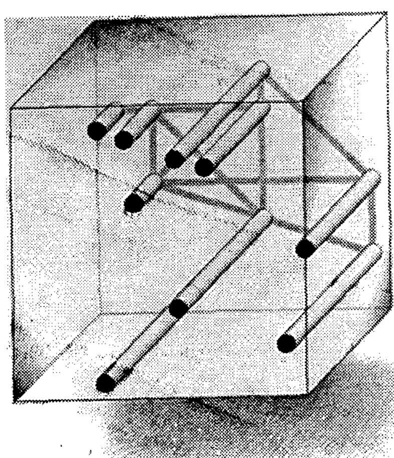
При $x > e$ функция $f(x) = x - e\ln x$ имеет положительную производную $f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} > 0$ и, следовательно, на интервале (e, ∞) она является возрастающей. Поскольку $f(e) = 0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$, $f(x) > 0$ при $x > e$. Требуемый результат выводится из неравенства $f(x) > 0$, если положить в нем $x = \pi$.

§ 28. Числа π и e — объекты искусства

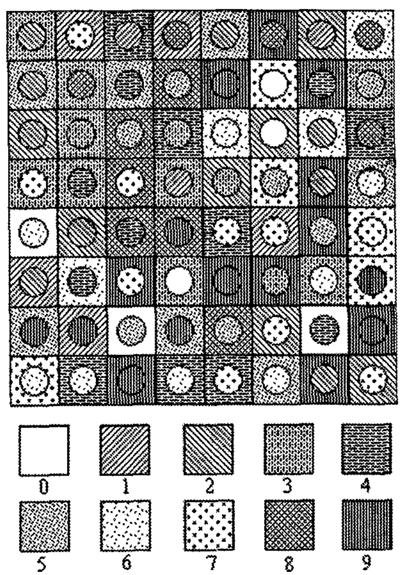
Панкин А. Ф. «Геометрия взаимодействия чисел π и e в трехмерном пространстве», 2001 г.

Числа π и e привлекли внимание московского художника, члена Союза Архитекторов России и профессионально-технического союза художников России и Международной Федерации Художников Александра Федоровича Панкина (р. 1938). Ниже приведены некоторые из его произведений, героями которых выступают знаменитые математические константы. В основе всех трех композиций лежит единый замысел, выражающий четкие количественные зависимости (какие именно?). По номинации итальянского журнала «LUXURY Style of life» Александр Федорович Панкин получил титул «Александр π».

(Изобразительные материалы публикуются с разрешения автора).



Панкин А. Ф. «Метафизический объект», 2000 г.



Рисунок, выполненный с картины А. Ф. Панкина «Взаимодействие чисел π и e в двумерном пространстве», 2000 г.

§ 29. π помогает вычислять факториалы

Ведь Поэзия, Кричалки — это не такие вещи, которые вы находите, когда хотите, это вещи, которые находят на вас.

А. Милн. Винни-Пух и все-все-все

Рассказывают, однажды на экзамене абитуриента попросили привести выражение для биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

получающихся при степенях x в разложении бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Заглянув в шпаргалку и набрав побольше воздуха, абитуриент закричал:

— Эн! Разделить на Ка! И на Эн минус Ка!

— Тише, почему вы так кричите? — Изумился экзаменатор.

— Ну как же, здесь же расставлены восклицательные знаки... Обозначение $n!$ для произведения последовательных натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ предложил в 1808 году немецкий математик К. Крамп. С тех пор такая сокращенная запись традиционно применяется во многих математических формулах. Произведение последовательных натуральных чисел по предложению Л. Арбогаста (1800) именуют также *факториалом* (от латинского factor — *делающий, производящий*). Таким образом, сокращенную запись для биномиального коэффициента

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

можно представить в развернутом виде:

$$C_n^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k))} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Одна из изумительных формул, связывающих $n!$ и π, принадлежит английскому математику Джеймсу Стирлингу (1616–1703):

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

при больших значениях n или

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1.$$

Для ознакомления с доказательством этой формулы отсылая к стандартным курсам математического анализа (см., например, [Фих], т. 2, с. 369–371), заметим, что по формуле Стирлинга очень удобно вычислять факториалы больших чисел. Относительная ошибка вычисления факториала при этом имеет величину порядка $\frac{1}{12n}$. Более точную зависимость рассчитал французский математик Пьер Симон Лаплас (1749–1817) в 1812 году:

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5\,184n^3} - \frac{571}{2\,488\,320n^4} + \ldots\right)$$
$$\text{при} \quad n \to \infty.$$

Леонард Эйлер (1707–1783) ввел в рассмотрение функцию $\Gamma(x)$ (*гамма-функция Эйлера*), в некотором смысле обобщающую понятие факториала. При натуральном значении аргумента $x = n$ гамма-функция принимает значение $\Gamma(n) = (n-1)!$ (по определению полагается $0! = 1$). Если x — не целое число, то значения гамма-функции удовлетворяют функциональному уравнению

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

откуда, в частности, следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

В общем случае гамма-функция задается равенством (формула Вейерштрасса):

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx} \cdot \left(1 + \frac{x}{1}\right) \cdot e^{-\frac{x}{1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdot e^{-\frac{x}{3}} \cdot \ldots,$$

в которую входит не только знаменитое число e, но и так называемая *постоянная Эйлера*

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}577215664901532\ldots$$

Существуют и другие способы определения гамма-функции [Фих].

Любопытная связь между факториалами натуральных чисел и числом π задается формулой, эквивалентной формуле Валлиса (см. *Формула Валлиса*):

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \qquad (*)$$

Для ее вывода запишем формулу Валлиса в виде

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2\cdot(2n+1)}\cdot\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}{1\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n!)]^2\cdot(2n+1)},$$

откуда непосредственно следует (*).

§ 30. Удивительное решето

Хотите, я назову ряд чисел?.. Вы странно смотрите. Ряд назван, а вы молчите...

Владимир Казаков. Ряды

Игорь Федорович Акулич — известный автор занимательных задач и математических сюжетов, неоднократно публиковавшихся в журнале «Квант». В статье «Ум хорошо, а пять — лучше» (Квант. 1998. № 6. С. 10–16) он рассказывает о своих вычислительных экспериментах на компьютере Pentium и делится интересными наблюдениями над следующим рядом чисел.

Выпишем последовательные числа натурального ряда: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ Вооружимся ластиком и начнем стирать некоторые числа по определенному правилу. Сначала сотрем все числа, стоящие на четных местах (то есть все четные числа). После этой операции получится последовательность

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$$

В новой последовательности сотрем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на три. Получим:

$$1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, \ldots$$

Потом сотрем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 4:

$$1, 3, 7, 13, 15, 19, 25, \ldots$$

И так далее. В итоге образуется последовательность, начинающаяся числами

$$1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, \ldots \quad (1)$$

Обозначим ее $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

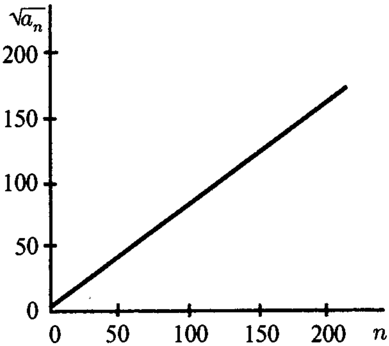


Рис. 3.1

На рис. 3.1 показан график зависимости величины $\sqrt{a_n}$ от n. Построив его, Игорь Федорович пишет:

«Теперь можно вполне уверенно предполагать, что a_n с ростом n асимптотически приближается к kn^2. Что ж, дело за малым — найти k. Сначала, конечно, вычислим его с возможно большей точностью. Запускаем программу...Готово! Получаем $k = 0{,}785398\ldots$ Господи, что же это? Проницательный читатель уже догадался, а остальные пусть умножат на 4. О ужас — получается π! Это почище золотого сечения! Такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря о любителе математики».

О некоторых свойствах последовательности (1), получившей в математической литературе название «решето Фабиуса», можно прочитать в статье [Баа], а также в [Act].

§ 31. Число π и «золотое сечение»

Высоко над ним стояли числа, опираясь на рукояти из звезд.

Владимир Казаков. От головы до звезд

Золотое сечение, или *золотая пропорция*, — деление отрезка на две неравные части так, что длина большей части превышает длину меньшей части ровно во столько раз, во сколько раз весь отрезок превышает длину большей части. Если обозначить длину большей части через a, а длину меньшей — через b, то золотая пропорция запишется:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \qquad (1)$$

Пусть $x = \frac{a}{b}$, тогда из (1) получаем равенство $x = 1 + \frac{1}{x}$ или $x^2 - x - 1 = 0$.

Больший 1 корень последнего уравнения равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Это число часто обозначают буквой Φ — в честь древнегреческого скульптора

Фидия (нач. V в. до н. э. – ок. 431 до н. э.), применившего золотую пропорцию при проектировании всемирно известного храма Афины «Парфенон» (рис. 3.2).

Принципы золотого сечения положены в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства, главным образом архитектуры античности и эпохи Возрождения. Леонардо да Винчи (1452–1519) находил число Φ в пропорциях человеческого тела, а немецкий ученый Цейзинг, исследовав в середине XIX века тысячи человеческих тел, пришел к выводу, что золотое сечение занимает важнейшее место в системе пропорциональных отношений отдельных частей тела хорошо слаженного человека. Золотому сечению посвящена обширная литература. (См., например, [Вас], [Бен], [Шев], [Кор]).

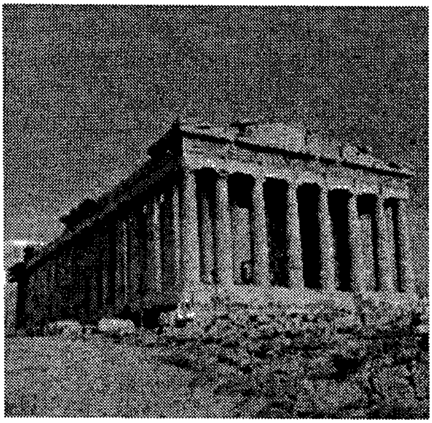


Рис. 3.2

Число Φ обладает любопытными математическими свойствами:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi};$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}; \qquad \Phi = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \ldots}}}};$$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}; \qquad \Phi = 2 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 + \ldots}}}.$$

Число Φ является пределом при $n \to \infty$ отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ двух смежных членов *последовательности Фибоначчи* (см. «π и числа Фибоначчи»).

В 1957 году американский математик Дж Бергман построил систему счисления, названную им «системой счисления с иррациональным основанием типа золотой пропорции». В этой системе любое натуральное число представимо в виде суммы степеней числа Φ:

$$1 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2}; \qquad 2 = \Phi + \Phi^{-2};$$
$$3 = \Phi^{2} + \Phi^{-2}; \qquad 4 = \Phi^{2} + \Phi^{0} + \Phi^{-2};$$
$$5 = \Phi^{3} + \Phi^{-1} + \Phi^{-4}; \ldots$$

Дж. Бергман отнесся к своему результату как к курьезу, непригодному для практического применения. Однако вскоре выяснилось, что система счисления с основанием Φ может быть с успехом использована для повышения помехоустойчивости вычислительной техники [Ста].

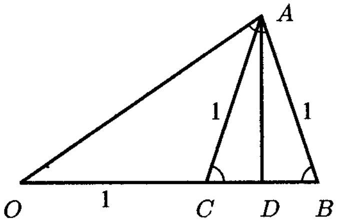


Рис. 3.3

Числа π и Φ между собой тесно связаны. Эта связь вытекает из того факта, что число Φ равно радиусу окружности, описанной около правильного десятиугольника с длиной стороны 1. Покажем это. Сторона $AB(AB = 1)$ такого десятиугольника видна из центра O описанной окружности под углом $36°$ (рис. 3.3). Проведем отрезок AC, $AC = AB$, точка C принадлежит OB. Тогда, в силу равенства углов

$$\angle ABO = \angle OAB = \angle ACB = 72°,$$

получаем

$$\angle OAC = \angle COA = 36° \quad \text{и} \quad OC = AC = AB = 1.$$

Пусть $OA = OB = x$. Так как треугольник AOB подобен треугольнику CAB, то $\frac{OA}{AB} = \frac{AC}{CB}$, или $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$. Положительное решение полученного уравнения совпадает с золотой пропорцией Φ.

Поскольку периметр такого десятиугольника с хорошей точностью приближает длину окружности, то $2\pi\Phi \approx 10$, или $\pi\Phi \approx 5$. Точную связь чисел π и Φ найдем из прямоугольного треугольника ADO:

$$\cos\angle AOD = \frac{OD}{OA} = \frac{\Phi}{2}.$$

Поскольку $\angle AOD = \frac{\pi}{5}$, то $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$.

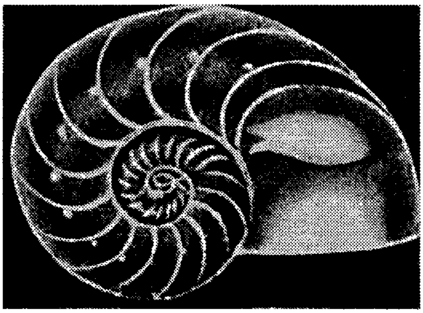


Рис. 3.4

О гармоническом союзе констант Φ и π свидетельствуют факты иного рода. Так, для величественного памятника Древнего Египта пирамиды Хеопса с высокой точностью выполняются соотношения [Вас]:

$$\frac{2H}{L} \approx \Phi, \quad \frac{2L}{H} \approx \pi,$$

здесь L — длина основания, а H — высота пирамиды. Закон роста красивейшей раковины Nautilus (рис. 3.4) описывается уравнением золотой спирали [Шев]:

$$R = \sqrt{\Phi} e^{\alpha \frac{2 \ln \sqrt{\Phi}}{\pi}},$$

объединяющей в прекрасный букет несколько замечательных констант Φ, e и π!

Оказывается, по закону золотой спирали построена композиция гравюры итальянского графика Маркантонио Раймонди (ок. 1480 – ок. 1534) «Избиение младенцев» (рис. 3.5). Об этом на страницах журнала «Квант» рассказал А. И. Прохоров [Про]. Свою гравюру Маркантонио Раймонди выполнил по эскизу знаменитого Рафаэля (1483–1520).

Рис. 3.5

Золотая спираль берет начало в смысловом центре композиции — «...точке, где пальцы воина сомкнулись вокруг лодыжки ребенка, — вдоль фигур ребенка, женщины, прижимающей его к себе, воина с занесенным мечом и затем вдоль фигур такой же группы в правой части эскиза» [Про]. Разворот спирали подчеркивают такие элементы композиции, как «арка моста, идущая от головы женщины, — в левой части композиции и лежащее тело ребенка — в ее центре» [Про]. Если золотое сечение вызывает у зрителя ощущение гармонии, то спираль — напротив, вызывает ощущение динамики и волнения.

§ 32. π и число «счастливых» билетов

— Здесь, наверху, все ни на что не похоже, — сказал Малыш, когда Карлсон приземлился с ним на крылечке своего дома.
— Да, к счастью, — ответил Карлсон.

Астрид Линдгрен. Карлсон, который живет на крыше, опять прилетел

«Я ехал в трамвае по Ленинграду со своим племянником Мишей» — так невинно начиналась адресованная младшим школьникам статья А. П. Савина и Л. М. Финка в седьмом номере журнала «Квант» за 1975 год [Сав], невольно вызвавшая волну публикаций со ссылками на функциональный анализ, аналитическую теорию чисел и вещественную алгебраическую геометрию [Фин], [Бол], [Гур], [Инт], [Сно].

Во всем «виноват» оказался мальчик Миша, потребовавший себе счастливый билет, то есть билет с шестизначным номером, сумма первых цифр которого совпадает с сумой трех остальных. Сразу разгорелся спор — как часто встречаются такие билеты, или сколько существует «счастливых» шестизначных чисел от 000 000 до 999 999. Разговор в трамвае с мальчиком Мишей закончился оценкой количества C счастливых билетов: $1\,000 < C < 90\,910$. Было указано также, что на самом деле $C = 55\,252$, но вычислить это число «на ходу» не представлялось возможным.

Конечно же, количество счастливых билетов можно определить простым перебором всех чисел от 0 до 999 999 (это, кстати, и предлагал сделать мальчик Миша), но кому, кроме компьютера, интересно заниматься такой рутинной работой? В следующей публикации [Фин] появилась удобная формула, облегчающая подсчет:

$$C_n(k) = C_{n-1}(k) + C_{n-1}(k-1) + \ldots + C_{n-1}(k-9). \qquad (1)$$

Здесь $C_n(k)$ — количество n-значных номеров, сумма цифр каждого из которых равна k; $0 \leqslant k \leqslant 9n$. Естественно, $C_1(k) = 1$, если $0 \leqslant k \leqslant 9$ и $C_1(k) = 0$ при других значениях k. Кроме того, $C_n(0) = 1$. Этих данных вполне достаточно, чтобы, отправляясь от известных значений $C_1(0), C_2(0), C_1(k)$, по формуле (1) последовательно вычислить $C_2(k), C_3(k)$. Тогда число счастливых билетов можно найти по формуле

$$C = [C_3(0)]^2 + [C_3(1)]^2 + [C_3(2)]^2 + \ldots + [C_3(27)]^2. \qquad (2)$$

Этот подсчет уже несложно выполнить и вручную.

Устанавливается соотношение (1) простыми комбинаторными соображениями: n-значные номера с суммой цифр, равной k, получаются из $(n-1)$-значных номеров с суммой цифр, равной k, добавлением цифры «0», из $(n-1)$-значных номеров с суммой цифр, равной $k-1$, добавлением цифры 1, и т. д. Поскольку количество трехзначных чисел с суммой цифр k равно $C_3(k)$, то из них, как из половинок, можно составить $[C_3(k)]^2$ шестизначных номеров счастливых билетов с суммой цифр k. Отсюда получается формула (2).

В замечательной книге Наума Яковлевича Виленкина «Популярная комбинаторика» [Вил] из других комбинаторных соображений выводится формула

$$C = -C_{-6}^{27} + C_6^1 C_{-6}^{17} - C_6^2 C_{-6}^{7} = 55\,252.$$

Здесь так называемые *обобщенные комбинаторные коэффициенты* C_α^k определяются равенствами

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}.$$

Имеются и другие расчетные соотношения (см., например, [Бол], [Гур]). Но наиболее впечатляющей, конечно, оказалась формула для количества C счастливых билетов, в которой используется число π:

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin 10t}{\sin t}\right)^6 dt \tag{3}$$

Ее нашли читатели журнала «Квант» М. Мнацаканян, А. Меликян и Р. Айдагулов [Инт]. В этой замечательной формуле число 6 показывает, что вычисляется количество *шестизначных* счастливых билетов, а число 10 указывает на *десятичную* систему счисления. Интеграл можно вычислить по какой-нибудь приближенной формуле, например,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt \approx \frac{1}{n}\big(f(t_1)+f(t_2)+\ldots+f(t_n)\big), \tag{4}$$

где $f(t)=\left(\dfrac{\sin 10t}{\sin t}\right)^6$, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — точки деления интервала $(0,\pi)$ на n равных отрезков: $t_k = t_0 + \dfrac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

С публикацией формулы (3) сюрпризы не кончились. Читатели «Кванта» Г. А. Гальперин и А. В. Корлюков [Сно] неожиданно обнаружили, что равенство (4) при любом $n \geqslant 28$ и любом t_0 на самом деле не приближенное, а точное! (Для билетов длины $2S$ и p-ичной системы счисления равенство (4) точное при $n \geqslant 1+S(p-1)$, при этом $f(t) = \left(\dfrac{\sin pt}{\sin t}\right)^{2S}$). Это наблюдение, как заметили в редакции журнала «Квант», открывает дополнительные возможности для вывода интересных соотношений.

Зададимся длиной билета $2(S = 1)$ в десятичной ($p = 10$) системе счисления и выберем $n = 10$ точек на интервале $(0, \pi)$: $\dfrac{\pi}{20}, \dfrac{3\pi}{20}, \ldots, \dfrac{19\pi}{20}$. Поскольку неравенство $n \geqslant 1 + S(p-1)$ в данном случае выполняется, то для числа C счастливых билетов справедлива формула:

$$C = \frac{1}{10}\left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{20}} + \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{2}}{\sin^2 \frac{3\pi}{20}} + \ldots + \frac{\sin^2 \frac{19\pi}{2}}{\sin^2 \frac{19\pi}{20}}\right).$$

Выведите из этого равенства тождество:

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{10}} = 12.$$

Математический аккомпанемент

Для вывода формулы (3) воспользуемся равенством (2). Сначала заметим, что

$$(1 + x + \ldots + x^9)^3 = C_3(0) + C_3(1)x + \ldots + C_3(27)x^{27}$$

(при разложении полинома $\left(x^{k_1} + x^{k_2} + \ldots + x^{k_m}\right)^n$ по степеням x коэффициентом при x^N оказывается число, выражающее число способов представления N в виде суммы n слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$).

Положим $x = e^{2it}$, где $i = \sqrt{-1}$, так что $x = \cos 2t + i \sin 2t$. Перейдя к новой переменной t, запишем:

$$\varphi(t) = 1 + x + \ldots + x^9 = 1 + e^{2it} + \ldots + e^{18it};$$

$$\psi(t) = \left[\varphi(t)\right]^3 = C_3(0) + C_3(1)e^{2it} + \ldots + C_3(27)e^{54it}.$$

Следовательно, $\psi(t)\psi(-t) = \sum\limits_{j=-27}^{27} a_j e^{j\cdot 2it}$ с некоторыми симметричными коэффициентами $a_m = a_{-m}$; $m = 1, 2, \ldots, 27$; причем константа a_0 равна числу $C = [C_3(0)]^2 + [C_3(1)]^2 + \ldots + [C_3(27)]^2$ счастливых билетов. Последнее замечание позволяет записать

$$\psi(t)\psi(-t) = \sum_{j=1}^{27} 2a_j \cos 2tj + C. \qquad (*)$$

Осталось убедиться в том, что

$$\psi(t)\psi(-t) = \left(\frac{\sin 10t}{\sin t}\right)^6. \tag{**}$$

Для доказательства последнего равенства воспользуемся формулами (вывод этих формул см., например, в [Шкл]):

$$\begin{gathered}\sin(\alpha) + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta) = \\ = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\beta}{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{n\beta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}, \\ \cos(\alpha) + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta) = \\ = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\beta}{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{n\beta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}.\end{gathered} \tag{***}$$

Эти формулы верны при $\beta \neq 2\pi m$; $m \in N$.

Имеем:

$$\varphi(t) = \frac{\sin 10t\cos 9t}{\sin t} + i\frac{\sin 10t\sin 9t}{\sin t};$$

$$\varphi(-t) = \frac{\sin 10t\cos 9t}{\sin t} - i\frac{\sin 10t\sin 9t}{\sin t};$$

$$\varphi(t)\cdot\varphi(-t) = \left(\frac{\sin 10t\cos 9t}{\sin t}\right)^2 + \left(\frac{\sin 10t\sin 9t}{\sin t}\right)^2 = \left(\frac{\sin 10t}{\sin t}\right)^2,$$

откуда следует справедливость (**) при $t \neq \pi m$. Формула (**) верна и при $t = \pi m$, если функцию $\left(\dfrac{\sin 10t}{\sin t}\right)^6$ доопределить по непрерывности в этих точках значением 10^6.

Соотношение (*) позволяет ответить и на вопрос, почему упоминаемое в основной части книги равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(t_k), \quad t_k = t_0 + \frac{k\pi}{n}$$

при $n \geqslant 28$ не приближенное, а точное.

Имеем:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(t_k) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{27} a_j\sum_{k=1}^n \cos 2j\left(t_0 + \frac{k\pi}{n}\right) + C.$$

Согласно второй формуле (***),

$$\sum_{k=1}^n \cos 2j\left(t_0 + \frac{k\pi}{n}\right) = 0,$$

откуда следует

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) = C = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt.$$

Эти выкладки продемоистрировали любопытное явление. Число π, как сказочиая фея, появилось, сделало доброе дело и, оставив счастливое воспоминание о себе, исчезло.

Количество билетов с двумя цифрами легко подсчитывается: $C = 10$. Далее замечаем, что $\sin^2(10t_k) = 1$ для всех выбранных точек t_k. Кроме того, $\sin\frac{r\pi}{20} = \sin\frac{(20-r)\pi}{20}$, где $r = 1, 3, 5, 7, 9$, так что исходное равенство преобразуется к виду:

$$50 = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{20}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{20}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2\frac{9\pi}{20}}.$$

Поскольку

$$\sin^2\frac{5\pi}{20} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{9\pi}{20} = \cos\frac{\pi}{20}, \quad \sin\frac{7\pi}{20} = \cos\frac{3\pi}{20},$$

то

$$48 = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{20}\cos^2\frac{\pi}{20}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{20}\cos^2\frac{3\pi}{20}} = 4\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{10}}\right),$$

откуда следует требуемое свойство.

§ 33. Классические средние и число π

«Семь раз отмерь, один раз отрежь» — гласит известная поговорка. Для фатального отрезания, очевидно, нужно использовать среднюю величину всех измерений —полученные результаты сложить и разделить на их общее количество. Наряду с получающимся таким образом *средним арифметическим* в математике используются и другие средние. Мы их определим для двух произвольных положительных чисел a и b:

$$\text{среднее арифметическое: } A(a, b) = \frac{a+b}{2};$$

$$\text{среднее геометрическое: } G(a, b) = \sqrt{ab};$$

$$\text{среднее гармоническое: } H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}.$$

Пусть около окружности единичного радиуса описан и вписан в нее правильный n-угольник; обозначим их периметры соответственно P_n и p_n. Используя соотношения

$$P_n = 2n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad p_n = 2n \cdot \sin \frac{\pi}{n},$$

а также основные тригонометрические тождества, можно убедиться в том, что

$$P_{2n} = H(P_n, p_n); \quad p_{2n} = G(p_n, P_{2n}) \qquad (1).$$

Эти формулы позволяют, отправляясь, скажем, от P_6 и p_6, последовательно вычислить $P_{12}, p_{12}, P_{24}, p_{24}, P_{48}, p_{48}, P_{96}, p_{96}, \ldots$ и, таким образом, оценить число π со сколь угодно большой точностью.

Классические средние и число π роднит не только эта связь. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две последовательности положительных чисел, вычисляемых по формуле

$$a_{n+1} = A(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (2)$$

Начальные значения членов последовательностей a_1 и b_1 могут быть произвольными за тем лишь исключением, что $a_1 < b_1$. Тогда, как показали немецкие математики Шваб и Шенберг [Кре], обе эти последовательности имеют общий предел, равный

1

$$\frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{\arccos a_1/b_1}.$$

Взяв $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, в качестве такого предела получим число $\dfrac{2}{\pi}$. Остановившись, например, на девятом шаге вычислений по формулам (2) при этих начальных данных, находим $a_{10} = 0{,}6366196475\ldots$, $b_{10} = 0{,}6366198348\ldots$. Полагая затем $\dfrac{2}{\pi} \approx b_{10}$, получаем оценку для числа π с точностью до семи знаков: $3{,}14159234557\ldots$ Процесс вычисления числа π с помощью итерационного процесса (2) довольно быстро сходится.

Если рекуррентные соотношения (2) немного подправить:

$$a_{n+1} = A(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = G(a_n, b_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

то последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ по-прежнему будут сходиться к общему пределу — так называемому *арифметико-геометрическому среднему*, однако этот предел уже не выражается через элементарные функции. Последний факт обнаружил К. Ф. Гаусс (1777–1855) в 1799 году. Оказывается, в этом случае предел равен

2

$$\frac{\pi}{2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{b_1^2 \sin^2 x + a_1^2 \cos^2 x}}}.$$

В знаменателе этой дроби стоит так называемый эллиптический интеграл. Теория эллиптических интегралов оказалась весьма продуктивной на алгоритмы вычисления числа π. Исследования в этой области, а также в близко примыкающей к ней теории *тета-функций* привели канадских математиков Джонатана и Питера Борвейнов к открытию сверхбыстрых алгоритмов вычисления знаков числа π [Bor] (см. также «Краткая „биография" числа π»).

Среди шуточных способов «математической охоты» на льва в пустыне, предложенных профессором Принстонского университета Г.Петардом, имеется и такой ([Физ], с.262–263).

«Рассмотрим льва как аналитическую функцию координат $f(x)$ и напишем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(x)}{x-\gamma}dx,$$

где C — контур, ограничивающий пустыню, а γ — точка, в которой находится клетка. После вычисления интеграла получается $f(\gamma)$, то есть лев в клетке.»

Математический аккомпанемент

Методом математической индукции показывается, что члены числовых последовательностей, задаваемых формулами (2) с начальными данными $a_0 = a > 0$; $b_0 = b > a$, при $n \geqslant 0$ удовлетворяют неравенствам:

1

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{b_n\}$ —снизу. В силу монотонности, каждая из этих последовательностей имеет предел. Пусть предел ограниченной сверху последовательности $\{a_n\}$ равен α, а предел ограниченной снизу последовательности $\{b_n\}$ равен β. Рассмотрим равенство $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Устремляя к пределу обе его части при $n \to \infty$, получим $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, откуда следует, что $\alpha = \beta$. Итак, обе рассматриваемые последовательности имеют один и тот же предел. Этот предел называется средним Шваба-Шенберга. Определить его можно из простых геометрических соображений.

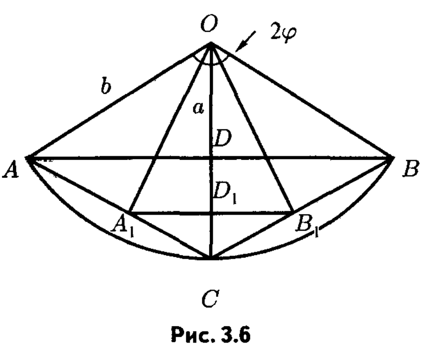


Рис. 3.6

На рис. 3.6 изображен равнобедренный треугольник AOB с боковыми сторонами $AO = BO = b$ и высотой $OD = a$. Угол при вершине AOB обозначен через 2φ. Продолжение высоты OD пересекает дугу AB окружности с центром в точке O и радиуса b в точке C. Отрезок A_1B_1 —средняя линия в треугольнике ACB. Треугольник A_1OB_1 весьма примечательный. Его высота OD_1 равна

$$OD + DD_1 = a + \frac{DC}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

А это как раз равно первому значению a_1 последовательности $\{a_n\}$, задаваемой рекуррентными формулами (2). Далее, его боковая сторона OA_1 равна первому значению b_1 последовательности $\{b_n\}$, задаваемой теми же формулами (2). Действительно, треугольник OA_1C прямоугольный, так как в равнобедренном треугольнике AOC отрезок OA_1 является медианой, следовательно — биссектрисой и высотой. Поэтому $OA_1 = \sqrt{OC \cdot OD_1} = \sqrt{ba_1} = b_1$.

Итак, из одного треугольника AOB мы построили другой OA_1B_1, элементы которого связаны с соответственными элементами первого треугольника заданными рекуррентными зависимостями. Продолжая аналогичный процесс строительства треугольников и дальше, мы последовательно будем получать треугольники OA_2B_2, OA_3B_3 и т.д. На n-ом шаге мы получим треугольник OA_nB_n (рис. 3.7) со следующими характеристиками:

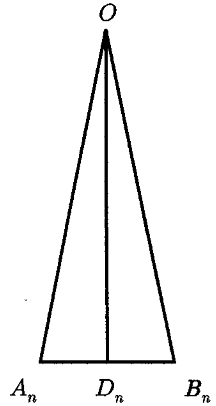


Рис. 3.7

$$\angle A_nOB_n = \frac{\varphi}{2^{n-1}}; \quad A_nB_n = \frac{1}{2^n}AB; \quad b_n = OA_n; \quad a_n = OD_n.$$

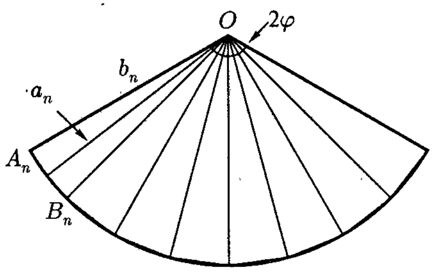


Рис. 3.8

Теперь построим дугу окружности радиуса b_n с центральным углом 2φ и разделим ее на 2^n равных дуг (рис. 3.8). Последовательно соединяя точки деления хордами, получим правильную 2^n-звенную ломаную линию, вписанную в эту дугу. Длина ломаной равна

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n}AB = AB.$$

Эта ломанная является вписанной в дугу окружности радиуса b_n и описанной для дуги окружности радиуса a_n с тем же центром O. Поскольку периметр ломаной заключен между длинами этих дуг, то справедливо неравенство: $2\varphi a_n < AB < 2\varphi b_n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел α, отсюда получим: $2\varphi\alpha \leqslant AB \leqslant 2\varphi\alpha$, то есть $AB = 2\varphi\alpha$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{AB}{2\varphi} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \dfrac{a}{b}}.$$

Приведем два сверхбыстрых алгоритма, построенные Джонатаном и Питером Борвейнами на основе исследования арифметико-геометрических средних [Bor].

Алгоритм 1.

Положим $x_0 = \sqrt{2}$; $\pi_0 = 2+\sqrt{2}$; $y_1 = \sqrt[4]{2}$ и определим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{\pi_n\}$ следующими рекурреитными зависимостями:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right); \qquad n \geqslant 0; \qquad \text{(i)}$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n\sqrt{x_n} + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1}; \qquad n \geqslant 1; \qquad \text{(ii)}$$

$$\pi_n = \pi_{n-1} \cdot \frac{x_n + 1}{y_n + 1}; \qquad n \geqslant 1. \qquad \text{(iii)}$$

Тогда значения π_n монотонно уменьшаются, очень быстро приближаясь к π:

$$\pi_{n+1} - \pi \leqslant \frac{1}{10}(\pi_n - \pi)^2 \quad \text{и} \quad \pi_n - \pi < \frac{1}{10^{2^{n+1}}}, \quad n \geqslant 2.$$

Еще более быстрым является следующий алгоритм.

Алгоритм 2.

Положим $a_0 = 1$; $b_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и определим

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k c_k^2},$$

где

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \frac{c_{n-1}^2}{4a_n},$$

а величины a_n, b_n вычислены по алгоритму арифметико-геометрических средних. Тогда значения π_n монотонно увеличиваются, очень быстро приближаясь к π:

$$\pi - \pi_{n+1} \leqslant \frac{2^{-(n+1)}}{\pi^2}(\pi - \pi_n)^2 \quad \text{и} \quad \pi - \pi_n \leqslant \frac{\pi^2 2^{n+4} e^{-\pi \cdot 2^{n+1}}}{M^2\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)},$$

где

$$\frac{1}{M(1,x)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - x^2)\sin^2\theta}}.$$

Доказательства сходимости этих алгоритмов основаны на теории эллиптических функций [Bor]. Приведенный выше Алгоритм 2 был использоваи для контрольной проверки рекордных вычислений числа π в конце прошлого столетия американскими и японскими исследователями.

§ 34. Красота — в формулах любящих

«На вкус и цвет товарищей нет» — гласит поговорка. И все же, существуют объекты, относимые большинством из нас к категории прекрасных. Среди изящных человеческих творений — не только общепризнанные произведения искусства, к ним без всякого сомнения можно отнести и красивые математические формулы. Разве не содержит ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

изящный мотив: от такта к такту (от одного элемента ряда к другому) повторяющуюся сумму (аналог орнамента с переносной симметрией)? В этом математическом «звукоряде» тесно переплетаются две противоборствующие мелодии — одна соответствует знаку +, другая — знаку —. Изящная закономерность, которой подчиняются знаменатели дробей бесконечной вереницы — еще одна прекрасная деталь, подчеркивающая красоту основного орнаментального мотива...

Композиции Ариабхаты

Индийский математик и астроном VI в. Ариабхата является автором следующих замечательных композиций (здесь натуральное $n \geqslant 2$; подсчет радикалов происходит слева направо):

$$\pi \approx 2^{n-1} \cdot \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}}_{n-1 \text{ радикалов}} \qquad (1)$$

$$\pi \approx 2^{n-1} \cdot 3 \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}_{n \text{ радикалов}} \qquad (2)$$

в частности, при $n = 7$ из второй формулы Ариабхата получает:

$$\pi \approx 192 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}} \approx 3{,}14156$$

— результат, более точный, чем у Архимеда и Птолемея.

Математический аккомпанемент

Формулы (1) и (2) Ариабхата получил, установив связь между сторонами a_{2k} и a_k вписанных в круг единичного радиуса правильных $2k$-угольника и k-угольника:

$$a_{2k} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_k^2}}\ , k \geqslant 3. \qquad (*)$$

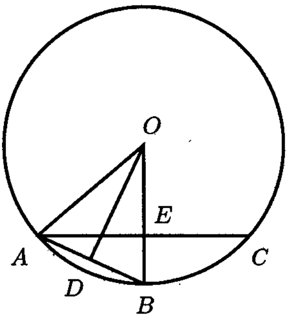


Рис. 3.9

На рис. 3.9 изображена окружность единичного радиуса с центром в точке O;

$$AC = a_k; \quad AB = a_{2k}; \quad OD \perp AB; \quad OD = h.$$

Поскольку треугольники OBD и ABE подобны, то $\dfrac{1}{h} = \dfrac{a_{2k}}{a_k/2}$, откуда $2h = \dfrac{a_k}{a_{2k}}$. По теореме Пифагора для треугольника ADO

$$h^2 = 1 - \frac{1}{4}a_{2k}^2.$$

Из двух последних равенств следует

$$a_{2k}^4 - 4a_{2k}^2 + a_k^2 = 0 \quad \text{и} \quad a_{2k}^2 = 2 \pm \sqrt{4 - a_k^2}.$$

Ограничения $a_{2k} < a_k \leqslant \sqrt{3}$ позволяют отбросить больший корень, откуда получается требуемый результат (*).

Выбрав в качестве исходного вписанного многоугольника квадрат, $a_4 = \sqrt{2}$, по формуле (*) последовательно находим:

$$a_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$a_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$a_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \quad \text{и т.д.}$$

Выбрав в качестве исходного многоугольника правильный шестиугольник, $a_6 = 1$, точно так же получаем:

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$a_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$$a_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \quad \text{и т.д.}$$

Приравняв периметры получаемых многоугольников длине окружности 2π, отсюда выводим формулы Ариабхаты (1) и (2).

Более изящный способ вывода этих формул основан на свойствах тригонометрических функций. Из формулы $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\alpha}$ легко выводится соотношение

$$\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}}}$$

(в правой части записано k радикалов, $k \geqslant 1$), а затем из него, используя связь $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\cos\alpha}$, формула

$$\sin\frac{\alpha}{2^k} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}}}$$

(в правой части записано k радикалов, $k \geqslant 2$). Последней формулой можно воспользоваться при подсчете периметра P_m вписанного в окружность диаметра 1 правильного m-угольника: $P_m = m \cdot \sin\dfrac{180^\circ}{m}$. Полагая $m = 2^n$ или $m = 3 \cdot 2^n$ и учитывая, что $P_m \approx \pi$, отсюда получаем формулы Ариабхаты (1) и (2).

Произведение Виета

Французскому математику Франсуа Виету (1540–1603) удалось выразить число π бесконечным произведением радикалов:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \ldots}$$

«Любопытная формула! — комментирует ее Флорика Кымпан ([Кым], с. 109–110), — она походит на фантастический лабиринт с тысячами комнат, в которых прячется число π. Если мы его ищем под первым радикалом, то обнаруживаем дверь, ведущую ко второму радикалу, через которую оно удрало от нас. Если преследовать его дальше, оно находит убежище под третьим радикалом, как бы охраняемым дробью $\dfrac{1}{2}$, и так далее».

Математический аккомпанемент

При выводе своей формулы Виет исходил из следующего свойства правильных вписанных в круг единичного радиуса многоугольников:

$$\frac{S_{2k}}{S_k} = \frac{1}{h_k}, \tag{1}$$

где S_k, S_{2k} —площади правильных вписанных в круг единичного радиуса k-угольника и $2k$-угольника; h_k —апофема k-угольника. Отсюда

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^2}} = \frac{S_{2^n}}{S_{2^{n-1}}} \cdot \frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^{n-2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_{2^3}}{S_{2^2}} = \frac{1}{h_{2^{n-1}}} \cdot \frac{1}{h_{2^{n-2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{h_{2^2}}. \tag{2}$$

Между апофемами h_{2k} и h_k правильных вписанных в круг единичного радиуса $2k$- и k-угольника существует следующая связь:

$$h_{2k} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}h_k}. \qquad (3)$$

Ее можно получить, например, из формулы (*) предыдущего пункта ("Композиции Ариабхаты") и соотношения $h = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ между апофемой h и стороной a правильного вписанного в круг единичного радиуса многоугольника. Поскольку $h_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, то из (3) получаем

$$h_8 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}};$$

$$h_{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}};$$

$$h_{32} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Из этих соотношений совместно с $S_4 = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = \pi$ и (2) получается формула Виета.

С точки зрения математического анализа факт сходимости бесконечного произведения, стоящего в правой части формулы Виета, должен быть обоснован. Это проще сделать, обратившись к тригонометрическим функциям.

Многократно применяя формулу для синуса удвоенного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2^2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \ldots$$

$$\ldots = 2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = 1$ (замечательный предел), поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{x}.$$

Итак,

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k}. \tag{4}$$

В частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ отсюда получаем $\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\ldots$.

Поскольку

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha},$$

то из последиего разложения непосредственно следует формула Виета. Полагая в (4) $x = \frac{2\pi}{3}$, можно получить другое красивое разложеиие:

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots.$$

Формула Валлиса

В 1665 году Валлис получил эту формулу.
В том же году формула получила имя Валлиса.

Из студенческого фольклора МФТИ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots \tag{1}$$

С доказательством формулы Валлиса можно познакомиться в [Фих], [Кур] (см. также комментарий к «π в Многомерии»).

Из (1) получаются другие красивые разложения:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{5}\right)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2m+1}\right)\cdot\ldots,$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\cdot\ldots$$

Конструкция Броункера и дроби Эйлера

Любопытное разложение в цепную дробь нашел лорд Уильям Броункер (1620–1684) в 1665 году:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ldots}}}}}.$$

Доказательство этой формулы дал Леонард Эйлер (1707–1783) в 1785 году, попутно указав другие цепные дроби, связанные с числом π. Например:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \cfrac{7 \cdot 9}{4 + \ldots}}}}}; \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1 \cdot 3}{8 + \cfrac{3 \cdot 5}{8 + \cfrac{5 \cdot 7}{8 + \cfrac{7 \cdot 9}{8 + \ldots}}}}}$$

и другие.

Математический аккомпанемент

Ряд $a_0 + a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \ldots$ Эйлер представил непрерывной дробью

$$a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \ldots}}}.$$

Взяв, например, разложение функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

отсюда имеем:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = x; \quad a_2 = -\frac{x^2}{3}; \quad a_3 = -\frac{3x^2}{5}; \ldots .$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + \ldots}}}}.$$

Конструкция Вроункера выводится из последнего соотношения при $x = 1$.

π и числа Фибоначчи

Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи (сын Боначчи) (1180–1240), скорее всего, не подозревал, что одна из задач, опубликованных в его книге "Liber Abacci" (1228), обессмертит его имя. Речь в этой задаче шла о размножающихся кроликах, количество которых образовывает замечательную последовательность: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$ Каждый новый член этой последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Будем называть *числами Фибоначчи* числа последовательности $\{u_n\}$, задаваемой рекуррентно: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, при этом полагая $u_1 = u_2 = 1$.

Последовательность чисел Фибоначчи удивительным образом возникает в самых неожиданных приложениях, и ей посвящена обширная литература (см., например, [Вор]). Один из примечательных фактов связан с решением десятой проблемы Гильберта (1862–1943). Проблема касалась возможности построения алгоритма, который позволил бы для любого алгебраического уравнения с любым числом неизвестных и целочисленными коэффициентами выяснить, имеет ли это уравнение по крайней мере одно целочисленное решение. Эту проблему решил аспирант Ленинградского университета Юрий Владимирович Матиясевич (р. 1947) в 1970 году. Его вывод оказался неожиданным: требуемого алгоритма не существует. Доказать это помогли числа Фибоначчи (см., например, [Вар]).

Последовательность чисел Фибоначчи с числом π роднит формула Д. Х. Лемера ([Изб], стр. 44; см. также [Mic]):

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_9} + \ldots$$

Математический аккомпанемент

Сначала докажем равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+2}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{*}$$

Для этого воспользуемся вспомогательным тождеством

$$u_{2n+1}u_{2n+2} - u_{2n}u_{2n+3} = 1, \tag{**}$$

которое можно доказать методом математической индукции.

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n}u_{2n+2} - 1} = \frac{u_{2n+1} + u_{2n+2}}{u_{2n+1}u_{2n+2} - 1} = \frac{\dfrac{1}{u_{2n+1}} + \dfrac{1}{u_{2n+2}}}{1 - \dfrac{1}{u_{2n+1}} \cdot \dfrac{1}{u_{2n+2}}}.$$

Привлекая тригонометрическое тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad \text{для} \quad xy < 1,$$

отсюда получаем (*).

Далее, поскольку

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_2},$$

то, многократно применяя (*) к выражениям $\operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n}}$ при $n = 1, 2, \ldots$, начиная с $\operatorname{arctg}\frac{1}{u_2}$, находим:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2k+2}} + \sum_{n=1}^{k} \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+1}}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2k+2}} = 0$, то

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \operatorname{arctg}\frac{1}{u_{2n+1}}.$$

«Генераторы» красивых разложений

В математическом анализе существует ряд общих формул, справедливых для широкого класса функций с заданным набором свойств. Мы рассмотрим некоторые из этих формул. Подбирая в них различные функции, можно строить красивые бесконечные ряды.

Ряды Тейлора

...шло число

Александр Введенский.
Факт, теория, Бог

Ряды, о которых пойдет речь ниже, носят имя ученика Исаака Ньютона (1643–1727) — Брука Тейлора (1685–1731). Сам Ньютон знал и искусно применял эти соотношения, что послужило поводом для афоризма академика Владимира Игоревича Арнольда: «Ньютон изобрел ряды Тейлора» [Арн].

Если произвольная функция $f(x)$ в промежутке $[a, a+H]$ или $[a-H, a]$ имеет производные всех порядков, то можно составить формальный ряд (*ряд Тейлора*):

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (*)$$

В курсах математического анализа доказывается (см., например, [Фих], т. 1, с. 246–263), что если все производные функции $f(x)$ на указанном промежутке ограничены одним и тем же числом, то указанный ряд совпадает со значением функции $f(x)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Так получаются важные разложения, справедливые на всей числовой оси:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad (\text{здесь}\, f(x)=e^x,\ a=0); \qquad (1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$
$$(\text{здесь}\, f(x)=\sin x,\ a=0); \qquad (2)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$
$$(\text{здесь}\, f(x)=\cos x,\ a=0); \qquad (3)$$

Следующие разложения справедливы лишь на указанных справа промежутках:

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots; \qquad |x|<1; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots \qquad |x|<\frac{\pi}{2}; \qquad (5)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots; \qquad |x|\leqslant 1; \qquad (6)$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots\right); \qquad |x|\leqslant 1; \qquad (7)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots; \qquad |x|\leqslant 1; \qquad (8)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots; \qquad (-1,1]. \qquad (9)$$

Промежутки, указанные справа, играют такую же роль, как и область определения функции — вне этих промежутков выписанными слева формулами пользоваться нельзя. Например, хотя функция $\operatorname{arctg} x$ при $|x|>1$ определена, но ее ряд Тейлора при таких значениях аргумента расходится (последовательность его частичных сумм стремится к бесконечности). Аналогичное замечание относится и к остальным функциям.

Выписанные выше ряды служат источником множества изящных разложений с участием числа π:

$$e^{\pi} = 1 + \frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^2}{2!} + \ldots + \frac{\pi^n}{n!} + \ldots \qquad \text{(формула (1), } x = \pi\text{);}$$

$$1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{2^7 \cdot 7!} + \ldots \qquad \text{(формула (2), } x = \frac{\pi}{2}\text{);}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots \qquad \text{(формула (6), } x = 1\text{).}$$

Вспомним связь между π и числом Фидия Φ (см. «Число π и золотое сечение»): $\cos \frac{\pi}{2} = \frac{\Phi}{2}$. Воспользовавшись разложением (3) функции $\cos x$ в ряд Тейлора, отсюда имеем:

$$\frac{\Phi}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{5^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{5^4 \cdot 4!} - \frac{\pi^6}{5^6 \cdot 6!} + \frac{\pi^8}{5^8 \cdot 8!} - \ldots$$

Если же воспользоваться рядом Тейлора (7) для функции $\arccos x$, то получим:

$$\pi = \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\Phi^5}{2^5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\Phi^7}{2^7 \cdot 7} + \ldots \right)$$

Ряды Тейлора, пожалуй, один из самых популярных инструментов в математическом анализе. Приведем еще одну красивую формулу, которую можно доказать с помощью рядов Тейлора. Ее автор — американский математик Джон фон Нейман (1903–1957):

$$\lim_{n \to \infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Ряды Фурье

«Число π является особо знаменитым числом. На нем держится геометрия, тригонометрия. На тригонометрии держатся ряды Фурье.

На рядах Фурье держится физика (спектральный анализ), небесная механика и теория сигналов, у которой π присутствует на каждой странице».

П. В. Маковецкий. Смотри в кореиь!

Некоторые функции могут быть представлены бесконечными суммами синусов и косинусов (или синусов и косинусов) кратных аргументов. Эти суммы получили название рядов Фурье в честь впервые исследовавшего их французского математика Жозефа Батиста Фурье (1768–1830). Например, справедливы следующие разложения:

$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\ldots, \qquad (0<x<\pi); \quad (1)$$

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\ldots, \qquad (0<x\leqslant\pi); \quad (2)$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\cos x+4\frac{\cos 2x}{2^2}-4\frac{\cos 3x}{3^2}+4\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots, \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi) \quad (3)$$

и другие. Эти формулы справедливы для всех вещественных значений аргумента x, указанных справа в круглых скобках. Задавая конкретные значения аргументу x, из них можно получить различные красивые разложения, связанные с числом π. Например, из формулы (1) или (2) при $x = \frac{\pi}{2}$ получаем ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots,$$

при $x = \dfrac{\pi}{3}$ из формулы (2) находим

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\ldots;$$

из формулы (3) получаем при $x = 0$:

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots;$$

при $x = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots$$

и так далее.

Математический аккомпанемент

Для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$, ее формальный ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+a_3\cos 3x+b_3\sin 3x+\ldots,$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx; \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx;$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

Так вычислен ряд (3) для функции $f(x) = x^2$, заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$. При вычислении ряда (1) заданная на интервале $(0, \pi)$ функция $f(x) = \frac{\pi}{4}$ продолжена на отрезок $[-\pi, \pi]$ как нечетная:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant \pi; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{если} \quad -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Аналогичным образом до нечетной функции на промежутке $[-\pi, \pi]$ продолжается функция $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ при вычислении ряда Фурье (2).

Несмотря на то, что для всякой интегрируемой на интервале $(-\pi, \pi)$ функции можно составить ряд Фурье, между функцией и этим рядом не всегда можно поставить знак равенства. Условия для разложимости функции в ряд Фурье исследуются в курсах математического анализа (см., например, [Фих], т. 3, с. 414–630).

Формулы Эйлера

Синус как многочлен бесконечной степени

«Свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдения и открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы все еще не в состоянии доказать; только наблюдения привели нас к их познанию».

Леонард Эйлер. Opera Omnia

Однажды швейцарский математик Яков Бернулли (1654–1705), открывший суммы нескольких бесконечных рядов, столкнулся с непреодолимым препятствием — ему никак не удавалось найти сумму ряда:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

Отчаявшись справиться с задачей самостоятельно, Яков Бернулли обратился за помощью ко всем знакомым ему математикам. На его запрос откликнулся Леонард Эйлер. Он обнаружил сумму не только этого ряда, но и множества других рядов. Об истории этого открытия Эйлера очень подробно рассказывается в книге «Математика и правдоподобные рассуждения» замечательного математика и педагога Дьердя Пойа (1887–1985) ([Пой], с. 39–55).

В основе проницательной догадки Эйлера лежало одно «очень дерзкое» предположение, как его охарактеризовал Дьердь Пойа. В чем его суть?

В алгебре доказывается, что если у многочлена

$$p(x) = b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - b_3x^6 + \ldots + (-1)^n b_n x^{2n}$$

имеется $2n$ различных корней $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \ldots, \beta_n, -\beta_n$, то его можно разложить на множители:

$$p(x) = b_0\left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right).$$

Представим функцию $\sin x$ в виде ряда Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

и взглянем на выражение в правой части этого равенства как на «многочлен бесконечной степени», имеющий различные корни $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$ (нули функции $\sin x$). Эйлер отбрасывает корень 0 и по аналогии с многочленами заключает, что

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \ldots \qquad (1)$$

«Решающий шаг Эйлера был дерзким, — комментирует этот факт Дьердь Пойа. — Эйлер применил правило к такому случаю, для которого правило не было установлено; правило, относящееся к алгебраическим уравнениям, он применил к уравнениям неалгебраическим. С точки зрения строгой логики шаг Эйлера не был оправдан» ([Пой], с. 43).

Действительно, действия с бесконечными объектами таят в себе немало опасностей. Хрестоматийный пример связан с подсчетом суммы бесконечного ряда $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Если при подсчете суммы этого ряда объединять члены так: $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$, то сумма ряда окажется равной нулю. Если же члены объединять так: $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$, то сумма ряда окажется равной 1. Парадокс!

И тем не менее, формула Эйлера (1) верна. Эйлер убедился в ее справедливости, сначала испытав свой метод на других примерах. Исследовав множество рядов, он во всех случаях находил согласие. В последующем Эйлер привел уже не эвристическое, а строгое доказательство формулы (1).

Математический аккомпанемент

Обосновывая истинность формулы (1), Эйлер рассмотрел многочлен

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n - \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n\right],$$

в пределе при $n \to \infty$ совпадающий с функцией

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x.$$

Корни этого многочлена находятся из уравнения

$$\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n,$$

или

$$1+\frac{ix}{n} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(1-\frac{ix}{n}\right), \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

При нечетном n из последнего уравнения имеем

$$x = \frac{n}{i}\,\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}} = n \cdot \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}.$$

Если при нечетном n взять $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{n-1}{2}$, то, разложив многочлен $\frac{P_n(x)}{x}$ при $x \neq 0$ на множители, получаем

$$\frac{P_n(x)}{x} = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{n^2 \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}}\right).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{n\to\infty} n^2 \operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n} = k^2\pi^2,$$

то отсюда выводится формула (1). С другим обоснованием этой формулы можно познакомиться в [Фих], т. 2, с. 374–377.

«Букет» разложений

Из формулы (1) Эйлер получил множество замечательных соотношений, связанных с числом π:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \\
\frac{\pi^4}{90} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots \\
\frac{2^4}{7!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi^6 &= 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \ldots \\
\frac{2^6}{9!} \cdot \frac{3}{5} \cdot \pi^8 &= 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\frac{2^{24}}{27!} \cdot 76977927 \cdot \pi^{26} &= 1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

Из формулы

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \cdot \ldots, \tag{3}$$

аналогичной (1), Эйлер получаем ряды, знаменатели которых представляют степени нечетных чисел:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots \\
\frac{\pi^4}{96} &= 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots \\
\frac{16}{5!} \cdot \frac{1}{2^7} \cdot \pi^6 &= 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \ldots \\
\frac{272}{7!} \cdot \frac{1}{2^9} \cdot \pi^8 &= 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4}$$

Любопытно, что, полагая в формуле (1) $x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 3^2}\right) \ldots$$

или

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots$$

$$\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1+\frac{1}{2m}\right)\cdot\ldots,$$

откуда непосредственно вытекает *формула Валлиса*. Формула Валлиса была хорошо известна Эйлеру.

Математический аккомпанемент

Эйлер в работе «Введение в аналнз бесконечно малых» [Эйл] замечает, что если раскрыть скобки в произведении двучленов $(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\ldots$, то получится ряд

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+\ldots,$$

где коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$ образуются из чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ таким образом:

$$\begin{aligned}
&A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots && \text{(сумма всех по одному)}\\
&B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\ldots && \text{(сумма произведений по два)}\\
&C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots && \text{(сумма произведений по три)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \text{и так далее.}
\end{aligned}$$

Коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$, в свою очередь, могут быть использованы для вычисления симметричных степенных сумм:

$$\begin{aligned}
P&=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots,\\
Q&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots,\\
R&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots,\\
S&=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\ldots,\\
T&=\alpha^5+\beta^5+\gamma^5+\delta^5+\ldots,\\
V&=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+\delta^6+\ldots \quad \text{и так далее}
\end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
P&=A;\\
Q&=AP-2B;\\
R&=AQ-BP+3C;\\
S&=AR-BQ+CP-4D;\\
T&=AS-BR+CQ-DP+5E;\\
V&=AT-BS+CR-DQ+EP-6F \quad \text{и так далее.}
\end{aligned} \tag{*}$$

Эти комбинаторные соотношения, известные еще А. Жирару (1629) и И. Ньютону (1707), лежат в основе многих формул, связанных с числом π и выведенных Эйлером.

Для вывода соотношения (2) Эйлер в формуле (1) полагает $x^2 = -\pi^2 z$, а функцию $\sin x$ раскладывает в ряд Тейлора. В результате он получает:

$$1 + \frac{\pi^2}{3!}z + \frac{\pi^4}{5!}z^2 + \frac{\pi^6}{7!}z^3 + \ldots =$$

$$= (1+z)\left(1 + \frac{1}{4}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{16}z\right)\left(1 + \frac{1}{25}z\right)\cdot \ldots .$$

Здесь $A = \dfrac{\pi^2}{6}$; $B = \dfrac{\pi^4}{120}$; $C = \dfrac{\pi^6}{5\,040}$; $D = \dfrac{\pi^8}{362\,880}$ и т.д. , откуда по формулам (*) вычисляются значения сумм

$$P = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots;$$

$$Q = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots \quad \text{и т.д.,}$$

указанных в (2).

Для вывода соотношений (4) Эйлер аналогично использует связь

$$1 + \frac{\pi^2}{2!4}z + \frac{\pi^4}{4!4^2}z^2 + \frac{\pi^6}{6!4^3}z^3 + \ldots = (1+z)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{25}z\right)\left(1 + \frac{1}{49}z\right)\cdot \ldots ,$$

вытекающую из формулы (3) при $x^2 = -\dfrac{\pi^2 z}{4}$ и разложения функции $\cos x$ в ряд Тейлора.

Эйлер также замечает, что соотношения (4) могут быть получены из (2) следующим способом. Умножив ряд $M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^n}$ на $\dfrac{1}{2^n}$, имеем

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \ldots .$$

Если этот ряд вычесть из предыдущего, то получим

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \ldots .$$

«Если же вычесть из M удвоенный ряд $\dfrac{M}{2^n}$, —указывает далее Эйлер, — то получатся перемежающиеся знаки, и будет

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \ldots .$$

На основании указанных правил могут быть суммированы следующие ряды:

$$1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \ldots;$$

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \ldots,$$

если только n будет числом четным. Сумма будет равна $A\pi^n$, где A — рациональное число».

Работа Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых» содержит россыпи изумительных формул. Подробнее остановимся еще на некоторых зависимостях, указанных Эйлером:

$$\begin{gathered}\cos\frac{v}{2}+\operatorname{tg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}=\\ =\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots,\\ \cos\frac{v}{2}+\operatorname{ctg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}=\\ =\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots.\end{gathered}\qquad(**)$$

Разложив в первом соотношении (**) функции $\cos\frac{v}{2}$ и $\sin\frac{v}{2}$ в ряды Тейлора и сделав подстановку

$$v=\frac{x\pi}{n};\quad g=\frac{m\pi}{n};$$

$k=\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}$, Эйлер получает

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{x}{n-m}\right)\left(1-\frac{x}{n+m}\right)\left(1+\frac{x}{3n-m}\right)\times\\ \times\left(1-\frac{x}{3n+m}\right)\left(1+\frac{x}{5n-m}\right)\left(1-\frac{x}{5n+m}\right)\cdots=\\ =1+\frac{\pi x}{2n}k-\frac{\pi^2x^2}{2\cdot 4n^2}-\frac{\pi^3x^3}{2\cdot4\cdot6\cdot n^3}k+\frac{\pi^4x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot n^4}+\ldots.\end{gathered}$$

Предыдущие рассуждения здесь позволяют выписать следующие зависимости:

$$A=\frac{k\pi}{2n};\quad B=-\frac{\pi^2}{2\cdot 4n^2};\quad C=-\frac{\pi^3k}{2\cdot4\cdot6\cdot n^3};\quad D=\frac{\pi^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot n^4};$$
$$E=\frac{\pi^5k}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot n^5},\ldots.$$

Для рядов

$$P=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}+\frac{1}{5n-m}-\ldots;$$
$$Q=\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(3n-m)^2}+\frac{1}{(3n+m)^2}+\frac{1}{(5n-m)^2}+\ldots;$$
$$R=\frac{1}{(n-m)^3}-\frac{1}{(n+m)^3}+\frac{1}{(3n-m)^3}-\frac{1}{(3n+m)^3}+\frac{1}{(5n-m)^3}-\ldots;$$
$$S=\frac{1}{(n-m)^4}+\frac{1}{(n+m)^4}+\frac{1}{(3n-m)^4}+\frac{1}{(3n+m)^4}+\frac{1}{(5n-m)^4}+\ldots$$

....

с учетом (*) отсюда получаются суммы:

$$P = \frac{k\pi}{2n}; \quad Q = \frac{(2k^2+2)\pi^2}{2\cdot 4n^2}; \quad R = \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3};$$

$$S = \frac{(24k^4+32k^2+8)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4}; \quad \ldots$$

В частности, при $m = 1$, $n = 2$, так что $k = 1$, Эйлер получает уже известные разложения (4), но, кроме них, новые формулы:

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \ldots;$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \ldots \quad \text{и т.д.}$$

Положив $m = 1$, $n = 3$, так что $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, Эйлер находит:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots;$$

$$\frac{4\pi^2}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^2} + \ldots;$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \ldots$$

(здесь в знаменателях недостает всех чисел, делящихся на 3).

Применив аналогичные рассуждения ко второй формуле (**), Эйлер получает, в частности,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \ldots;$$

$$\frac{\pi^2}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \ldots;$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \ldots \quad \text{и т.д.}$$

Складывая или вычитая найденные ранее ряды, Эйлер выводит множество других разложений, «достойных внимания»:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + $$
$$+ \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \ldots;$$

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + $$
$$+ \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n+m} - \ldots;$$

$$\frac{\pi}{2q\sin q\pi}-\frac{1}{2q^2}=\frac{1}{1-q^2}-\frac{1}{4-q^2}+\frac{1}{9-q^2}-\frac{1}{16-q^2}+\ldots;$$

$$\frac{1}{2q^2}-\frac{\pi}{2q\cdot\operatorname{tg}q\pi}=\frac{1}{1-q^2}+\frac{1}{4-q^2}+\frac{1}{9-q^2}+\frac{1}{16-q^2}+\ldots\quad\text{и т.д.}$$

Задавая параметрам m, n и q различные значения, он получает отсюда огромное количество соотношений, например,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots;$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}-\ldots;$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\ldots\quad\text{и т.д.}$$

Работа Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых» —величественный памятник, посвященный числу π (да и не только π, конечно).

Формула + формула = формула

Читайте, читайте Эйлера: это наш общий учитель.

П. С. Лаплас (1749–1827)

В работе «Введение в анализ бесконечно малых» Эйлер демонстрирует эффективную технику преобразований рядов и бесконечных произведений. Чудные формулы с участием числа π из-под его легкой руки выскакивают, как разношерстные кролики из бездонной шляпы иллюзиониста. С некоторыми приемами формальных преобразований Эйлера и с ничтожно малой частью полученных им результатов мы сейчас познакомимся.

Преобразование ряда в произведение

Рассмотрим произвольный ряд, выражающий число π, например, ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\ldots$$

и преобразуем его в произведение. Заметим, что если умножить слагаемые этого ряда на $\frac{1}{3}$, а затем *сложить* полученный ряд с исходным рядом, то в бесконечном разложении исчезнут слагаемые, знаменатели которых кратны 3:

$$\frac{\pi}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{29}-\ldots.$$

Если теперь слагаемые нового ряда умножить на $\frac{1}{5}$, а затем *вычесть* полученный ряд из этого ряда, то в новом бесконечном разложении исчезнут слагаемые, знаменатели которых кратны 5:

$$\frac{\pi}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}+\frac{1}{37}-\ldots.$$

Продолжая этот процесс дальше, в правой части избавимся от всех дробей — останется только единица, зато в левой части образуется некоторое бесконечное произведение. В итоге получаем

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ldots}=$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdot\ldots.$$

Применив этот способ к ранее найденным им рядам, Эйлер получил множество формул, среди которых

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\ldots}=$$
$$=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\ldots;$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots}=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots$$

и другие.

Умножим, поделим

Разделив обе части равенства

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot 8}\cdot\frac{11^2}{10\cdot 12}\cdot\ldots \quad \text{на} \quad \frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\ldots,$$

Эйлер получает новую формулу:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \ldots,$$

где в числителе стоят простые числа, а знаменатели являются числами нечетно-четными (то есть имеют вид $2(2k+1)$) и отличаются на 1 от числителей.

Умножив обе части равенства в формуле Валлиса

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots}$$

на

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{12} \cdot \ldots,$$

Эйлер получает

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 26 \cdot \ldots}{9 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 25 \cdot 25 \cdot \ldots},$$

причем в знаменателе встречаются все нечетные составные числа. Комбинируя последнее произведение с

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1} \cdot \ldots,$$

Эйлер получает:

$$\frac{\pi^3}{30} = \frac{3^3}{3^3-1} \cdot \frac{5^3}{5^3+1} \cdot \frac{7^3}{7^3-1} \cdot \frac{11^3}{11^3-1} \cdot \frac{13^3}{13^3+1} \cdot \ldots$$

и так далее.

Преобразование произведения в ряд

В предыдущем пункте было получено бесконечное произведение

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \ldots =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\cdot\ldots}.$$

Как преобразовать его в ряд?

Воспользуемся формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots;$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}-\ldots;$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^4}+\ldots;$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{11}}=1+\frac{1}{11}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{11^3}+\frac{1}{11^4}+\ldots$$

и так далее.

Перемножив эти разложения (Эйлер называет эту операцию *развертыванием*), получим:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\ldots.$$

«Здесь встречаются нечетные числа; — пишет Эйлер, имея в виду знаменатели дробей, — знаки же чередуются так, что простые числа вида $4m-1$ имеют знак „+“, простые числа вида $4m+1$ – знак „–“; отсюда одновременно определяются знаки чисел составных».

Если же исходное бесконечное произведение записать в виде

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots},$$

то после аналогичного развертывания получим

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots.$$

Здесь число 2 имеет знак «+», простые числа вида $4m-1$ — знак «+», простые же числа вида $4m+1$ — знак «–» — указывает Эйлер.

Эйлер также указывает, что если подобным образом развернуть произведение

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^k}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11^k}}\cdot\ldots$$

(в знаменателях содержатся числа вида $1-\frac{1}{p^k}$, где p пробегает множество всех простых чисел, k — натуральное), то мы получим ряд

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots .$$

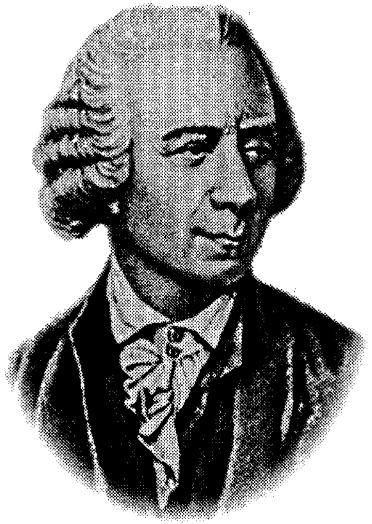
В частности, при $k=2$ получим

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\ldots}=$$
$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6};$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\ldots}=$$
$$=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

и так далее (см. «Букет разложений»).

Леонард Эйлер



Леонард Эйлер родился 4 апреля 1707 года в швейцарском городе Базеле. Его научная деятельность протекала с 1727 по 1741 гг. в Петербургской Академии наук; с 1741 по 1766 гг. — в Берлинской Академии наук, а затем с 1766 года по 1783 год (год кончины) — снова в стенах Петербургской Академии. Один из продуктивнейших ученых, Эйлер только при жизни опубликовал около 550 книг и статей. Список его трудов содержит примерно 850 названий и охватывает все современные ему разделы математики, механики, сопротивления материалов, оптики, астрономии, кораблестроения, теории машин, гидравлики, морского дела, картографии, артиллерии, страхового дела, теории музыки и других отраслей знания. Эйлер явил пример самозабвенного служения науке. Потеряв в 1738 году один глаз, а в 1766 году ослепнув на оба глаза, он, тем не менее, продолжал продуктивно работать, диктуя результаты своих многочисленных исследований секретарям и ученикам.

> «О величии Эйлера как математика можно судить хотя бы по тому, что при изучении теории чисел создается впечатление, что Эйлер в основном интересовался теорией чисел; если же изучаешь расходящиеся ряды или дифференциальные уравнения, то кажется, что именно расходящиеся ряды или дифференциальные уравнения были для Эйлера любимым предметом исследования и т. д.».
>
> Гарольд Эдвардс

> «Он вычислял так свободно, как люди дышат, как орлы парят в воздухе».
>
> Франсуа Араго

> «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить».
>
> К. Ф. Гаусс

Экспонаты «музея изящной математики»

Если бы существовал такой музей, то в нем наряду со многими другими формулами, уже встречавшимися в этой книге, наверняка нашли бы себе достойное место и такие экспонаты.

Формула Джерома К. Р. Ли:

$$\pi = 2 + \frac{(1!)^2 \cdot 2^2}{3!} + \frac{(2!)^2 \cdot 2^3}{5!} + \frac{(3!)^2 \cdot 2^4}{7!} + \frac{(4!)^2 \cdot 2^5}{9!} + \ldots$$

([Изб], с. 113)

$$\frac{\pi}{2e} = \left(1 + \frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{2}{2}\right)^{-2} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{4}\right)^{-4} \cdot \ldots$$

([Пру], с. 757)

Формула Э. Х. Кларка:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + \ldots = \frac{1}{4}\left(\ln 2 - \frac{\pi}{6}\right)$$

([Изб], с. 311)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2 - k^2}{(l^2 + k^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

([Пру], с. 751)

Формула Х. Ф. Сэндхема:

$$1+\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3}\right)^2+\ldots=\frac{17}{360}\pi^4 \qquad \text{([Изб], с. 78)}$$

Формулы Джонатана и Питера Борвейнов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{C_{2n}^n}=\pi+3; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2C_{2n}^n}=\frac{\pi^2}{18} \qquad \text{([Bor], p. 384)}$$

Формула И. Сандоу (19 97):

$$\pi=\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}} \qquad \text{([Son])}$$

Формула М. Биллера (1972):

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}=1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots \qquad \text{([Bel])}$$

Формула Р. В. Госпера (1972):

$$\frac{\pi}{5\sqrt{\Phi+2}}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i!)^2}{\Phi^{2i+1}\cdot(2i+1)!} \qquad \text{([Bel])}$$

В последней формуле участвует также константа Фидия $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (см. Число π и «золотое сечение»).

§ 35. Как π от больших вычислений спасает

Тех, кто полагает, будто вычислительная машина способна заменить математика, можно было бы сравнить с теми, кто считает, что скорострельный карабин заменяет начальника штаба.

Гуго Штейнгауз. Задачи и размышления

Во втором номере журнала «Наука и жизнь» за 1984 год, с. 66–67, опубликована статья «Гармония сфер». Ее авторы высказывают интересные суждения о связи резонансных явлений в природе и технике с отношением золотого сечения. Среди прочих вопросов в статье был рассмотрен и такой: «Какова вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима?»

Рассмотрим дроби $\frac{m}{k}$, числитель и знаменатель которых не превосходит некоторого числа n:

$$1 \leqslant m \leqslant n; \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Всего таких дробей n^2. Обозначим $f(n)$ количество несократимых дробей указанного вида, тогда искомая вероятность есть предел при неограниченном возрастании n отношения $\frac{f(n)}{n^2}$.

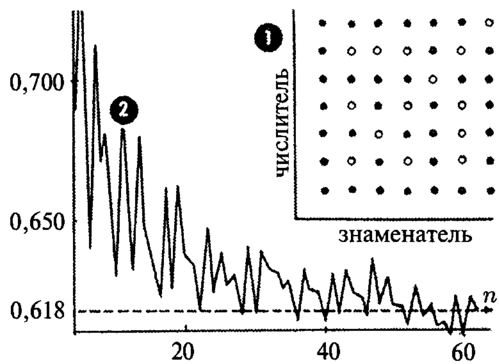


Рис. 3.10

Авторы «Гармонии сфер» пишут: «Расчеты на микрокалькуляторе (выборочно мы проводили их для n, достигавших триллиона, см. рис. 3.10), позволяют предположить, что это отношение стремится к $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$»

А сейчас мы мысленно перенесемся в XIX век. Еще нет ни суперкомпьютеров, ни микрокалькуляторов, но уже построен арифмометр Блеза Паскаля (1623–1662), арифмометр Г. В. Лейбница (1646–1716), уже даже создан проект грандиозной вычислительной машины Чарльза Бэббиджа (1792–1871), приводящейся в действие паровым двигателем, уже, вдохновленная этим проектом, написана первая работа по программированию дочерью известного английского поэта Джорджа Байрона (1788–1824) Адой Лавлейс (1815–1852)...В это полное предчувствий будущей компьютерной эры время представитель знаменитой Петербургской математической школы, берущей начало от Леонардо Эйлера, Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) формулирует и решает задачу...: «Какова вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима?»

Задавшись достаточно большим числом n и некоторым простым p; $2 \leqslant p \leqslant n$, заметим, что количество чисел, делящихся на p, примерно равно $\frac{n}{p}$. *Примерно*, потому что число n может не делиться нацело на p, однако по мере роста n ошибка при замене точного выражения [наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{n}{p}$] на величину $\frac{n}{p}$ становится несущественной. Тогда число сократимых на p

дробей — $\left(\frac{n}{p}\right)^2$, а их доля среди всех дробей указанного вида

$$\left(\frac{n}{p}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{p^2},$$

следовательно, доля несократимых на p дробей равна $1 - \frac{1}{p^2}$. В частности, доля несократимых на 2 дробей равна $1 - \frac{1}{2^2}$, а доля несократимых на 3 дробей равна $1 - \frac{1}{3^2}$.

Естественно предположить, что дроби, которые нельзя сократить на 3, будут с одинаковой частотой встречаться среди тех дробей, которые можно сократить на 2, так и среди тех дробей, которые нельзя сократить на 2. Поэтому доля дробей, которые нельзя сократить на 3, среди дробей, которые нельзя сократить на 2, тоже равна $1 - \frac{1}{3^2}$. Таким образом, доля дробей, не сократимых ни на 2, ни на 3, среди всех дробей будет $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)$.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что доля дробей, которые нельзя сократить ни на одно простое число, выражается произведением

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \ldots$$

Удобнее, однако, находить не само число A, а обратное к нему:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \ldots}.$$

Один из результатов Эйлера (см. «Формулы Эйлера») свидетельствует о том, что

$$\frac{1}{A} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Значит, $A = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}6079\ldots$. Это и есть ответ в задаче Чебышева. Он очень близок к гипотетическому значению $0{,}618\ldots$, предложенному в статье «Гармония сфер».

Как видим, проводить вычисления с триллионами чисел совсем нет необходимости, да и результат, все-таки, немножко не тот...

Вот и получается, что «на компьютер надейся, а сам не плошай!»

Найдите вероятность того, что четыре наугад взятых натуральных числа будут иметь общий делитель, отличный от 1.

Указание. Покажите, что доля четверок натуральных чисел, не имеющих общим делителем ни одно из простых чисел, среди всех четверок натуральных чисел равна

$$B = \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)\left(1 - \frac{1}{5^4}\right)\cdot\ldots.$$

Воспользуйтесь связью между числами $\frac{1}{B}$ и π, указанной Леонардом Эйлером (см. «Формулы Эйлера»).

§ 36. Фарей и свойства дробей

В ответной тишине,
Как в паузе ответной,
Для цокающих дней
Есть дробных чисел ряд.

Владимир Казаков

Строчка несократимых дробей $\frac{m}{k}$, у которых $1 \leqslant m < k \leqslant n$, расположенных в возрастающем порядке, имеет в теории чисел специальное название: *ряд Фарея* и обозначается F_n. Английский математик Фарей в 1816 году без доказательства опубликовал обнаруженные им интересные закономерности в этом ряду дробей, например:

а) для любых двух соседних дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ где $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ выполняется равенство
$$bc - ad = 1;$$

б) каждая дробь получается из соседних с ней двух дробей следующим образом: надо сложить их числители и разделить полученное число на сумму знаменателей и другие [Ваг].

Обозначим $\Phi(n)$ количество членов n-ого ряда Фарея F_n. Например, $\Phi(7) = 17$, поскольку ряд F_7 представляется следующим образом:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}.$$

В 1874 году австрийский математик Ф. Мартенс доказал, что отношение $\frac{\Phi(n)}{n^2}$ при неограниченном возрастании n стремится к величине

$\frac{3}{\pi^2}$. Не находится ли этот результат в какой-то связи с задачей Чебышева (см. «Как π от больших вычислений спасает»)?

§ 37. Вязочка задач

Стал думать, как я здесь очутился.
Оказалось: стал думать.

Владимир Казаков. Ошибка живых

1. Ниже символом $[x]$ обозначена целая часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x.

Чему равно значение выражения π: $[\pi$: $[\ldots[\pi$: $[\pi]]\ldots]$, в котором число π участвует $[\pi]\times$ $[\pi\times[\pi\times\ldots[\pi\times[\pi]]\ldots]$ раз?

2. Диолог после экзамена.

— Сколько получил?

— Четыре бала.

— Почему? Ты не решил кокую-то задачу?

— Ага, я неправильно ответил на вопрос: «Положительно или отрицательно число $\sin 10\,000$?»

— Ток это же просто: $\dfrac{10\,000}{\pi}\approx\dfrac{10\,000}{3{,}14}=3\,184{,}7\ldots$. *Значит,* $3\,184\pi < 10\,000 < 3\,185\pi$ *и, следовательно, синус* $10\,000$ *положительный.*

— Эге, именно так я и ответил.

— А что — это неправильно?

— Конечно!

— Почему?...

3. Последовательность чисел a_n задана условиями:

$$a_1=\frac{1}{2}\quad \textit{и}\quad a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$$

для каждого n. Докожите, что сумма любого количества чисел a_n не превышает $\frac{\pi+3}{6}$.

(Акулич И. Задоча М1208 // Квант. 1990. № 7. С. 32)

4. Верно ли равенство:

$$\pi^{\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 60^\circ} = e^{\ln \operatorname{ctg} 11^\circ \cdot \ln \operatorname{ctg} 12^\circ \cdot \ldots \cdot \ln \operatorname{ctg} 60^\circ}?$$

(Виленкин А. Н., Петрова Т. С. Слет учащихся ФМШ // Квант. 1972. № 5. С. 58)

5. Докажите, что функция $y(x)$, равная 0 для рациональных значений x и 1 для иррациональных значений x, может быть представлена в виде

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\{\sin^2(n!\pi x)\},$$

где функция $\operatorname{sign}(x)$ (от латинского signum — знак) определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x > 0 \\ 0, & \textit{если} \quad x = 0 \\ -1, & \textit{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

(другое определение функции $\operatorname{sign}(x)$, использующее число π:

$$\operatorname{sign}(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(mx)).$$

(Харди Г., [Хар], с. 168)

6. Пусть a, b — длины катетов, а c — длина гипотенузы произвольного прямоугольного треугольника. Докажите следующие неравенство:

a) $a^\pi + b^\pi < c^\pi$;

b) если $c > 1$, то $a^{\pi-1} + b^{\pi-1} > 2^{3-\pi}ab$.

7. Докажите неравенства:

$$0 \leqslant \left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)}\right] - \left[\pi \cdot 10^N\right] \leqslant 1,$$

где N — произвольное натуральное число.

(Г. А. Гальперин)

Математический аккомпанемент

1. Указание. Заметьте, что π: $[\pi$: $[\pi]] = \pi$.
2. Для правильного подсчета следует воспользоваться оценкой числа π более высокой точности:

$$3183{,}0\ldots = \frac{10\,000}{3{,}1416} < \frac{10\,000}{\pi} < \frac{10\,000}{3{,}1415} = 3\,183{,}1\ldots,$$

откуда $3\,183\pi < 10\,000 < 3\,184\pi$, и, следовательно, $\sin 10\,000 < 0$.

3. Сделаем подстановку $a_n = \sin\alpha$; $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

По условию $a_1 = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$, поэтому $a_n = \sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n}$. Поскольку $\sin x < x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2} + \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^2} + \ldots + \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n} <$$
$$< 1 + \frac{\pi}{3\cdot 2^2} + \ldots + \frac{\pi}{3\cdot 2^n} < 1 + \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi+3}{6}.$$

4. Поскольку $\lg\ \mathrm{tg}\,45^\circ = \ln\ \mathrm{ctg}\,45^\circ = 0$, то исходное равенство эквивалентно истинному тождеству $1 = 1$.

5. Если x рационально, то $\sin^2(n!\pi x) = 0$ и $\mathrm{sign}\left\{\sin^2(n!\pi x)\right\} = 0$ для всех значений n, начиная с некоторого; если x иррационально, то $\sin^2(n!\pi x)$ всегда положительно, и, следовательно, $\mathrm{sign}\left\{\sin^2(n!\pi x)\right\} = 1$.

6. a) Поскольку каждый из катетов меньше гипотенузы, то $\dfrac{a}{c} < 1$; $\dfrac{b}{c} < 1$. Следовательно, $\left(\dfrac{a}{c}\right)^\pi < \left(\dfrac{a}{c}\right)^2$; $\left(\dfrac{b}{c}\right)^\pi < \left(\dfrac{b}{c}\right)^2$. Сложив два последние неравенства, получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^\pi + \left(\frac{b}{c}\right)^\pi < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Домножив обе части неравенства $\left(\dfrac{a}{c}\right)^\pi + \left(\dfrac{b}{c}\right)^\pi < 1$на c^π, получнм требуемый результат.

b) Функция $f(x) = x^{\frac{1}{\pi - 1}}$ при $x > 0$ является выпуклой, поскольку на указанном промежутке ее вторая производная

$$f''(x) = \frac{1}{\pi - 1}\left(\frac{1}{\pi - 1} - 1\right)x^{\frac{1}{\pi-1}-2} \quad \text{отрицательна.}$$

В силу этого

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

для произвольных положительных значений аргументов x_1 и x_2. Положив $x_1 = a^{\pi-1}$; $x_2 = b^{\pi-1}$, где a и b —катеты треугольника, а c —его гипотенуза, имеем:

$$\left(\frac{a^{\pi-1} + b^{\pi-1}}{2}\right)^{\frac{1}{\pi-1}} \geqslant \frac{a+b}{2} > \frac{c}{2},$$

откуда получаем

$$\frac{a^{\pi-1} + b^{\pi-1}}{2} > \left(\frac{c}{2}\right)^{\pi-1}, \quad \text{или} \quad 2^{\pi-2}\left(a^{\pi-1} + b^{\pi-1}\right) > c^{\pi-1}.$$

Но, по условию, $c > 1$, поэтому

$$c^{\pi-1} > c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Итак,

$$2^{\pi-3}\left(a^{\pi-1} + b^{\pi-1}\right) > ab,$$

откуда непосредственно получается требуемый результат.

7. Поскольку при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} x > x$, то

$$10^{-N} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)\right) > \operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)$$

и

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)} > \pi \cdot 10^N.$$

Далее, рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x - x, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{arctg} x > 0 \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{и} \quad f(0) = 0,$$

то $f(x) > 0$ для всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В частности, $\operatorname{arctg} x > \frac{x}{1+x^2}$, и при $x = 10^{-N}$ отсюда получаем

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)} < \pi \cdot 10^N + \pi \cdot 10^{-N}.$$

Окончательно имеем:

$$\pi \cdot 10^N < \frac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)} < \pi \cdot 10^N + \pi \cdot 10^{-N},$$

откуда и следует утверждение задачи.

В работе [Gal] Г.А. Гальперин выдвигает предположение, что на самом деле справедлив более сильный результат:

$$\left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg}\left(10^{-N}\right)}\right] = \left[\pi \cdot 10^N\right]$$

Эта гипотеза может быть опровергнута лишь в том случае, если в десятичном разложении числа π следом за некоторыми $k+1$ десятичными цифрами обнаружится последовательность, состоящая из $k-1$ девятки:

$$3,\underbrace{1415\ldots a_k}_{k\ \text{цифр}}\underbrace{99\ldots 99}_{k-1\ \text{цифра}}\ldots$$

До сих пор эта «экзотическая» ситуация не обнаружена, хотя с помощью компьютеров рассчитаны миллиарды десятичных знаков числа π.

§ 38. Случайные встречи

— Почему они все меня находят? Это даже как-то противоестественно!
— Противоестественно. Но зато неизбежно, что гораздо важнее.

Роберт Шекли. Обмен разумов

Читатель уже, наверное, успел убедиться, что число π встречается на каждом шагу. Более того, не только встречается неожиданно и, казалось бы, случайно, но и в некоторых случаях само может служить мерой случайности, как это оказалось, например, при определении вероятности взять наугад несократимую дробь (см. «Как π от больших вычислений спасает»). Это не единственный случай «добрых услуг» числа π теории вероятностей: при более близком знакомстве с ним оказывается, что π скорее штатный сотрудник, чем случайный работник, выполняющий мелкие поручения под вывеской этой фирмы.

Задача Бюффона

Сколько ангелов разместится на острие иглы?

Знаменитый французский естествоиспытатель Жорж Бюффон (1707–1788) в 1777 году опубликовал работу, вызвавшую очередной всплеск страстей вокруг числа π. Бюффон предложил оценивать число π, бросая иголку на специально разрисованную поверхность. Предположим, плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длины $2l (l \leqslant a)$. Какова вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую?

1 Жорж Бюффон показал, что эта вероятность равна

$$p = \frac{2l}{a\pi} \tag{1}$$

Поскольку вероятность p есть то значение, около которого колеблется частота исследуемого события в достаточно длинных сериях опытов, то ее можно оценить экспериментальным путем. Если в n бросаниях m раз игла пересекает какую-нибудь прямую, то полагаем $p \approx \dfrac{m}{n}$.

Оценив таким образом p, из формулы (1) можно получить и оценку для числа π:

$$\pi \approx \frac{2l}{a} \cdot \frac{n}{m} \qquad (2).$$

Последнее соотношение легло в основу многочисленных экспериментов, проводимых некоторыми добровольцами. Вновь вспыхнул ажиотаж: кому удастся точнее оценить число π, многократно бросая иголку? Ниже приводится часть таблицы экспериментальных данных, позаимствованная из [Гне], с. 39:

экспериментатор	год	число бросаний иглы	экспериментальное значение
Вольф	1850	5 000	3,1596
Смит	1855	3 204	3,1553
Фокс	1884	1 120	3,1419
Лаццарини	1901	3 408	3,1415929

Эта таблица — не столько экран научных достижений, сколько зеркало эмоций, обуявших иглобросателей. Если первым двум экспериментаторам для определения двух точных знаков числа π пришлось бросать иголку свыше 3 000 раз, то третьему экспериментатору удалось получить более точную оценку при гораздо меньшем количестве бросаний, что удивительно. И совсем уж неимоверный результат (точность $2 \cdot 10^{-7}$) показал последний экспериментатор — Лаццарини. Этот результат комментирует доктор физико-математических наук А. Н. Зайдель в статье [Зай]: «...иногда желание перещеголять своих предшественников увлекает исследователя и заставляет принимать желаемое за действительное. Расчеты показывают: для того, чтобы получить результат Лаццарини, погрешность которого составляет всего 0,0000002, нужно бросать иглу около 4 000 000 лет!.. Так что начав свой опыт в 1901 году и бросая до сегодняшнего дня, Лаццарини был бы так же далек от опубликованного им результата, как и в день начала опыта». ②

Математический аккомпанемент

① Искомая вероятность находится из геометрических соображений. Если результаты некоторых экспериментов изображаются точками области Ω на плоскости, причем все точки Ω равновозможны, то вероятность попадания точки, изображающей результат некоторого эксперимента, в подобласть G области Ω равна $\dfrac{S(G)}{S(\Omega)}$, где $S(G), S(\Omega)$ — соответственно площади областей G и Ω.

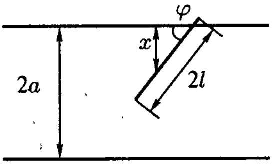


Рис. 3.11

Обозначим x расстояние от центра иглы до ближайшей параллельной прямой, а φ —угол, образованный иголкой с этой прямой. Величины x и φ полностью определяют положение иголки.

Для пересечения иглы с прямой, как видно из рис. 3.11, необходимо и достаточно выполнение неравенства $l \sin\varphi \geqslant x$. Искомая вероятность равна отношению площади под дугой синусоиды, заштрихованной на рис. 3.12, к площади прямоугольника со сторонами a и π:

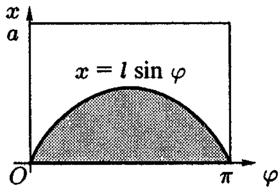


Рис. 3.12

$$p = \frac{1}{a\pi} \int\limits_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

② Количество бросаний иглы n для достижения заданной точности α оценим согласно приближенному неравенству

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right) \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

вытекающему из центральной предельной теоремы [Гне].

Здесь

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right)$$

— вероятность того, что частота $\frac{m}{n}$ события пересечения иголкой какой-либо прямой отклоняется от истинной вероятности p не более, чем на α;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

— функция Лапласа; $q = 1 - p$.

Зададимся значением $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right)$ равным 0,99999, так что

$$\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}499995.$$

Из таблиц для функции $\Phi(x)$ для значения $\Phi(x) = 0{,}499995$ находим $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 4{,}4699$, откуда

$$n \approx \frac{20pq}{\alpha^2}. \qquad (*)$$

Полагая длину иголки $2l$ равной расстоянию $2a$ между начерченными прямыми, из формулы (1) получаем $p = \frac{2}{\pi}$; $q = 1 - \frac{2}{\pi}$. Если задаться точностью $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ (точность, объявленная Лаццарини), то из (*) следует $n \approx 1{,}156675 \cdot 10^{14}$. Приняв, что одно испытание в среднем занимает 5 секунд, получаем, что для достижения заданной точности $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ Лаццарини потребовалось бы непрерывно бросать иголку $3{,}6 \cdot 10^{6}$ лет.

Бросать можно не только иголку...

Кухарка в герцогиню метнула: банку, склянку, вилку, ложку и неочищенную картошку.

Из задачи

Додо: Рисуем на земле круг...Так, становитесь строго в беспорядке!

Из музыкальной сказки «Алиса в Стране чудес»

Задача Бюффона допускает обобщение. Оказывается, число π можно определить также, бросая на разграфленную параллельными прямыми плоскость не только иголку, но и квадрат, треугольник и даже какую-то другую фигуру. Если наибольшее расстояние между двумя точками замкнутой выпуклой фигуры не превышает расстояния между параллельными прямыми $2a$, а периметр фигуры равен $2l$, то вероятность пересечения контуром этой фигуры какой-либо из параллельных прямых при ее бросании наугад равна

$$p = \frac{l}{\pi a}$$

(см, например, [Сан]). Для правильного треугольника с длиной стороны $2a$ указанная вероятность равна $\frac{3}{\pi}$, а для квадрата с длиной диагонали $2a$ она равна $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Любое из этих значений можно использовать для экспериментальной оценки числа π.

Можно вообще отказаться от параллельных прямых. Одно из нравоучений известного философа и поэта Козьмы Пруткова гласит: «Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою» («Мысли и афоризмы», 156). На этот раз мы камешки будем бросать не в воду, а на специальный геометрический рисунок (рис. 3.13), начерченный на спортивной площадке. Если постараться бросать камешки так, чтобы они равномерно распределились по площади квадрата, то результат этого эксперимента также может быть использован для оценки числа π. Пусть из n брошенных камешков m камешков попали внутрь вписанного в квадрат круга. Тогда очевидно, что

$$\frac{m}{n} \approx \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}},$$

где буквой S обозначается площадь соответствующей фигуры. Отсюда

$$\frac{m}{n} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Очень простая формула!

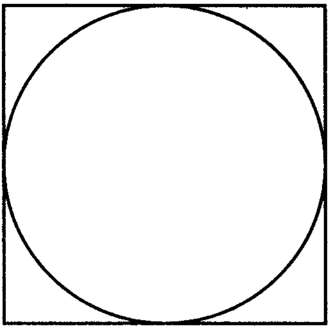


Рис. 3.13

Бросать камешки не очень увлекательное занятие, особенно если камешков для достижения высокой точности потребуется достаточно много (вспомним печальный опыт Лаццарини). Однако в нашем предыдущем опыте камешки нас интересовали не как массивные увесистые предметы, а прежде всего как модели неких точек, попадающих в область круга. Точки же «выбрасывать» — причем с фантастической скоростью — умеет компьютер. Для компьютера точка плоскости — это набор задающих ее положение двух координат. Генерируя два случайных числа, он генерирует случайную точку. Идея использовать компьютер для «выбрасывания» случайных точек, причем не только на плоскости, а и в пространствах произвольных размерностей, а также на временной оси для моделирования времени появления случайных событий, легла в основу современного метода статистических испытаний — метода Монте — Карло. Своим броским названием метод обязан столице карликового государства Монако на юге Франции, прославившейся на весь мир игорными заведениями. Возникновение метода связывают с работами американских математиков Джона Неймана (1903–1957) и Станислава Улама (1909–1984), впервые применивших его для моделирования процессов в атомных реакторах.

И даже не обязательно что-то бросать

В предыдущем опыте мы полагали площадь вписанного в квадрат круга пропорциональной количеству попавших в него точек. Так ли уж необходимо брать для этого именно случайные точки? — Конечно же, нет! Точки могут быть и неслучайными, главное, чтобы они *равномерно* заполняли исследуемую область. Этой идеей воспользовался

К. Ф. Гаусс (1777–1855). Он определял число $f(r)$ точек квадратной решетки, расположенных на площади круга радиуса r с центром в одной из точек решетки, r — целое число. Площадь каждого элементарного квадрата решетки принимается равной единице. Гаусс эмпирически нашел величину $f(r)$ для многих r ([Гил], с. 42):

r	10	20	30	100	200	300
$f(r)$	317	1 257	2 821	31 417	125 629	282697

Эти данные также позволяют оценить число π. Следуя [Гил], покажем, что при возрастании r частное $\frac{f(r)}{r^2}$ стремится к числу π.

Замечаем, что $f(r)$ равно площади F, составленной из всех тех квадратов, у которых нижняя вершина лежит внутри или на границе круга (рис. 3.14). Таким образом, $f(r)$ отличается от площади круга $r^2\pi$ не более чем на величину площади $A(r)$ тех добавленных или опущенных квадратов, которые пересекаются окружностью:

$$\left|f(r) - r^2\pi\right| \leqslant A(r); \qquad \left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| \leqslant \frac{A(r)}{r^2}.$$

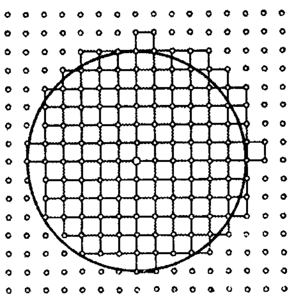


Рис. 3.14

Для оценки $A(r)$ заметим, что все квадраты, пересекающиеся с окружностью, расположены в круговом кольце шириной $2\sqrt{2}$, внешний и внутренний радиусы которого равны $r+\sqrt{2}$ и $r-\sqrt{2}$. Площадь этого кругового кольца равна

$$B(r) = \left[(r+\sqrt{2})^2 - (r-\sqrt{2})^2\right]\pi = 4\sqrt{2}r\pi.$$

Поскольку $A(r) < B(r)$, то

$$\left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| < \frac{4\sqrt{2}\pi}{r}.$$

Отсюда видно, что при возрастании r разность $\left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right|$ может стать сколь угодно малой.

При $r = 300$ величина $\frac{f(r)}{r^2}$ совпадает с числом π с точностью до 4 знаков:

$$\frac{f(300)}{90\,000} = 3{,}14107.$$

π и псевдослучайные числа

Специалисты, занятые статистической обработкой данных, хорошо знают, что такое *псевдослучайные* числа. Приставка *псевдо* означает *как бы*. Таким образом, псевдослучайные числа — это *как бы* случайные числа. Таблицы «как бы случайных» чисел можно найти в некоторых руководствах по теории вероятностей и математической статистике. Например, такая таблица приведена на с. 397 книги [Гму]. Вот ее фрагмент:

$$10\ 09\ 73\ 25\ 33\ 76\ 52\ 01\ 35\ 86\ 34\ 67\ 35\ 48\ 76\ldots \tag{1}$$

Если выписать в ряд 100 первых натуральных чисел и по-порядку отмечать в них члены последовательности (1), то получится что-то вроде модели падающих капель дождя, которые случайным образом попадают то на одно, то на другое число, постепенно отмечая все числа выписанного ряда.

Позвольте, но о какой случайности может идти речь, если мы наперед знаем, какое число будет отмечено вслед за предыдущим? — Вот именно поэтому и появилась приставка *псевдо* в названии псевдослучайных чисел. Конечно, это не настоящие случайные (непредсказуемые) числа, но, вместе с тем, они хорошо моделируют хаос, и, значит, могут быть полезными при проведении вычислительных экспериментов.

Наряду с таблицами псевдослучайных чисел существуют алгоритмы и компьютерные программы, которые позволяют получать подобные числа. Одним из первых алгоритмов подобного рода был алгоритм Джона фон Неймана (1903–1957). Суть его состоит в следующем. Зададимся каким-нибудь четырехзначным числом, например, 3141. Это будет первое псевдослучайное число a_1. Возведем его в квадрат: $a_1^2 = 09\,865\,881$ (спереди дописан 0 для того, чтобы получилось восьмизначное число). Следующим псевдослучайным числом a_2 объявим середину числа a_1^2: $a_2 = 8\,658$. Возведя число a_2 в квадрат и «вырезав» у него середину, получим новое псевдослучайное число $a_3 = 9\,609$, за ним аналогично получаем $a_4 = 3\,328$ и так далее. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, хорошо моделирует случайные числа, равномерно распределенные в промежутке от 0 до 9999.

В настоящее время придумано множество подобных алгоритмов. Они реализованы в программном обеспечении всех современных компьютеров (например, в языке Object Pascal современной системы программирования Delphi генератор псевдослучайных чисел представлен стандартной функцией random).

По-видимому, «генератором» псевдослучайных чисел может служить и число π. Если, скажем, нас интересуют числа, равномерно распределенные на промежутке от 0 до 9999, разобьем дробную часть числа π на тетрады:

1415; 9265; 3589; 7932; 3846; 2643; 3832 и т.д.

Эта последовательность ничем не хуже других аналогичных последовательностей псевдослучайных чисел.

Случайные блуждания

Предположим, в некоторой точке бесконечного в обе стороны тротуара находится фонарь, а возле него — пьяный, который с равной вероятностью может делать шаг то в одном, то в противоположном направлении вдоль тротуара. В некоторый момент времени пьяный отправляется в путешествие. Какова вероятность того, что из $2n$ шагов, где n — достаточно большое число, пьяный сделает n шагов по одну сторону от фонаря, а n — по другую?

Казалось бы, это событие для большого n почти достоверное (его вероятность близка к единице). Увы, наша интуиция тоже не всегда трезво оценивает ситуацию, сразу и безошибочно находит путь в лабиринте математических фантазий. Искомая вероятность с ростом n стремится к величине $\frac{2}{\pi n}$, то есть, фактически, при $n \to \infty$ — к нулю! ([Фел], т. 1, с. 96–102).

Этот довольно неожиданный результат поучителен не только как наглядная агитация о вреде алкоголя, но и как предупреждение любителям азартных игр. Таких, например, как игра в «орла и решку», где победа засчитывается тому игроку, который, поставив на «орла» (а его партнер — на «решку»), наберет большее количество очков при многократном подбрасывании монеты. В этой игре с ростом числа подбрасываний монеты большую часть времени будет лидировать один из игроков, а второму остается лишь горько сетовать на капризы ни в чем не виноватой Фортуны.

Под знаком π

Вы познаёте π только тогда, когда
до вас доходит, что π непостижимо.

Аноним

Многие явления окружающего нас мира несут на себе отпечаток числа π, который мы зачастую и не замечаем. Характерен в этой связи пример, приведенный лауреатом Нобелевской премии физиком Юджином Вигнером ([Виг], с. 182):

«Рассказывают такую историю. Встретились как-то два приятеля, знавшие друг друга еще со студенческой скамьи, и разговорились о том, кто чем занимается. Один из приятелей стал статистиком и работал в области прогнозирования изменения численности народонаселения. Оттиск одной из своих работ статистик показал бывшему соученику. Начиналась работа, как обычно, с гауссова распределения. Статистик растолковал своему приятелю смысл используемых в работе обозначений для истинных показателей народонаселения, для средних и т. д. Приятель был немного недоверчив и отнюдь не был уверен в том, что статистик его не разыгрывает.

— Откуда тебе известно, что все обстоит именно так, а не иначе? — спросил он. — А это что за символ?

— Ах, это, — ответил статистик. — Это число π.

— А что оно означает?

— Отношение окружности к ее диаметру.

— Ну, знаешь, говори да не заговаривайся, — обиделся приятель статистика. — Какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности?»

Предположим, монетка подбрасывается n раз. Какова вероятность того, что точно k раз ($k \leqslant n$) выпадет орел? Количество способов, которыми можно выбрать k предметов из n, равно C_n^k, всего же исходов

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

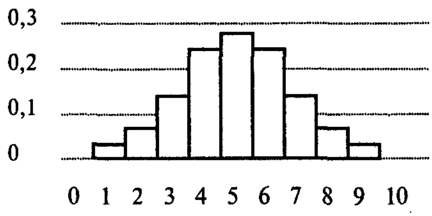


Рис. 3.15

Поэтому искомая вероятность равна $P(n, k) = \dfrac{C_n^k}{2^n}$. Если нарисовать столбики шириной 1 и высотой $P(n, k)$ для различных $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то получим некоторую колоколообразную ломаную (на рис. 3.15 представлен случай $n = 10$).

В 1730 году английский математик Абрахам де Муавр (1667–1754) доказал, что если рисовать столбики таким образом, чтобы при увеличении n их высота увеличивалась в $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ раз, а ширина уменьшалась в точно такое же количество раз, то в пределе при $n \to \infty$ образуется красивая симметричная кривая (рис. 3.16). Она описывается уравнением

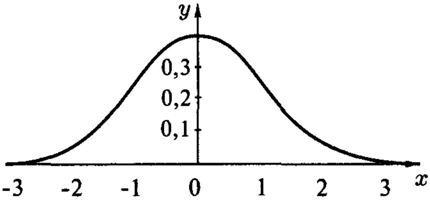


Рис. 3.16

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (1)$$

и называется *гауссовой*, или *нормальной* кривой. Эта же зависимость появилась у К. Ф. Гаусса в 1809 году, а также у П. Лапласа в 1812 году в исследованиях по теории ошибок наблюдений. Называть кривую нормальной предложил американский математик К. Пирсон (1857–1936), который, по-видимому, хотел подчеркнуть таким образом чрезвычайно важную роль закона (1) в теории вероятностей и ее приложениях. Функцией вида (1) хорошо описывается не только распределение ошибок измерения физических величин, но и распределение частиц газа по скоростям, распределение женщин и мужчин по росту, распределение взрослого населения Земли по весу и другие зависимости в физике, биологии, социологии и многих-многих других сферах человеческой деятельности.

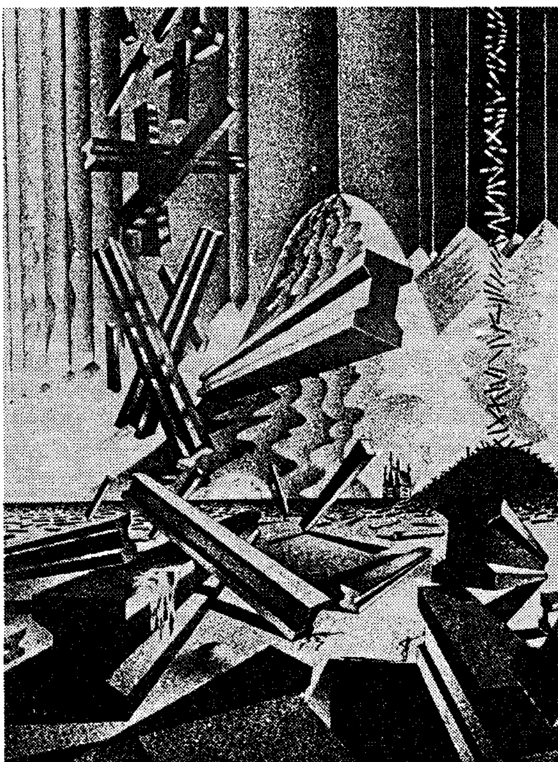


Рис. 3.17. Рисунок проф. МГУ А. Т. Фоменко.
«...холмы и горы, напоминающие нормальное распределение»
Источник: Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. М.: Изд-во МГУ, 1992

Математический аккомпанемент

Множитель $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в формуле (1) своим происхождением обязан условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\,dx = 1$ плотности распределения $y(x)$ и равенству

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}. \qquad (*)$$

Приведем изящное доказательство формулы (*), принадлежащее Симеону Дени Пуассону (1781–1840). «Изюминка» этого доказательства состоит в том, чтобы перейти от одинарного интеграла к двойному.

Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

нам поможет двойной интеграл

$$D = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

С одной стороны, переходя к полярным координатам, получаем

$$D = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d}{dr}\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right) dr = 2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi.$$

С другой стороны,

$$D = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 = I^2.$$

Отсюда следует формула (*).

Глава 4

ЧИСЛО π И НАУКА О ПРИРОДЕ

Изучает физик π-мезоны,
И, наверно, в этом есть резон...

Евгений Сазонов

...стало ясно, что можно ввести единственный «поправочный коэффициент», в который прячется незнание факторов, не учтенных в теории (или нежелание думать о них далее). Ну, конечно, физику приятно разделить теоретические данные не на 3 или 4, а на π или 2π — в этом есть что-то фундаментальное.

А. Стасенко. Зачем Галилею песочница // Квант. 2001. № 3. С. 42–44

Круг и шар представляют собой идеально совершенные и, вместе с тем, достаточно сложные геометрические объекты — точное определение их характеристик (длины окружности, площади круга, площади сферы и объема шара) требует привлечения понятий математического анализа. Тем более удивительно, что эти сложные геометрические объекты в то же время выступают простейшими моделями многих физических объектов и явлений.

Во все стороны космоса излучает Солнце плазму — «солнечный ветер». Скорость этого ветра, а также температура, плотность и другие характеристики меняются в разных точках пространства. Однако естественно предположить, что процесс истечения солнечного ветра служит отражением геометрии Солнца, обладает центральной симметрией. Отсюда в модели движения солнечной плазмы вместо трех пространственных координат достаточно рассмотреть одну: r — расстояние до центра Солнца. Уравнения, описывающие динамику процесса, при этом существенно упрощаются.

Число π в физике не менее популярно, чем в математике. Оно возникает при оценке объемов и площадей цилиндрических тел: труб, цистерн, резервуаров; при расчете плотности потока излучения от точечного источника или цилиндрического проводника, при оценке квантовых состояний атома, при вычислении параметров гармонических колебаний и во многих-многих других случаях. Отсылая читателя за более подробной справкой к руководствам, лекциям и справочникам по физике, здесь мы остановимся лишь на некоторых эпизодах «биографии» π, имеющих отношение к этой прекрасной науке.

§ 39. π-теорема

Формула $\pi = \frac{C}{d}$ говорит о том, что число π прямо пропорционально длине окружности и обратно пропорционально ее диаметру.

Из ответов на экзамене

Так, свидетельствуя свои симпатии к числу π, физики назвали теорему теории размерностей [Яво]. Речь в π-теореме идет о построении таких комбинаций размерных физических величин, которые сами, как и число π, являлись бы безразмерными. Всякое соотношение между n размерными величинами, для измерения которых использовано k основных единиц измерения, можно представить в виде соотношения между $n-k$ безразмерными комбинациями этих величин.

Пусть, например, требуется найти формулу для циклической частоты колебаний струны ω, имеющей размерность $\left[\frac{1}{\text{с}}\right]$. Очевидно, что частота колебаний зависит от длины l струны размерности [м], ее массы m размерности [кг] и силы натяжения струны F размерности $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right]$. Для измерения этих величин используется три основных единицы: *метр, килограмм, секунда*, следовательно, соотношение между четырьмя величинами ω, l, m, F можно представить в виде одной безразмерной комбинации $\frac{F}{\omega^2 lm}$, стало быть, $\omega = k\sqrt{\frac{F}{lm}}$, где k — некий безразмерный коэффициент. Точный подсчет показывает, что для колебания основного тона струны $k = \pi$ (к неожиданному появлению π на страницах этой книги мы уже привыкли).

Математический аккомпанемент

Точная постановка задачи о колебании струны длины l формулируется следующим образом: найти решение *волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее *начальным условиям*: $u(x, 0) = f(x)$; $u'(x, 0) = g(x)$ и *граничным условиям*: $u(0, t) = 0$; $u(l, t) = 0$, где t — время; x — координата точки струны в положении равновесия; $u(x, t)$ — неизвестная функция, выражающая отклонение точки с координатой x в момент времени t от положения равновесия; $a^2 = \frac{F}{\rho} = \frac{Fm}{l}$ — коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства струны; F — сила натяжения струны, ρ — линейная плотность струны; m — масса струны.

Решение этой задачи имеет вид [Вла]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

где

$$u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(a_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right); \tag{$*$}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx; \quad b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Из ($*$) следует, что основной тон $u_1(x, t)$ струны ($n = 1$) имеет частоту колебаний

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \pi\sqrt{\frac{F}{lm}}.$$

---

§ 40. «Закон сохранения» π

— Странное явление, — сказал Иа-Иа. — Это мой дом и я сам построил его там, где я говорил... Видимо, ветер перенес его прямо через рощу и тут опустил. И он стоит здесь целый и невредимый. Пожалуй, местами он даже лучше!

А. Милн. Винни-Пух и все-все-все

Сейчас вылезут пипополамы.

Однажды на лекции (буклет МФТИ)

«Золотое правило» механики: «Насколько выиграешь в силе, настолько проиграешь в расстоянии» хорошо знакомо не только теоретикам, но и успешно усвоено практиками, особенно теми, кому приходилось носить и перемещать чемоданы, сумки и рояли.

С другим законом — законом сохранения энергии — вечно борются энергичные изобретатели «вечного двигателя».

Закон сохранения массы, закон сохранения заряда, закон сохранения количества движения... — этот ряд можно продолжить, включив в него не менее фундаментальный «Закон сохранения» π. Этот закон гласит:

«Если мы изгоним число π из одной формулы, то оно неизбежно появится в другой».

В справедливости этого закона можно убедиться, даже не покидая «родных чертогов» числа π — математики. Например, постараемся «изгнать» π из тригонометрии. Это сделать проще простого: давайте будем измерять углы не в радианах, как это предложил Эйлер, а в градусах, как это традиционно делали в древней Месопотамии. Теперь вместо того, чтобы записывать решение уравнения $\sin x = 1$ в виде $x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, будем писать $x = 90^\circ \pm 360^\circ n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Точно так же применим это соглашение к другим тригонометрическим функциям. В результате от π в тригонометрии не останется и следа. Благодать!...

Однако рано праздновать победу: π неизбежно появится в других формулах — там, где раньше его не было. Так, формула длины дуги окружности $l = R\alpha$ радиуса R с центральным углом α радиан теперь примет вид $l = \dfrac{\pi R\alpha^\circ}{180^\circ}$, где α° уже, естественно, измеряется в градусах. Площадь сектора, ограниченного этой дугой, вместо $S = \dfrac{\alpha R^2}{2}$ (угол α измеряется в радианах) теперь запишется:

$$S = \frac{\pi R^2\alpha^\circ}{180^\circ}$$

(угол α° измеряется в градусах). Не спасет и переход к иным единицам измерения. Если вместо градусов, например, использовать доли полного угла (полный угол принимается за 1), то длина дуги окружности с углом α долей ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) примет вид: $l = 2R\pi\alpha$, а площадь сектора — $S = \alpha\pi R^2$.

Дальше — больше. В математическом анализе формула $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ (α в радианах) преобразуется в

$$\lim_{\alpha^\circ\to 0} \frac{\sin\alpha^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

(α° — в градусах), $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\pi$ (α — в долях полного угла). Ряд Тейлора для функции $\sin x$ в точке $x = 0$, имевший компактную запись при радианной мере x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

теперь примет громоздкий вид:

$$\sin x^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}x^\circ - \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)^3 \frac{x^{\circ 3}}{3!} + \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)^5 \frac{x^{\circ 5}}{5!} + \ldots$$

(x° — в градусах);

$$\sin x = 2\pi x - \frac{(2\pi x)^3}{3!} + \frac{(2\pi x)^5}{5!} - \frac{(2\pi x)^7}{7!} + \ldots$$

(x — в долях полного угла).

И так далее.

В науке о природе ситуация с числом π не лучше. Предположим, мы отступим от стандартов международной системы единиц СИ и запишем закон Кулона о силе взаимодействия точечных зарядов $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ без числового множителя $\frac{1}{4\pi}$: $\frac{q_1q_2}{\varepsilon_0 r^2}$. И что же? Если в системе СИ напряженность электрического поля плоского конденсатора была $\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, а его электрическая емкость $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, то теперь эти выражения примут вид: $\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — для поля и $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{4\pi d}$ — для емкости конденсатора. Если напряженность электрического поля бесконечной заряженной плоскости была $\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, то теперь она станет равной $\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$; если объемная плотность энергии электрического поля была $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$, то теперь — $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{8\pi}$, и т. д. Здесь умышленно не объясняются названия входящих в эти формулы физических величин, поскольку они используются только для демонстрации «закона сохранения» π (физикам они хорошо известны).

На «закон сохранения» π, по-видимому, первым обратил внимание английский физик Оливер Хевисайд (1850–1925), найдя ему очень остроумное применение. «Раз π все равно из физических формул не изгонишь, — примерно так рассуждал Хевисайд, — то давайте мы его изгоним хотя бы из тех формул, которые чаще всего встречаются на практике». Идея Хевисайда была поддержана другим авторитетным физиком Г. А. Лорентцем (1853–1928). Вот так и появился в системе СИ в записи закона Кулона, а также другого важного закона Био—Савара—Лапласа множитель $\frac{1}{4\pi}$, с первого взгляда не имеющий к этим законам никакого отношения. Зато π

совсем исчезло в других формулах, в частности, в знаменитых уравнениях Джеймса Клерка Максвелла (1831–1897), лежащих в основе современной теории распространения электромагнитных волн — стало быть, во всех связанных с этой теорией практических вопросах радиовещания, телевидения и радиолокации.

«Группе французских физиков-экспериментаторов во главе с доктором де Магогом удалось измерить число π с точностью до одной миллионной процента. Они измерили постоянные Планка h и $h = \dfrac{h}{2\pi}$, определив таким образом 2π. Остальное было делом техники.»

Квант. 1986. №11. С. 59.

«Военные пользуются единицей измерения углов, называемой „тысячная“. По определению, тысячная — это $\dfrac{1}{3\,000}$ развернутого угла.... Чему равно число π по мнению военных?»

Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия. МЦНМО, 2000. С. 17.

§ 41. π и физические константы

Литтльвуд однажды воскликнул на лекции для студентов Висконсинского университета: «Как было бы здорово, если бы все эти множители $\dfrac{1}{2\pi}$ были единицей, мне так надоело писать их!» — и тут же забыл об их существовании.

Л. Янг [Янг]

Французский живописец Поль Сезанн (1839–1906) утверждал, что «все в мире лепится из шара, конуса и цилиндра». Некоторые любители физики и даже профессионалы пытаются «лепить» фундаментальные физические постоянные из числа π. Так, Херри Уотсон выразил с помощью числа π отношение масс протона и электрона:

$$4\pi\left(4\pi - \frac{1}{\pi}\right)\left(4\pi - \frac{2}{\pi}\right) = 1836{,}15\ldots$$

(данные сайта www.astro.univie.ac.at/~wasi/PI).

Москвич Юрий Иванович Рогозин нашел довольно точную комбинацию констант π, e и Φ (*число Фидия* — см. «Число π и „золотое сечение“», Гл. 3), приближающую величину $\dfrac{1}{\alpha}$, где α — физическая постоянная тонкой структуры: $\dfrac{1}{\alpha} \approx \dfrac{256e}{\pi\Phi}$. Еще более точную аппроксимацию (с точностью 0,002 %) обнаружил доктор химических наук И. М. Шермергорн [Шер]: $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{3}{5}\pi^2 e^\pi$. Очень близкое к π число 3,14153 можно получить, обратив величину $\sqrt{0{,}101325}$, где под знаком корня содержится значение стандартного атмосферного давления, выраженного в мегапаскалях (Джонатан Брэдшоу, данные сайта www.joyof pi.com).

Подобные манипуляции с числами можно отнести к разряду «цифровой эквилибристики». Арифметика и алгебра предоставляют в наше распоряжение достаточный арсенал чисел и операций, чтобы с их помощью, располагая временем и прилежанием, с произвольно высокой точностью приблизить одни константы через комбинацию других. Скрывается ли в этих приближениях сколь-нибудь значимый смысл? — Сомнительно. Скорее всего, это некая забава, игра с числами с всенепременным участником подобного рода представлений — числом π.

Н. Вансерг, автор иронической статьи «Математизация» в сборнике [Физ], дает шуточные советы, как в глазах читателя поднять свой научный престиж. Один из способов — использовать общепринятые математические символы для обозначения отвлеченных величин:

«Каждый школьник знает, что такое π, и это поможет вам оторваться от противника. Бедняга читатель будет долго автоматически умножать все на 3,1416, прежде чем поймет, что π — это осмотическое давление. Если вы будете осторожны и не проговоритесь раньше времени, это обойдется ему часа в полтора».

§ 42. Почему $\pi^2 \approx g$?

Чудак-математик
В Германии жил.
Он хлеб с колбасою
Случайно сложил.
Затем результат
Положил себе в рот.
Вот так
Человек
Изобрел
Бутерброд.

Генрих Сапгир. Бутерброд

В XVII веке Христиан Гюйгенс (1629–1695) установил формулу для периода T малых колебаний математического маятника — материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длины l:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

g — ускорение земной тяжести. Гюйгенс не только получил эту формулу, но и предложил использовать ее для определения эталона единицы длины. В качестве эталона Гюйгенс предлагал взять длину нити l математического маятника, совершающего одно колебание ровно за 2 секунды. Удобство такого подхода очевидно — мы в любой момент можем изготовить импровизированный маятник, подвесив на нити небольшое массивное тело. Таким образом, прибор для изготовления эталона практически всегда находится под рукой.

Если бы предложение Гюйгенса о выборе единицы длины было принято, то при длине $l = 1$ и периоде $T = 2$, как следует из его формулы, мы имели бы $\pi^2 = g$ — точное равенство! Но, к сожалению любителей неожиданностей и к счастью остальных жителей Земли, наша родная планета — не идеальный шар. Мало того, что она сплюснута с полюсов, так дополнительно к этому она еще и взборождена высокими горами и глубокими океанами. В итоге получается, что константа g — не «чистокровная» константа, она зависит как от географической широты, так и от неоднородности залегающих в земле пород. Таким образом, вместо точного равенства $\pi^2 = g$ на просторах нашей планеты будет выполняться лишь приближенное $\pi^2 \approx g$.

Постойте, но ведь у нас сейчас принят другой эталон длины, при чем здесь формула Гюйгенса?

Ревизию метрической системы мер предприняла молодая французская республика после Великой революции 1789 года. Две комиссии, возглавляемые Ж. Л. Лагранжем (1736–1813) и П. С. Лапласом (1749–1827), рассмотрели проект реформы системы мер. Этот проект содержал предложение будущего известного дипломата епископа Талейрана (1754–1838): выбрать в качестве единицы длины длину маятника с периодом колебаний $T = 2$ секунды на широте 45°. Лаплас же настаивал на том, чтобы размеры Земли, рассчитанные исходя из принимаемого эталона длины, были кратны степеням десяти. В результате компромисса решили за единицу длины принять 1/10 000 000 часть четверти парижского меридиана, отличающуюся всего на 0,6 % от значения единицы длины Талейрана—Гюйгенса.

Этот эталон продержался достаточно долго, лишь в 1960 году его заменили на более совершенный, связанный с волновыми свойствами света. Однако на приближенное равенство $\pi^2 \approx g$ эти новшества уже никак не повлияли [Кот].

Из экзаменационных ответов:

«Период колебаний математического маятника при переезде из Москвы на Северный полюс изменится, потому что изменится число π».

Квант. 1982. № 11. С. 25

«После многочисленных теоретических и экспериментальных исследований сотрудники института ВНИИПОЧЕМу установили замечательный факт — число Пи и ускорение свободного падения g связаны с большой точностью соотношением $\pi^2 = g$. Известно, что ускорение свободного падения зависит от широты. В настоящее время ведутся эксперименты по определению зависимости числа Пи от того же параметра».

1 апреля // Квант. 1978. № 4. С. 60

§ 43. π и модель падающего бутерброда

На рис. 4.1 показан бутерброд в вертикальном положении, обнаруженный на высоте H от уровня пола. В момент обнаружения бутерброд имел вертикальную скорость v и постоянную угловую скорость вращения ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр тяжести бутерброда. Предполагаем, что этот центр находится на одинаковом удалении от верхнего и нижнего краев бутерброда. Ну и конечно же, как водится в подобных физических моделях, сопротивлением воздуха пренебрегаем. Какой стороной бутерброд шлепнется на пол?

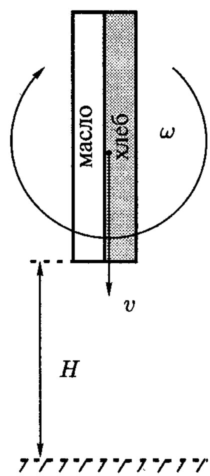


Рис. 4.1

Ответить на этот вопрос нам поможет некоторый расчетный спектр расстояний. Рассмотрим квант времени $\tau = \dfrac{\pi}{\omega}$, за который бутерброд совершает пол-оборота. Пронумеруем эти кванты времени по-порядку $n = 1, 2, 3, \ldots$, начиная с момента обнаружения бутерброда, и рассмотрим расстояние, пролетаемое бутербродом в n-ый по счету квант времени. Это расстояние равно

$$L_n = \frac{g(n\tau)^2}{2} + vn\tau - \frac{g[(n-1)\tau]^2}{2} - v(n-1)\tau = \frac{g\tau^2}{2} \cdot (2n-1) + v\tau,$$

здесь g — ускорение силы тяжести. Кроме того, положим $L_0 = 0$. Итак, если для некоторого натурального k выполняется неравенство

$L_{k-1} < H < L_k$, причем k– нечетное, то бутерброд шлепнется маслом вверх, если же k — четное — ну что же, тогда не повезло! — маслом вниз. Если случится равенство $H = L_k$, то бутерброд может завалиться как в одну, так и в другую сторону, но, скорее всего, маслом вниз в силу его прилипания.

Конечно, прогностическую ценность наша модель имела бы в том случае, если бы мы предложили также расчетные соотношения для входных параметров ω и v, но это уже другая интересная задача, выходящая за рамки этой книги.

§ 44. Динамическая биллиардная система Г. А. Гальперина

Это великий закон небесных тел: чем больше, тем еще больше.

Владимир Казаков. Ошибка живых

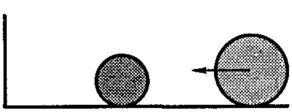


Рис. 4.2

На прямой линии между шаром массы M и абсолютно упругой стенкой расположен шар массы m, $m < M$ (рис. 4.2). Размеры шаров несущественны, и для простоты их можно считать точечными частицами. Пусть в некоторый момент времени более массивный шар начал двигаться с произвольной постоянной скоростью в сторону менее массивного шара и, упруго столкнувшись с ним, приводит его в движение. После этого менее массивный шар совершает серию поочередных столкновений со стенкой и с более массивным шаром. Если задаться некоторым натуральным числом N и подобрать массы шаров таким образом, чтобы выполнялось равенство $\frac{M}{m} = 100^N$, то общее количество ударов в системе (то есть число столкновений между шарами плюс число отражений шара m от стенки) равно [Гал]

$$3\underbrace{14159265358979323\ldots}_{N \text{ десятичных знаков числа } \pi}$$

По состоянию исследований «тонкой структуры» числа π на 2003 год, этот результат справедлив по крайней мере для $N \leqslant 10^{11}$. Согласно [Gal], точное число суммарных столкновений в системе равно $\left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg}(10^{-N})}\right]$. Связь этой величины с числом π обсуждается в задаче 7 § 37.

§ 45. Эх вы сани, мои сани...

Она всегда появляется, если ее нету.

Владимир Казаков. Ошибка живых

Нет ничего удивительного в том, что число π возникает всякий раз, когда мы пытаемся дать математическое описание шарообразных форм и вращательных движений. Но как не изумиться неожиданному появлению числа π в формулах, на первый взгляд не имеющим никакого отношения к кругу?

Рассмотрим фрагмент задачи Ф872 профессора Сергея Сергеевича Кротова (Квант. 1984. № 4. С. 33). Предположим, по гладкому льду со скоростью v_0 скользят сани массой m и длиной l. На своем пути сани встречают асфальт и, частично въехав на него, от резкого торможения останавливаются. Требуется найти время t_0 от начала торможения до полной остановки саней. Коэффициент трения саней об асфальт μ.

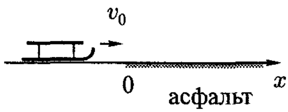


Рис. 4.3

Введем систему координат, как на рис. 4.3. Второй закон Нютона для саней в проекции на ось x запишется:

$$F_{тр} = mx'',$$

здесь $F_{тр}$ – сила трения, действующая на сани при их торможении. Масса находящейся на асфальте части саней длиной x равна $\dfrac{mx}{l}$, поэтому действующая на сани в этот момент сила трения равна $F_{тр} = -\mu\dfrac{m}{l}xg$. Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим уравнение

$$mx'' + \mu\frac{m}{l}gx = 0. \qquad (1)$$

Решение этого дифференциального уравнения будем искать в виде

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

где x_0, ω, φ — некоторые постоянные, подлежащие определению. Непосредственная подстановка решения (2) в уравнение (1) позволяет определить $\omega = \sqrt{\dfrac{\mu g}{l}}$. Для нахождения постоянных x_0 и φ вспомним, что в момент $t = 0$, когда сани начинают переходить со льда на асфальт, $x(0) = 0$ и $x'(0) = v_0$, то есть

$$\begin{cases} x_0 \sin\varphi = 0, \\ x_0\omega\cos\varphi = v_0. \end{cases}$$

Отсюда $\varphi = 0$; $x_0 = \dfrac{v_0}{\omega}$. Итак,

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t.$$

Нас интересует момент времени t_0, когда скорость обращается в нуль: $x'(t_0) = 0$, следовательно, $v_0 \cos\omega t_0 = 0$. Значит,

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Так нежданно-негаданно число π появляется в выражении для времени тормозного пути. Согласитесь: не зная теории, догадаться об этом можно, разве что кубарем скатываясь с саней на асфальт!

§ 46. Крутится-вертится, хочет... нырнуть

Чем ниже моя голова, тем глубже мои мысли.

Льюис Кэрролл. Алиса в Зазеркалье

Любопытное описание физического прибора для экспериментального решения алгебраических уравнений нашли Г. Новинский и В. Хомазнюк в старом журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» № 348 за 1903 год. Этой находкой они поделились с читателями журнала «Квант» [Нов]. Идея прибора, получившего название *машины Меслина* по имени придумавшего ее изобретателя весьма остроумна и основана на использовании специально изготовленных тел вращения T_k. Вращая дугу кривой

$$y = \sqrt{\frac{kx^{k-1}}{\pi}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

вокруг оси Ox при $0 \leqslant x \leqslant X$, получим (см. формулу (4) в «Как запугать читателя куриным яйцом») тело T_k объемом X^k. Если это тело подвесить на рычажных весах на расстоянии a_k от точки опоры (при $a_k < 0$ — слева, а при $a_k > 0$ — справа), то при опускании его в воду на глубину X появится выталкивающая сила, момент которой равен a_kX^k. Поэтому выражение

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = 0 \tag{1}$$

можно рассматривать как условие равенства нулю алгебраической суммы моментов выталкивающих сил на тела T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

подвешенных соответственно на расстояниях $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и одновременно опущенных в воду на глубину X. Выталкивающий момент, соответствующий свободному члену a_0, имитируется специально подвешенным грузиком. Дополнительным грузом, создающим нужный момент, можно добиться также того, чтобы весы первоначально находились в равновесии.

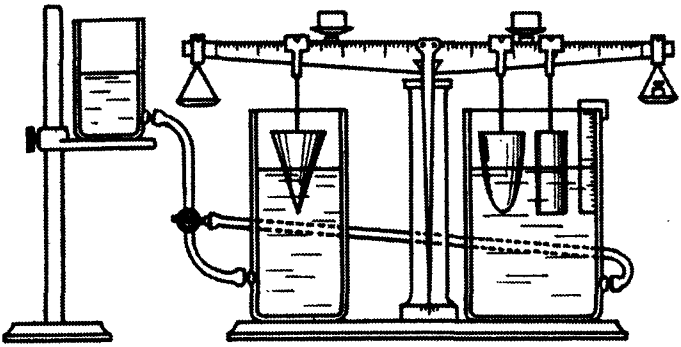


Рис. 4.4

Работу машины Меслина можно сравнить с погружением батискафа (рис. 4.4). Опускаем систему подвешенных на весах тел T_k все глубже. Каждый раз, когда наблюдается равновесие плечиков, фиксируем глубину погружения X, которую объявляем решением уравнения (1).

§ 47. Какое небо голубое!

И вдруг увидели: нет неба!

Владимир Казаков. Ошибка живых

Число π можно обнаружить во многих физических формулах, описывающих те или иные физические явления. Обратим внимание на одну из таких формул, служащую источником распространенного заблуждения.

Закон Стретта Джона Рэлея (1842–1919) описывает связь между интенсивностью пучка света до (I_0) и после (I_θ) его рассеяния единичным объемом идеального газа с показателем преломления α, находящимся на расстоянии R от точки наблюдения [Яво]:

$$I_\theta = 2\pi^2 \frac{(\alpha - 1)^2}{R^2 N \lambda^4} (1 + \cos^2 \theta) I_0.$$

Здесь θ — угол между направлением пучка света и направлением наблюдения,

N — число молекул газа в единичном объеме, λ– длина световой волны.

На этот закон обычно ссылаются, отвечая на стандартный детский вопрос: «Почему небо голубое?». Стандарнтный взрослый ответ при этом такой:

> «Рассеяние солнечного света по закону Рэлея обратно пропорционально длине световой волны в четвертой степени. Синий цвет рассеивается примерно в 16 раз сильнее красного. Оттого небо синее, голубое» [Хим];

> «Голубой свет, частота которого примерно вдвое выше частоты света у красного конца спектра, рассеивается значительно интенсивнее, чем красный цвет. И, взглянув на небо, мы видим изумительную синеву!» [Фей].

Однако же длина волны фиолетового цвета $\lambda \approx 4 \cdot 10^{-7}$ м меньше длины голубого цвета $\lambda \approx 4{,}7 \cdot 10^{-7}$ м. Согласно закону Рэлея лучи фиолетового цвета должны рассеиваться примерно в 2 раза интенсивнее голубых. Почему же тогда небо над головой не иссиня-фиолетовое, а радующей сердце и глаз мягко-голубой расцветки?

Тому имеется две причины. Во-первых, в спектре солнечного света фиолетовых лучей гораздо меньше, чем синих, а во-вторых, на фиолетовые лучи глаз человека реагирует примерно в 3 раза слабее, чем на голубые [Вар].

§ 48. Освещенность и число π

— А я знаю, как получить бесконечность: нужно одно зеркало поставить напротив другого.

Таня Ж., 8 лет

В старину был популярен следующий способ гадания. Желая увидеть какие-то таинственные образные ассоциации (будущего супруга, погибшего родственника и т. п.), гадающий сооружал прибор, состоящий из двух параллельных зеркал, ровно посередине между которыми устанавливалась горящая свеча (см. рис. 4.5). Если долго и пристально вглядываться в каскад отражений свечи, то при некотором психологическом настрое в зеркальной глубине может почудиться некое туманное изображение.

Виктор Борисович Дроздов из Рязани обнаружил, что освещенность в точке O (основании перпендикуляра, опущенного из огонька свечи на плоскость зеркала) чудесным образом выражается через число π.

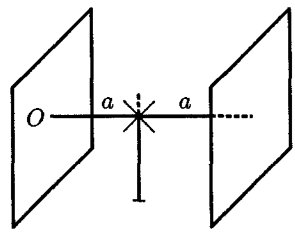


Рис. 4.5

Пусть сила света свечи равна J, расстояние от нее до зеркал равно a. Тогда освещенность E в точке O из-за многократных переотражений в двух зеркалах равна:

$$E = \frac{J}{a^2} + \frac{J}{(3a)^2} + \frac{J}{(5a)^2} + \frac{J}{(7a)^2} + \ldots =$$

$$= \frac{J}{a^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2 J}{8a^2}$$

(о выражении суммы обратных степеней нечетных чисел через число π см. «„Букет“ разложений» гл. 3, формула (4)).

§ 49. π и теория относительности

— Три мартышки в тропическом лесу — это много или мало?
— Мало.
— А три мартышки на вашей кухне?
— О, это много!

Анекдот

Разработка теории относительности принесла всемирную славу Альберту Эйнштейну (1879–1955). Из результатов этой теории, в частности, следует, что стержень длины l, движущийся со скоростью v относительно неподвижного наблюдателя, сокращается до размера

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad (1)$$

где c — скорость света в вакууме (приблизительно 300 000 км / с).

В научно-популярной трилогии «Приключения мистера Томпкинса» [Гам] другого замечательного физика-теоретика Георгия Гамова (1904–1968) можно найти описание любопытного мысленного эксперимента, проливающего новый свет на результаты измерения числа π.

Представим равномерно вращающуюся вокруг своей оси большую круглую платформу, на которой два экспериментатора пытаются произвести измерения длин с помощью некоторого эталона длины — небольшого мерного стержня. На мерный стержень экспериментатора, измеряющего длину диаметра платформы, вращение не влияет, поскольку движение стержня всегда перпендикулярно его длине. С другой стороны, мерный стержень экспериментатора, измеряющего длину окружности платформы, всегда будет сокращен в соответствии с законом (1). (Сама платформа предполагается неизменной.) В результате значение длины окружности получится несколько завышенным, чем в случае невращающейся платформы. Следовательно, несколько увеличенным окажется и значение π как частное от деления двух измеренных значений — длины окружности платформы и ее диаметра.

Оцените эффект увеличения числа π, связанный с релятивистским сокращением мернога эталона длины в соответствии с формулой (1), пользуясь следующими исходными данными. Радиус платформы равен радиусу орбиты Земли; линейная скорость экспериментатора на краю вращающейся плат формы равна скорости движения Земли по орбите вокруг Солнца и равна примерно 30 000 км/с.

«Недавно замечательный американский физик Р. Фейнман высказал важную космологическую гипотезу:

$$1 \text{ год} = \pi \cdot 10^7 \text{ сек}, \tag{1}$$

где π — число Архимеда. Докажем справедливость этой интересной гипотезы.

Известно, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, радиус которой равен $R = 150$ млн.км. Орбитальная скорость Земли равна $v = 30$ км/сек. Если бы с такой постоянной скоростью Земля двигалась не по самой орбите, а по ее диаметру, то она прошла бы от одного „края“ орбиты до другого за время

$$t = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^6}{30} = 10^7 \text{ сек}. \tag{2}$$

По определению один год есть время обращения Земли по ее орбите вокруг Солнца. Понятно, что это время относится к найденному выше времени t как длина окружности орбиты к ее диаметру. Последнее отношение для всякой окружности, согласно Архимеду, равно π. Отсюда следует, что 1 год $= \pi t$. Подставляя сюда значение t из (2), приходим к формуле (1)...

Для проверки справедливости гипотезы Фейнмана был поставлен следующий эксперимент: с помощью настенных часов „Маяк“ мы определили продолжительность 1975 года. Она оказалась равной $3{,}15 \cdot 10^7$ секунд. Формула (1) дает $3{,}14 \cdot 10^7$ секунд. Мы склонны думать, что полученное расхождение теоретических и наблюдаемых данных есть результат одного из двух следующих *эффектов: а) орбита Земли отличается от круговой; б) пространство-время искривлено....»*

1976 год, январь, Бюраканская обсерватория // Квант. 1976. № 2. С. 27.

Математический аккомпанемент

«Релятивистское» значение π в данном случае равно

$$\pi' \approx \frac{10}{\sqrt{99}}\pi \approx 3{,}157\ldots .$$

§ 50. Внеземные цивилизации и число π

Математик уверен, что как само число π, так и его двоичная запись суть органические компоненты мирового порядка.

Ф. Дэвис, Р. Херш. Математический опыт

Если я принимаю сигнал π, мне уже не надо вспоминать, чему равно это π.

Генри Каттнер. Маскировка

— Мне ли бриллиантов не знать, — отвечала Аннушка.

Михаил Булгаков. Мастер и Маргарита

Предположим, не только мы хотим установить контакт с разумными существами других звездных систем, но и они с нами. На какую частоту следует настроить наши приемники, чтобы шансы на контакт были максимальными?

Петр Васильевич Маковецкий в остроумной и увлекательной книге «Смотри в корень!» [Мак] показывает, что искомая частота должна равняться

$$f = \pi f_H = 4\,462\,336\,274{,}9288\ldots \text{Гц},$$

где $f_H = 1\,420\,405\,751{,}7864\ldots$ Гц — частота нейтрального водорода. Использовать частоту f_H впервые предложили в 1959 году Дж. Коккони и Ф. Моррисон. Выбор ее продиктован тем, что водород должен быть знаком каждому инопланетянину, поскольку заполняет всю нашу Галактику. Правда, последнее примечательное обстоятельство создает и определенные помехи. Более того, из-за различия в движении отдельных облаков водорода частота межзвездного водорода размазана по оси частот на ± 200 кГц вокруг f_H. Поэтому Коккони и Моррисон советуют осуществлять поиски не точно на частоте f_H, а в ее окрестности порядка ± 1 МГц.

Предлагая частоту f, П. В. Маковецкий выдвигает основополагающий тезис: «Природа не умеет умножать частоту на иррациональное число!». Но этого мало: «Число π — один из главных признаков нашей цивилизации и нам подобных. Это пароль разума, подобного нашему. Цивилизация, не знающая π, не имеет математики и радиотехники. Она не может сегодня вступить с нами в контакт, да с нею пока что нам, видимо, и не о чем говорить» ([Мак]. С. 352).

В 1997 году американская фирма Artizen выпустила художественно-фантастический фильм режиссера Дарана Рановски «Пи». Фильм назван так не случайно — число π в нем играет роль «пароля разума» при установления контакта с некоторой загадочной внеземной цивилизацией. Аналогичный сюжет лег в основу фантастической повести Карла Сагана «Контакт».

§ 51. π и ритмы Вселенной

Я всматриваюсь в вас, о числа,
И вы мне видитесь одетыми в звери, в их шкурах,
Рукой опирающимися на вырванные дубы,
Вы держите единство между змееобразным движеньем
Хребта Вселенной и пляской коромысла.

Велимир Хлебников. Числа

Вселенная началась с π.

Карл Саган

Число π не случайный гость в космологии — науке о строении и эволюции Вселенной. В 1923 году ленинградский физик Александр Александрович Фридман (1888–1925), основываясь на общей теории относительности Эйнштейна и исследуя уравнения пространственно-временной динамики Вселенной, получает следующую связь между радиусом заключающего Вселенную шара R и временем t ([Вей], с. 516):

$$\begin{cases} R = R_0(1 - \cos\eta); \\ t = \dfrac{a}{2}(\eta - \sin\eta). \end{cases}$$

Переменная η здесь — параметр (физики называют его *дуговым временем*), R_0 — текущее значение радиуса шара, коэффициент a был вычислен в 1929 году Э. Хабблом, $a = 13 \cdot 10^9$ лет. Эти соотношения — не что иное, как параметрическая запись *циклоиды*.

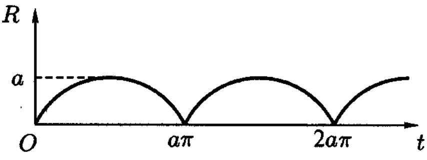


Рис. 4.6

На рис. 4.6 показан фрагмент ее графика. Примечательно, что число π играет не последнюю роль то во вспыхивающей, то в угасающей жизни Вселенной: согласно модели Фридмана, Вселенная пульсирует, последовательно расширяясь и сжимаясь в моменты времени $a\pi, 2a\pi, 3a\pi, \ldots$ В момент, когда нам посчастливилось созерцать звездное небо, астрономы наблюдают «разбегание» галактик, и это дает им повод заключить, что Вселенная пока находится на стадии расширения (текущий возраст Вселенной можно расчитать по формулам (1), полагая в них $R = R_0$).

В завершение «космической» темы числа π – выдержка из древних станц, привлекших внимание Елены Петровны Блаватской (1831–1891):

> «Из Лучезарности Света — Луча Вечной Тьмы — устремились в пространстве Энергии, вновь пробужденные: Единый из Яйца, Шесть и Пять. Затем Три, Один, Четыре, Один, Пять, Дважды Семь, Сумма всего» [2].

Ряд названий цифр в этой цитате: 3, 1, 4, 1, 5 — не что иное, как ряд десятичного разложения π с точностью, отмеченной профессором Г. Глейзером в древних текстах Библии. О значении, которое придавалось этому ряду эзотерическим синтезом науки, религии и философии, свидетельствует продолжение все той же Станцы IV: «И эти суть Естества, Пламена, Начала, Строители, Числа, Аруна, Руна и Сила или же Божественный Человек—Сумма—Всего. И от Божественного Человека произошли Формы, Искры, Священные Животные и Вестники Священных Отцов...»

[2] *Блаватская Е. П.* Тайная доктрина. Т. 1. Ч. 1. Космическая эволюция. Л.: 1991. С. 67. Подлинность цитируемой Станцы IV, как и ее древность, требуют исследования.

Глава 5

ТАКОЕ РАЗНОЕ π

Сивилла, пожевав листья лавра, впала в транс и ответила стихами: «Займись математикой и музыкой.»

Торнтон Уайлдер. Теофил Норт

§ 52. π-человек

Начальник может поставить вокруг лагеря $2\pi R$ человек.

Из решений, присылаемых в «Задачник „Кванта"»

«Пи-Человек» — так называется рассказ современного американского фантаста Альфреда Бестера [Бес]. Главный герой этого рассказа вел себя странно по отношению к числам. Сумму в 57 075 долларов 94 цента он выбросил из окна, прокомментировав свой поступок так: «57 075 — изумительное число, но 94 цента...Фу! Уродуют весь баланс». В следующий раз он получает сдачу 1997 долларов: «Ух! Выбрасываю шесть долларов из окна и наслаждаюсь оставшимися 1991».

Похожее поведение легенда приписывает последователям школы древнегреческого философа и математика Пифагора (ок. 570–500 до н. э.). По преданию, пифагорейцы выбросили за борт корабля некоего Гиппазия из Метапонта после того, как он вывел их из душевного равновесия своим открытием иррациональных чисел. Это открытие шло вразрез с пифагорейским учением о сводимости всех явлений природы к целым числам или их отношениям.

В средние века наряду со словом irrationalis по отношению к числам в ходу был и другой приравниваемый к нему термин: surdus — *глухой*, или *немой*. Судя по такому названию, иррациональные числа средневековые магистры считали чем-то таким несуразным, что буквально «ни высказать, ни выслушать»...Мистика, да и только...

Не удивительно, что иррациональное число π американский фантаст выбрал символом своего экстравагантного персонажа. В беседе со следователем π-человек признается:

«— Вот говорят: экстрасенсорное восприятие, пси. А как назвать экстраформенное восприятие? Пи?

— Пик? Какой пик?

— Шестнадцатая буква греческого алфавита, обозначает отношение длины окружности к ее диаметру. 3,141592... Число бесконечно...бесконечно мучение для меня...»

Трансцендентное число π служит также символом неординарности (вспомним: transcendens — *выходящий за пределы*). Этой аналогией, конечно же, не преминули воспользоваться литераторы. Так, например, юмористы польского журнала «Пшекруй» братья Роек придумали книгу афоризмов с броским названием «Пи». Вот один из их афоризмов: «Отпуск в палатке очень хвалят комары» («Наука и жизнь», 1966, 8. С. 124).

В широком смысле π-человеком можно назвать и любого математика. У. У. Сойер в прекрасной книге «Прелюдия к математике» [Сой] среди качеств, которыми, по его мнению, должен обладать служитель «царицы наук», на первое место ставит дерзость ума, неординарность мысли и раскрепощенность фантазии.

§ 53. Человек-циркуль

И выросли перед братьями стены града великого, подобно тому, как вырастает график тангенса с аргументом, близким к $\frac{\pi}{2}$.

[Физ]

Согласно знаменитому канону Леонардо да Винчи, рост человека принято приравнивать к размаху его рук (рис. 5.1). Поэт, писатель и исследователь старины Андрей Чернов полагает это распространенным заблуждением. На самом деле размах рук всегда больше роста человека, что видно, например, на гравюре другого знаменитого художника: «Более изящно поступил педантичный Дюрер: он всего лишь согнул пальцы на обоих руках своего „образцового человека“» [Чер].

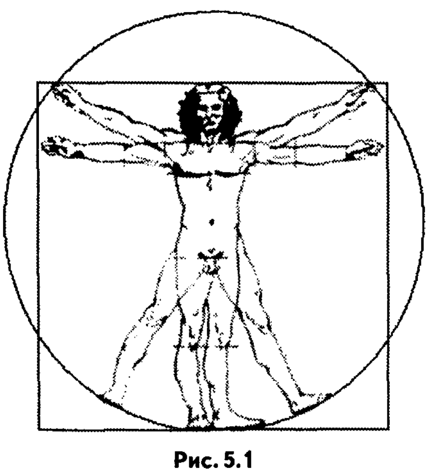


Рис. 5.1

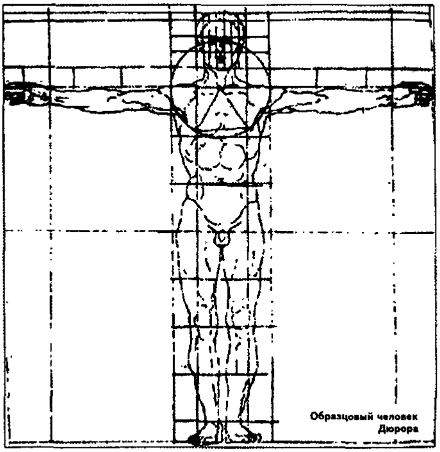


Рис. 5.2

По мнению Андрея Чернова, отношение размаха рук человека к его росту равно

$$\frac{2\Phi}{\pi} = 1{,}03\ldots,$$

где Φ — число Фидия (см. «Число π и золотое сечение»). А раз так, то число π неизбежно проникает в систему древнерусских саженей — мер длины, подобранных соразмерно человеку. Так, например, *маховая сажень*, равная размаху рук, в $\frac{2\Phi}{\pi}$ раз больше *ростовой сажени* (роста). Близкое к этому соотношение Андрей Чернов обнаружил в пропорциях ангела, изображенного на плане церкви Успения в Старой Ладоге (XII век). Используя это изображение в качестве мерного эталона, исследователь нашел и другие любопытные пропорции. Например, *сажень большая* (рост человека с поднятой рукой) так относится к ростовой сажени, как $\frac{\Phi^2}{\pi^2}+1$; *коса великая сажень* в $\frac{\sqrt{2}}{\pi-2}$ раз больше *косой новгородской по трости сажени* и т. п.

Как известно, системой саженей пользовались древние зодчие, возводя храмы на Руси. В частности, скрывающие число π пропорции содержит уже упоминавшаяся староладожская церковь Успения. Например, внутренний размер храма от западной стены до алтарной апсиды в π раз больше диаметра подкупольного барабана [Чер].

§ 54. Серебряное сечение и «Медный всадник»

«Только того и можно считать цивилизованным, кто знает число π.»

П. В. Маковецкий. Смотри в корень!

По аналогии с золотым сечением Андрей Чернов предлагает поименовать пропорцию, в основе которой лежит число π. А именно: точка M делит отрезок AB в *пропорции серебряного сечения*, если $\frac{AM}{MB} = \pi$ [Чер].

К своим архитектурным находкам серебряного сечения Андрей Чернов добавил литературоведческие. Он заметил, что в поэме А. С. Пушкина «Медный всадник» 477 строк. Если это число разделить на количество строк во второй части поэмы, то получится 3,16 — число, очень близкое к π. «До 3,14 не хватает одной строки» — пишет А. Чернов. И далее: «Позвольте, но ведь там есть один незарифмованный стих:

Погода пуще свирепела,
Нева вздувалась и ревела,
Котлом клокоча и клубясь,
И вдруг, как зверь остервенясь,
На город кинулась. Пред нею
Все побежало, все вокруг
Вдруг опустело — воды вдруг...

Где рифма к „перед нею"? Может, ее тоже смыло наводнением, как домик Параши?

Проверяю по черновому и беловому автографам. Есть строка! Ее нет только в писарской копии, которую, впрочем, Пушкин усердно правил. Бегу в Пушкинский дом сверяться с оригиналом.

Со всею силою своею
Пошла на приступ. Перед нею...

Потерянную писарем строку Пушкин, конечно, заметил. Но восстанавливать не стал. Без нее лучше». [Чер].

§ 55. π-эзия

...А ну-ка, проверю, помню я то, что знала, или нет...Значит так: четырежды пять — двенадцать, четырежды шесть — тринадцать, четырежды семь...Так я до двадцати никогда не дойду!

Льюис Кэрролл. Алиса в Стране чудес

Это мне напомнило один случай, другой, третий...

Владимир Казаков. Ошибка живых

Для запоминания каких-либо формул нли фактов часто обращаются к *мнемотехнике* — системе способов, облегчающих запоминание. Многим, наверное, известны поговорки для запоминания последовательности цветов радуги (*к*расный, *о*ранжевый, *ж*елтый, *з*еленый, *г*олубой, *с*иний, *ф*иолетовый): «*К*аждый *о*хотник *ж*елает *з*нать, *г*де *с*идят *ф*азаны», или (на мотив детской песенки «Как однажды под горой...») «*К*ак *о*днажды *Ж*ак-*з*вонарь *г*оловой *с*ломал *ф*онарь». Первые буквы слов в этих фразах совпадают с первыми буквами названий цветов.

В математическом фольклоре также существует множество подобных рифм-помощников. Например, для запоминания цифр числа π может пригодиться такое четверостишие:

Надо только постараться
И запомнить все, как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть.

Бобров С., [Боб]

Большую коллекцию рифм, в которых количество букв в словах позволяет восстанавливать последовательность начальных десятичных знаков числа π, собрал «профессор занимательных наук» Яков Исидорович Перельман. В книге [Пер] он приводит подобные стихотворения не только на русском, но и на английском, немецком, французском языках. В частности, он указывает на одну из рифм, которую придумал учитель математики московской школы Е. Я. Терсков:

Это я знаю и помню прекрасно.
3 1 4 1 5 9.

Его ученица Эся Чериковер сочинила ироническое продолжение:

Пи многие знаки мне лишни, напрасны
2 6 5 3 5 8.

Из этих двух строк восстанавливаются 12 знаков числа π:

$$\pi = 3{,}14159265358\ldots$$

Почти такую же высокую точность дает старинная рифма

Кто и шутя и скоро пожелаетъ
Пи узнать число — ужъ знаетъ!

(будьте внимательны: в дореволюционной орфографии русского языка встречаются «лишние» твердые знаки).

Автор следующего популярного двустишия также не установлен:

Учи и знай в числе известном
За цифрой цифру, как удачу, примечать.

В настоящее время образцы различной «π-эзии» можно найти в сети Internet (большинство рифм на английском языке). В заключение автор предлагает свои «изыскания» в этом направлении:

— Вот и знаю я число, именуемое Пи.
— Молодец.

Хотя рифмы здесь никакой, но ритмический строй, как мне кажется, выдержан. По этой поговорке восстанавливаются восемь знаков числа π (последний знак — с округлением), что соответствует мантиссе большинства современных микрокалькуляторов.

§ 56. «Пи» пишем — π в уме

Пистолет — юбилей известной константы;
Пижон — многоженец, у которого количество жен равно π;
Питон — разновидность тритона;
Пирог — волшебный зверь, приравниваемый к 3,14 ... единорогам;
Пиастры — осенние цветы с количеством лепестков от 3 до 4;
Упитанный — осведомленный о π.

§ 57. π-шарады

Час X и час π совпали.

Штефан Мариан. Офорт

Какие слова здесь зашифрованы?

1. $\pi\ p$
2. l_π
3. $(\pi\ k)$
4. π

Ответ: 1. Пир; 2. Надпил; 3. Писк; 4. Пиво.

§ 58. Вокруг да около π

Пи равно 3,14, но 3,14 не равно Пи.

А. И. Берг

- «В 1799 году итальянский математик Паоло Руффини использовал символ π для обозначения факториалов (он писал „$\pi = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$“). Со временем прописная буква греческого алфавита приняла начертание заглавной буквы. В 1811 году Гаусс, Якоби и Вебер произведение первых n натуральных чисел обозначали $\Pi(n)$. Впоследствии Гаусс распространил это обозначение на бесконечные произведения. Это нововведение сохранилось и по сей день»

David Blatner, "Joy of π", Walker and Company, New York, 1997, p. 78.

- «Важным средством повышения степени достоверности какого-либо утверждения служит приведение к противоречию утверждений, полностью несовместимых с рассматриваемым. При этом существенно, что если утверждение, невозможность которого мы хотим показать, по своему смыслу выполняется лишь приближенно, то и доказательство его невозможности должно быть убедительным на выбранном уровне приближения. Не любое рассуждение удовлетворяет этому требованию: например, нельзя, исходя из утверждения $\pi = 3{,}14$, перенести правую часть налево: $\pi - 3{,}14 = 0$ и, разделив после этого обе части равенства на $\pi - 3{,}14 = 0{,}00159\ldots$, заявить, что исходное утверждение приведено к противоречию, поскольку полученное равенство $1 = 0$ невозможно.»

Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика: логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990. С. 122.

- Современный французский поэт Жак Бенс предлагает сочинять иррациональные сонеты, т. е. стихи из 14 строк (как у обычных сонетов), но со структурой, опирающейся на число π. Строки делятся по строфам в соответствии с десятичной записью числа π: $3-1-4-1-5$, при этом количество строк в сонете сохраняется: $3+1+4+1+5 = 14$. Рифмы распределяются следующим образом: $AAb\ C\ bAAb\ C\ CdCCd$ (рефрен — четвертая строка). Жак Бенс написал три стихотворения, удовлетворяющих такой схеме.

Бонч-Осмоловская Т. УЛИПО и другие (Диплом французского университетского колледжа, 2001).

- В книге «Антология русского палиндрома, комбинаторной и рукописной поэзии» (Составление и комментарии Г. Г. Лукомникова и С. Н. Федина, консультант Д. Е. Авалиани — М.: «Гелиос АРВ», 2002) на с. 181 приводится шарада:

$$\mathrm{q}\pi\ \pi\mathrm{q},$$

примечательная тем, что она является палиндромом. Автор этого палиндрома Сергей Федин русские тексты с иноязычными вкраплениями именует «биязами». Очевидно, что в данном случае мы имеем дело с «πязом».

- Не все поэты в ладах с математикой, как, например, автор строк:

«— Площадь круга... Площадь круга... Два пи эр.
— Где вы служите, подруга?
— В АПН.»

(АПН — Агенство печати «Новости» СССР. — *А. Ж.*)

К чести представителей поэтического корпуса, на математическую ошибку в этом тексте указал известный поэт и пародист Александр Иванов:

«Говорит моя подруга, чуть дыша:
Где учился ты, голуба, в ЦПШ?

Чашу знаний осушил ты не до дна,
Два пи эр — не площадь круга, а длина,
И не круга, а окружности притом;
Учат в классе это, кажется, в шестом!»

(ЦПШ — церковно-приходская школа. — *А. Ж.*)

Эта пародия с указанием имени пародируемого автора напечатана на странице 65 сборника А. А. Иванова «Плоды вдохновения», М.: Советский писатель, 1983. 224 с.

- «Математик и Козлик
Делили пирог.
Козлик скромно сказал:
— Раздели его вдоль!
— Тривиально! — сказал Математик. —
Позволь,
Я уж лучше
Его разделю поперек! —
Первым он ухватил
Первый кус пирога.
Но не плачьте,
Был тут же наказан порок:
„Пи“ досталось ему
(А какой в этом прок?!)
А Козленку...
Козленку достались
Рога!»

Заходер Б. Стихи и сказки.
М.: Детская литература, 1991. С. 574.

- Двое едут в поезде. Один говорит:

  — Странно, колеса круглые, рельсы прямые, откуда стук?

  — Как откуда? Колеса-то круглыв, а площадь круга пи эр квадрат. Вот квадрат-то и стучит!

- Преподавателю одного из вузов страны придумали шутливое прозвище «Пипа». Кличка отражает одну особенность внешнего вида преподавателя. Какую?

  (Ответ: Низкий рост. Злые языки утверждают, что рост «Пипы» равен $\frac{\pi}{2}$, то есть, примерно 1 м 57 см).

Герман О. В., Денисюк Р. Я., Кузьмина Н. В. Развиваем интеллект.
Минск.: Дизайн ПРО, 1998. С. 81.

- «— Папа, спрашивает сын отца, — почему цыплята пищат „пи-пи-пи“, а когда вырастут, то „ко-ко-ко“ или „ку-ка-ре-ку“?

  — Наверное, потому, что пока они сидели в круглом яйце, они могли рассуждать только о нем и открыли для себя число π, а потом у них появились другие интересы.»

Савин А. П. Число π // Квант. 1996. № 6. С. 33.

- В одном из старых справочников по китобойному промыслу приводилась формула для вычисления объема кита по результатам его измерений. Естественно, в этой формуле присутствовало число π. Примечание к формуле гласило: «Для грвнландских китов $\pi = 3{,}14$».

По другой версии, для гренландских китов $\pi = 3$ (см. *Арнольд В. И.* Что такое математика. МЦНМО, 2002. С. 9 — по мнению автора, статья «О фонтанирующей деятельности китов» с изложением данного результата была опубликована в «Докладах Академии наук СССР»).

- «Давным давно, во времена Никиты Хрущева, пол-литра водки стоила 2,87 руб (Честное слово!), а четвертинка — 1,49 руб. Неизвестно кто подметил, что $1{,}49^{2{,}87}$ дает хорошее приближение для числа π. (Это можно рассматривать как доказательство сбалансированности советской экономики того периода).»

  Шарыгин И. Ф. Математический винегрет.
  М.: Мир, 2002. С. 117.

- «Три, четырнадцать... Ура!
  Ну, а дальше? — Ох, дыра...
  Сколько знаков без конца!..
  Не послать ли нам гонца?
  Нет. Ему их не догнать —
  Можно жизнь так потерять...
  Лучше, друг, вина купи —
  Тост подымем мы за Пи!»

  Газин С. О числе Пи
  (www.stihi.ru/author.html?merisarov)

§ 59. π в сети Internet

Ниже приводятся адреса некоторых популярных сайтов в сети Internet, посвященных числу π. Там же можно найти множество ссылок на другие аналогичные сайты.

mathworld.wolfram.com – «Мир математики». Web-ресурс, содержащий обширную электронную энциклопедию по математике. Постоянно обновляющиеся материалы энциклопедии включают ссылки на последние научные публикации о числе π.

www.astro.univie.ac.at/~wasi/PI — клуб друзей π. Англоязычный сайт, синтетически вобравший в себя материалы на разные вкусы. Здесь можно посмотреть серьезные математические статьи (например, познакомиться с доказательством иррациональности числа π), а также немного развлечься. Например, можно «послушать» число π — запустить программу, которая воспроизводит звучание десятичных знаков числа π, закодированных в ноты специальным образом.

www.geom.umn.edu/~huberty/math5337/groupe — С этого сайта можно переписать на свой компьютер 100 000 знаков числа π.

www.cecm.sfu.ca/pi — «Страницы π». На сайте приводится подробная таблица рекордных вычислений числа π.

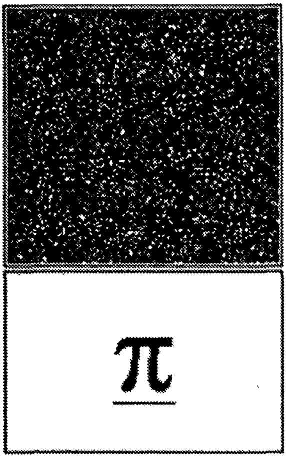


Рис. 5.3

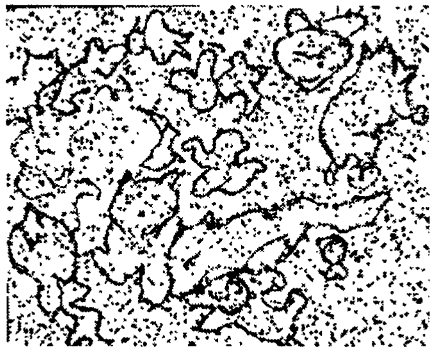


Рис. 5.4

pi314.at/links.html — страница на сайте **pi314.at** содержит обширный список ссылок на другие материалы о числе π в Internet.

www.com2com.ru/alexzen — «Артистическая π-галерея» профессора Александра Александровича Зенкина.

На рис. 5.3 из этой галереи представлен фрагмент «путешествия в звездных мирах» — именно такие возникают ассоциации, когда наблюдаешь динамически изменяющуюся картину, на которой определенные знаки числа π представляются в виде светлых точек на темном фоне таблицы. Рис. 5.4 иллюстрирует образы «совездий», увиденных детьми в хаосе скоплений этих точек.

Рис. 5.5

Точки группируются в «созвездия», «туманности», «галактики» или, как любят говорить специалисты, кластеры. Такие кластеры, закрасив их определенным цветом, выделил профессор Камиль Ибрагимович Бахтияров (рис. 5.5) (*Бахтияров К. И.* Окно в параллельные миры трансцендентных объектов // Информатика и образование. 2000. № 10. С. 19–25, см. также сайт math.child.ru, раздел «Отдохни»). Подчиняются ли эти кластеры каким-либо закономерностям? Отличаются ли «космические картины» числа π от аналогичных картин для других иррациональных констант?

3.14 — так на западе предпочитают записывать дату: сначала номер месяца, а затем — номер дня. Отсюда понятно, почему «День π», ежегодно отмечаемый Internet-сообществом, приходится на 14 марта.

(данные сайта **www.astro.univie.ac.at/~wasi/PI)**

§ 60. «Портреты» числа π

На рис. 5.6, 5.7 представлены изосюжеты «Черно-белое поле числа π» и «Скрытая симметрия числа π», выполненные с фрагментов триптиха московского художника Александра Федоровича Панкина «Математический объект Александра Зенкина» (1999 г.). В настоящее время этот триптих хранится в Музейном центре Российского Государственного гуманитарного университета.

По цвету квадратиков мозаики на рис. 5.6, рассматриваемых слева направо и сверху вниз, можно восстановить первые 100 знаков числа π. Второй рисунок отличается от первого тем, что цифры 0, 1, 2, 3, 4 на нем представлены одинаковым белым цветом, а цифры 5, 6, 7, 8, 9 - одинаковым черным цветом. Примечательно, что число белых квадратиков на рис. 5.7 совпадает с числом черных. Это одно из любопытных проявлений свойства нормальности числа (см. п. «Нормально ли число π?» первой главы).

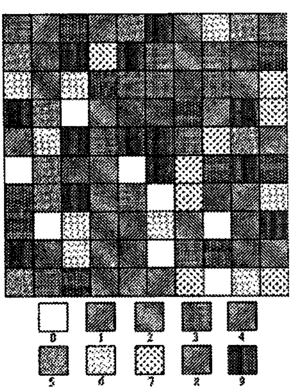


Рис. 5.6

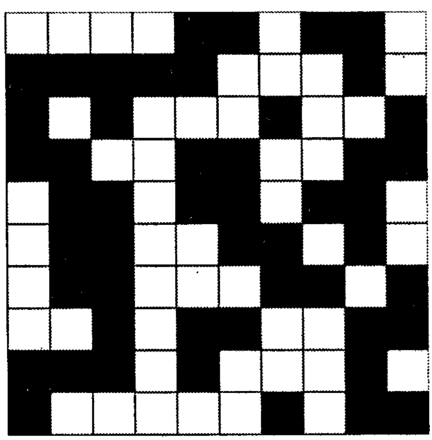


Рис. 5.7

Автор следующего рисунка (рис.5.8) — известный отечественный геометр, профессор МГУ Анатолий Тимофеевич Фоменко. С первого взгляда кажется, что на нем воспроизведены какие-то пористые тела, но при более детальном рассмотрении на передней стороне уходящего в глубину «небоскреба» можно обнаружить первые десятичные знаки числа π — они изображены в виде кружочков (на другой грани изображены начальные цифры другой замечательной константы — какой именно?).

Изобразительные материалы публикуются с разрешения их авторов.

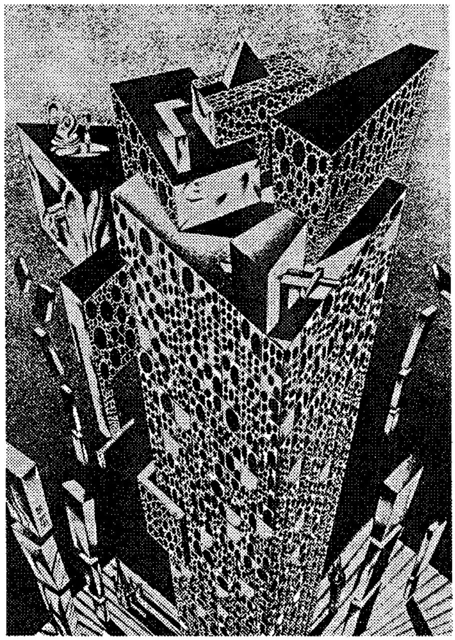


Рис. 5.8

§ 61. Размыкая круг

π — загадочное число, которое лезет в дверь, окно и через крышу.

Август де Морган. Собрание парадоксов

Все числа стремятся к бесконечности.

Владимир Казаков. Случайный воин

Вот и завершается несколько трансцендентное повествование о числе π.

Завершается? Пожалуй, по отношению к π это высказывание неуместно.

Известно ли вам, что

✓ *...разность между числами* $\sqrt[4]{399\,550}$ *и* 22 *совпадает с* π *с точностью до восьмого знака? [Куп]*

√ *...с такой же точностью число π приближает дробь* $\dfrac{9\,801}{2\,206\sqrt{2}}$ *?*

(D. Wells, 1972)

√ *...«почти целые» числа дают следующие комбинации с участием числа π:*

$$e^{\pi}-\pi=19{,}999099979\ldots;$$

$$\cos\,(\ln(\pi+20))\approx-0{,}9999999992;$$ *[Wei]*

$$\cos\,(\pi\cos\,(\pi\cos\,(\ln(\pi+20))))\approx-1+3{,}93\cdot10^{-35}?$$

√ *...для любого иррационального числа* α *существует натуральное число* n*, для которого* $\cos(n\alpha\pi)>0,999$*?* *[Бол]*

√ *...числа* π *и* $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$ *несоизмеримы?* *[Его]*

√ ... $\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right)^{\pi+1}\approx3{,}14097<\pi$ *?* *[Wei]*

√ *...члены последовательности* a_n*, задаваемой рекуррентной формулой* $a_n=a_{n-1}+\sin a_{n-1}$*,* $n=1,2,\ldots$*, причем* $a_0=N$*, где* N *— некоторое натуральное число, при* $n\to\infty$ *стремятся к величине* $k\pi$*, где* k *— целое такое, что* $k\pi$ *— ближайшее к* N *число (например, при* $N=23$ *последовательность* a_n *неограниченно приближается к величине* $7\pi=21{,}99114858\ldots$*)?* *(M. Beeler, R. W. Gosper, R. Schroeppel, 1972)*

√ *...количество прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются взаимно простыми числами (так называемых примитивных треугольников) и гипотенуза которых меньше* x*, приближенно выражается дробью* $\dfrac{x}{2\pi}$*; количество примитивных треугольников, периметр которых меньше* x*, приближенно равно* $\dfrac{x\ln2}{\pi^2}$ *?* *(Д. Лемер, 1900)*

√ *...число различных покрытий шахматной доски размером* $n\times n$ *клеток* $\dfrac{n^2}{2}$ *костяшками домино размера* 1×2 *при неограниченном возрастании* n *стремится к величине* $e^{G\pi n^2}$*, где кроме констант* e *и* π *используется постоянная Каталана* $G=0{,}91596556\ldots$*? (М. Е. Фишер, П. В. Кестилийн, 1961).*

√ *...из любой совокупности векторов на плоскости с суммой длин* 1 *всегда можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше* $\dfrac{1}{\pi}$ *?* *[Ион]*

√ *...если длина любого отрезка, соединяющего вершину выпуклого многоугольника с некоторой точкой его границы и делящего его площадь пополам, не превосходит* 1*, то площадь многоугольника меньше* $\dfrac{\pi}{4}$ *?* *[Ани]*

√ *...длина эллипса с малым эксцентриситетом* ε *хорошо приближается значением* $\dfrac{4\pi a\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon+\arcsin\varepsilon}$*, где* a *— длина большой полуоси эллипса. Эта формула удобна при расчетах на микрокалькуляторе.* *(В. Б. Дроздов)*

✓ ...если на сфере радиуса 1 проведена кривая, длина которой меньше π, то существует проходящая через центр сферы плоскость, не пересекающая проведенной кривой? [Гал]

✓ ...из прямолинейной бумажной полоски, отношение длины которой к ее ширине меньше $\frac{\pi}{2}$, не сминая ее в «гармошку», нельзя склеить ленту Мебиуса? [Фук]

✓ ...знаменитый пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, имеет вид $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, где b — нечетное целое, большее единицы, $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$? (Карл Вейерштрасс, 1872)

✓ ...если $N \geqslant 1\,753$, то число дней в N-ом году нашей эры равно $\lim\limits_{n\to\infty}\{365 + \left(\cos^2 \frac{1}{4}N\pi\right)^n - \left(\cos^2 \frac{1}{100}N\pi\right)^n + \left(\cos^2 \frac{1}{400}N\pi\right)^n\}$? [Хар]

✓ ...$\pi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$? (стандартный курс математического анализа)

✓ ...при $g(t) \geqslant 0$

$$\int\limits_0^{\infty} g(t)\,dt \leqslant \sqrt{\pi}\left\{\int\limits_0^{\infty} [g(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{4}}\left\{\int\limits_0^{\infty} [tg(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{4}},$$

если второй интеграл в правой части существует (неравенство Карлсона) [Бек]

✓ ...наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b можно представить в виде $\sum\limits_{m=0}^{a-1}\sum\limits_{n=0}^{a-1} \frac{1}{a} e^{\frac{2\pi i bmn}{a}}$? (Лео Мозер, [Изб])

✓ ...«При рубке капусты сечкой получаются многоугольники с разным числом вершин, разного размера и формы. Однако отношение квадрата их среднего периметра к средней площади равно 4π. Эта задача возникла как результат того, что я рубил капусту, помогая жене делать пироги.» Академик Сахаров А. Д. Квант. 1991. № 5. С. 11–12.

✓ ...мыло, содержащее менее $\left(1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right) \cdot 100\,\%$ бензина, безопасно в домашнем обиходе? [Ште]

✓ ...электростатическая емкость C тела и его объем V связаны неравенством

$3V \leqslant 4\pi C^3$? (А. Пуанкаре, 1903)

✓ *...можно добиться успеха в метании томагавка, если отойти от цели на расстояние* $\left(2\pi n + \operatorname{arctg}\frac{l}{a}\right)\sqrt{a^2+l^2}$, *где* l *— расстояние от центра вращения руки в локтевом суставе до точки на топорище, где мы держим топор;* a *— расстояние от вышеуказанной точки до центра масс топора,* n *— произвольное натуральное число.* *[ДаВ]*

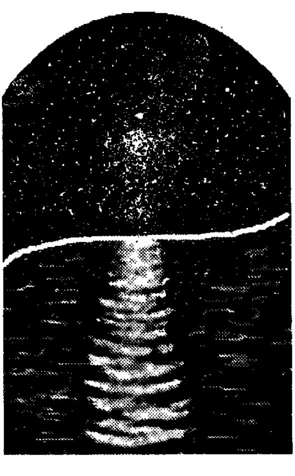
✓ *...падение человека, поскользнувшегося на скользкой поверхности, длится время* $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$, *где* h *— рост человека в метрах,* $g \approx 9{,}8\frac{м}{с^2}$ *— ускорение свободного падения.* *(В. Б. Дроздов)*

§ 62. Всеобъемлющая книга о числе π

Откройте произвольную книгу по вещественному или комплексному анализу, аналитической теории чисел, теории вероятностей, геометрии ...- увлекательный рассказ о числе π на их страницах будет продолжен. Пожалуй, не существует математического учебника, изучаемого студентами, где бы не упоминалось число π.

Впрочем, математики уже давно потеряли монополию на это вездесущее число — вместе с другими значимыми достижениями человеческой мысли оно превратилось в общекультурное достояние. Во всем своем многообразии проявлений число π неиссякаемо, и любознательный читатель еще не раз будет встречаться с ним, читая свою собственную книгу бытия.

Мы должны быть благодарны миру за то, что всеобъемлющая книга о числе π никогда не будет написана...



Литература

Все это промелькнуло в расширенных от чисел глазах.

Владимир Казаков. Мои встречи с Владимиром Казаковым

Литература к главе *Краткая «биография» Числа π*

[Арх]: *Архимед.* Сочинения. Перевод, вступит. статья и комментарии. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962. 584 с.

[Ахо]: *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1986. 476 с.

[Бел]: *С. Е. Белозеров* Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. Изд-во Ростовского ун-та, 1975. 320 с.

[Бол]: *Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения. М.: Мир, 1986. 476 с.

[Бор]: *Борвейн Джонатан М., Борвейн Питер Б.* Рамануджан и число π // В мире науки. 1988. № 4. С. 58–66.

[ВТ]: *Белов А., Тихомиров В.* Сложность алгоритмов // Квант. 1999. № 2. С. 8–11.

[Бух]: *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966, 384 с.

[Вав]: *Вавилов В. В.* Об одной формуле Христиана Гюйгенса // Квант. 1985, 11. С. 9–14.

[Вай]: *Вайман А. А.* Шумеро-вавилонская математика. М.: Изд-во восточной литературы, 1961. 280 с.

[Гар]: *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971. 512 с. («Трансцеидентное число π» — с. 418–428).

[Гин]: *Гиндикин С. Г.* Загадка Рамануджана // Квант. 1987. № 10. С. 14–20.

[Гле]: *Глейзер Г.* К истории числа π: сенсационная гипотеза / Газета «Математика» (приложение к «1 сентября»), 1997. № 8. С. 4–5.

[Даа]: *Даан-Дальмедико А. Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. М.: Мир, 1996, 432 с.

[Зво]: *Звонкин А.* Что такое π? // Квант. 1978. № 11. С. 28–31.

[Изб]: Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly», М.: Мир, 1977. 600 с.

[Кле]: *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987. Т. 1. С. 343–352.

[Кур]: *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1977. 432 с.

[Кым]: *Кымпан Ф.* История числа π. М.: Наука, 1971. 216 с.
[Лев]: *Левин В.И.* Рамануджан — математический гений Индии. М.: Знание, 1968. 48 с.
[Ней]: *Нейгебауер О.* Точные науки в древности, М.: УРСС, 2003. 240 с.
[Пра]: *Прасолов В.В.* Геометрические задачи древнего мира. М.: Фазис, 1997. 226 с.
[Руд]: О квадратуре круга. С приложением теории вопроса, составленной Ф. Рудио. Пер. с нем. под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна. М.; Л.: Гос. технико-теоретич. изд-во, 1934. 236 с.
Эта книга стала библиографической редкостью. В 2003 г. вышло ее стереотипное издаиие: Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт, О квадратуре круга, М.: УРСС, 2003, 160 с. В этой книге собраны первоисточники:
Архимед, «Измерение круга»;
Христиан Гюйгенс, «О найденной величине круга»;
Иоганн-Генрих Ламберт «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга»;
Адриан-Мария Лежандр, «Доказательство того, что отношение окружности к диаметру и его квадрат суть иррациональные числа».
[Сор]: *Сорокин Г.* Вычислим число e // Квант. 1979. № 8. С. 8.
[Сте]: *Степанов С.А.* Нормальное число / Математическая Энциклопедия. Изд-во «Советская энциклопедия», М.: 1982. Т. 3. С. 1070–1071.
[Физ]: Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968. 320 с.
[Фих]: *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2,3. М.: Наука, 1969.
[Хар]: *Харди Г.* Двенадцать лекций о Рамануджане, М.: Институт Компьютерных Исследований, 2002. 336 с.
[Хин]: *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М.: УРСС, 2004. 112 с.
[Хре]: Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича, М.: Просвещение, 1976. 320 с.
[Шев]: *Шевелев В.С.* Три формулы Рамануджана // Квант. 1988. № 6. С. 52–55.
[Энд]: *Эндрюс Г.* Теория разбиений, М.: Наука, 1982. 256 с.
[Юш1]: *Юшкевич А.П.*. История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961. С. 300–305.
[Юш2]: *Юшкевич А.П.* Леонард Эйлер о квадратуре круга. Историко-математические исследования. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1957. С. 159-210.
[Alf]: *Alf van der Poorten.* A proof, that Euler missed // Math. Intelligencer, 1979.
[Bei]: Bailey, D. H.; Borwein, P.; and Plouffe, S. «On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants.» *Math. Comput.* 66, 903–913, 1997.
[Bel]: Fabrice Bellard, A new formula to compute the n'th binary digit of pi /www.cecm.sfu.ca/projects/pihex/about.html.
[Bor]: Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM. A Study in analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley & Sons, NY Inc., 1987, 414 p.

[Eis]: Eisenlor A. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum). Leipzig, 1877, 1891.
[PiR]: www.lupi.ch/PiSites/Pi-Rekord.html

Литература к главе
На просторах геометрии

[Але]: *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
[Бол]: *Болтянский В.Г.* Доказательства теорем Гюльдена // Квант. 1973. № 6. С. 9–13.
[Гин]: *Гиндикин С.* Волшебный мир Анри Пуанкаре // Квант. 1976. № 3. С. 9–17.
[Дуб]: *Дубровский В.* Площадь поверхности по Минковскому // Квант. 1979. № 4. С. 33–36.
[Кру]: *Крупский В.Н., Орлов А.И.* Коза на привязи // Квант. 1974. № 5. С. 74–75.
[Пра]: *Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989. 288 с.
[Роз1]: *Розенфельд Б.А., Яглом И.М.* Многомерные пространства / Энциклопедия элементарной математики. Т. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966. С. 343–393.
[Роз2]: *Розенфельд Б.А., Яглом И.М.* Неевклидовы геометрии / Энциклопедия элементарной математики. Т. 5, Геометрия. М.: Наука, 1966. С. 433–439.
[Сил]: *Силин А.В., Шмакова Н.А.* Открываем неевклидову геометрию. М.: Просвещение, 1988. 128 с.
[Фих]: *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2,3. М.: Наука, 1969.
[Хад]: *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с.
[Шир]: *Широков П.А.* Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М.: Наука, 1983. 80 с.
[Шкл]: *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1974, 384 с.
[Ште]: *Штейнгауз Г.* Задачи и размышления. М.: Мир, 1974. 400 с.
[Эпп]: *Эппель Б.С.* Задачи о телах вращения и теоремы Гюльдена // Квант. 1973. № 6. С. 4–8.
[Ягл]: *Яглом И.М., Болтянский В.Г.* Выпуклые фигуры. Гостехиздат, 1951.
[Man]: *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. New York, Freeman, 1982. (Русский перевод: *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.)

Литература к главе
В мире чисел

[Арн]: *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. 96 с.
[Баа]: *Баабабов А.* «Пентиум» хорошо, а ум лучше // Квант. 1999. № 5. С. 38–40

[Бен]: *Бендукидзе А.Д.* Золотое сечение // Квант. 1973. № 8. С. 22–27.
[Бол]: *Болтянский В.Г.* программы перебора // Квант. 1988. № 1. С. 3–7, 34.
[Ваг]: *Вагутен В.Н.* Близкие дроби // Квант. 1975. № 8. С. 33–39.
[Вар]: *Варпаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н.* О решении десятой проблемы Гильберта // Квант. 1970. № 7. С. 39–44.
[Вас]: *Васютинский Н.* Золотая пропорция. М.: Молодая гвардия, 1990. 240 с.
[Виг]: *Вигнер Е.* Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии. М.: УРСС, 2002. 320 с.
[Вил]: *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975. 208 с.
[Вор]: *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1992. 192 с.
[Гар]: *Гарднер М.* Крестики-нолики. М.: Мир, 1988. 352 с.
[Гил]: *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М: Наука, 1981. 344 с.
[Гму]: *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2000. 398 с.
[Гне]: *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей, М.: Наука, 1965. 400 с. Изд. 7-е. М.: УРСС, 2001. 320 с.
[Гур]: *Гуртман Г.Н.* Геометрия счастливых билетов // Квант. 1988. № 4. С. 72.
[Зай]: *Зайдель А.Н.* Обман или заблуждение? // Квант. 1983. № 5. С. 24–28.
[Инт]: Интегралом — по счастливым билетам! // Квант. 1978. № 11. С. 52–53.
[Изб]: Избранные задачи (из журнала «American Mathematical Monthly»). М.: Мир, 1977. 600 с.
[Кор]: *Коробко В.И.* Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1998. 376 с.
[Кре]: *Крейн М., Нудельман А.* Замечательные пределы, порожденные классическими средними // Квант. 1981. № 9. С. 13–15.
[Кур]: *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. М.: Просвещение, 1967. 560 с.
[Кым]: *Кымпан Ф.* История числа π. М.: Наука, 1971. 216 с.
[Мал]: *Малов Н.* Задача Дирака // Квант. 1981. № 9. С. 40.
[Ник]: *Николаев Е.Г.* Равноправны ли все цифры? // Квант. 1975. № 11. С. 16–20.
[Пой]: *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 464 с.
[Про]: *Прохоров А.И.* Золотая спираль // Квант. 1984. № 9. С. 15–17, 33.
[Пру]: *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, 1981. 800 с.
[Сав]: *Савин А.П., Финк А.М.* Разговор в трамвае // Квант. № 7. 1975. С. 67–70.
[Сан]: *Санталло Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983. 360 с.
[Сно]: Снова о счастливых билетах // Квант. 1989. № 8. С. 42.
[Ста]: *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 151 с.

[Фел]: *Феллер В.* Введенне в теорню вероятностей и ее прнложения. М.: Мир, 1984. Т. 1–528 с.; Т. 2–752 с.
[Физ]: Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968. 320 с.
[Фин]: *Финк Л.* Еще раз о счастливых билетах // Квант. 1976. № 12. С. 68–70.
[Фих]: *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2,3. М.: Наука, 1969.
[Хар]: *Харди Г. Х.* Курс чистой математики, М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1949. 512 с.
[Шев]: *Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П.* Золотое сечение. М.: Стройиздат, 1990. 344 с.
[Шкл]: *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и Алгебра. М.: Наука, 1976. С. 67.
[Эйл]: *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1. М.; Л.: Объединен. научно-технич. изд-во НКТП СССР, 1936. 352 с.
[Act]: Acta Arithmetica, 1998, 85, p. 301–307.
[Bel]: *Beeler M. et al.* Item 140 in Beeler, M.; Gosper, R. W.; and Schroeppel, R. Cambridge, MA: MIT Artificial Intelligence Laboratory, Memo AIM-239, p. 69, Feb. 1972.
[Bor]: *Borwein J. M., Borwein P. B.* Pi and the AGM. A Study in analytic Number Theory and Computational Complexity. John Wiley & Sons, NY Inc., 1987, 414 p.
[Gal]: *Gregory Galperin.* Billiard Balls count π // MASS Selecta, American Mathematical Society, Oktober 1998, p. 197–204.
[Mic]: *Michael D. Huberty* Ko Hayashi & Chia Vang. Pi & Fibonacci Numbers / www.geom.umn.edu/~huberty / math5337/groupe / fibonacci.html, 1996–1997.
[Son]: *Sondow J.* Problem 88. *Math Horizons*, p. 32 and 34, Sept. 1997.

Литература к главе
Число π и наука о природе

[Вар]: *Варламов А., Шапиро А.* В голубом просторе // Квант. 1982. № 3. С. 10–15.
[Вей]: *Вейнберг С.* Гравитация и космология / Платон. 2000. 696 с.
[Вла]: Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Владимирова, М.: Наука, 1974. 272 с.
[Гал]: *Гальперин Г. А.* Биллиардная динамическая система для числа π / Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 5. 2001. С. 137–138.
[Гам]: *Гамов Г.* Приключения мистера Томпкинса. В трех книгах. М.: УРСС, 2003.
[Кот]: *Котляр Б. Д.* Удивительное равенство // Квант. 1989. № 7. с. 17–21.
[Мак]: *Маковецкий П. В.* Смотри в корень! М.: Наука, 1979. 384 с.
[Нов]: *Новинский Г., Хомазнюк В.* Закон Архимеда и...решение уравнений // Квант. 1977. № 5. С. 17–19.
[Фей]: *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Том 3, Излучение. Волны. Кванты. М.: Мир, 1967. С. 113.
[Физ]: Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968, 320 с.

[Хим]: Химия и жизнь. 1984. № 5. 4-я страница обложки.
[Шер]: *Шермергорн И.М.* Природа и числа // Химия и жизнь. 1985. № 1. С. 87.
[Яво]: *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. М.: Наука, 1974. С. 330.
[Янг]: *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. С. 244.
[Gal]: *Gregory Galperin.* Billiard Balls count π // MASS Selecta, American Mathematical Society, Oktober 1998, p. 197–204.

Литература к главе
Такое разное π

[Бес]: *Бестер А.* Пи-человек / Мастера американской фантастики. Бук Чембер Интернешнл, 1991. С. 144–157.
[Боб]: *Бобров С.* Волшебный двурог. М.: Детская литература, 1967. С. 8.
[Пер]: *Перельман Я.И.* Занимательная геометрия. Домодедово: Изд-во ВАП, 1994. 288 с.
[Сой]: *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972. 192 с.
[Физ]: Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968. 320 с.
[Чер]: *Чернов А.* Серебряное сечение / Новая газета. 13.01.1997. № 2 (422). с. 8–9.
[Ани]: *Анисов С., Туляков Д.* XXIII Всесоюзная олимпиада по математике // Квант. 1989. № 11. С. 67.
[Бек]: *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.
[Бол]: *Болтянский В.Г.* Часто ли степени двойки начинаются с единицы? // Квант. 1978. № 5. С. 5.
[Гал]: *Гальперин Г.А., Дубровский В.Н., Произволов В.Б.* задача М 1020 // Квант. 1987. № 4. С. 27.
[Дав]: *Давыдов В.А.* Как индейцы бросают томагавк? // Квант. 1989. № 11. С. 19–22.
[Его]: *Егоров А.А.* Решетки и правильные многоугольники // Квант. 1974. № 12. С. 30–32.
[Изб]: Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly», М.: Мир, 1977. С. 114.
[Ион]: *Ионин Ю., Плоткин А.* Среднее значение функции // Квант. 1977. № 7. С. 30–31.
[Куп]: *Купцов Л.П.* Новые приближения числа π // Квант. 1989. № 6. С. 29.
[Пой]: *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1976. С. 14.
[Фук]: *Фукс Д.* Лента Мебиуса. Вариации на старую тему // Квант. 1979. № 1. С. 2–9.
[Хар]: *Харди Г.* Курс чистой математики. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1949. С. 154.
[Ште]: *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981. С. 104.
[Wei]: *Eric W. Weisstein,* Pi Formulas / mathworld.wolfram.com / PiFormulas.html.