Задача по мотивам сказки «Конёк-Горбунок» П.П. Ершова

(А.П. Смирнов, О.В. Захаров, Весёлый бал и вдумчивый урок, – М.: «Кругозор», 1994.)

Тут Конёк: «Сказать по дружбе,
Это службишка, не служба:
Служба вся, брат, впереди!
Ты теперя спать поди;
А назавтра, утром рано,
Мы поедем к окияну».

Ну-с, так едет наш Иван
За кольцом на окиян.
Горбунок летит, как ветер,
И в почин на первый вечер
Вёрст сто тысяч отмахал.
И нигде не отдыхал.

- Насколько хорошо знал Конёк маршрут и конечную точку путешествия?
- Подсчитайте скорость движения Горбунка и сравните её со скоростью ветра.
- Подсчитайте работу против силы тяжести, произведённую Горбунком на «службишке» по перевозке Ивана.

Формирование данных

Старая русская мера длины – верста = 1,0668км. Считаем, что сутки делятся на четыре равных временных интервала: утро, вечер, день и ночь, тогда можно допустить, что Горбунок «вёрст сто тысяч отмахал» за время Δt = 12 часов (с раннего утра до вечера).

Суммарная масса Ивана и Конька m = 100кг.

При каждом «махе» – скачке Горбунка центры масс его и Ивана перемещаются вверх на величину Δh, которую определим позже в ходе решения задачи. Длину одного скачка l примем равной 500м, опираясь на утверждение поэта, что Конёк «поднатужился – и вмиг на *далёкий* берег прыг» (со спины огромного «чудо-юдо рыбы-кита»).

Решение

Сто тысяч вёрст, которые «отмахал» Конёк-Горбунок, выраженные в метрах, дадут нам путь до финиша путешествия:

$$L = 1{,}0668\times10^5\text{км} = 1{,}07\times10^8\text{м}.$$

Это расстояние соответствует ~ 2,5 длинам окружности Земли:

$$L_з = 2\pi R_з = 4\times10^7\text{м},$$

где $R_з = 6{,}4\times10^6$м – радиус Земли. Поэтому мы можем заключить, что Конёк блуждал по всем «окиянам» Земли, отыскивая конечную точку маршрута.

Расстояние L Горбунок «отмахал» («и нигде не отдыхал») за Δt = 12 часов, откуда его скорость

$$V = L / \Delta t = 1{,}07\times10^8\text{м} / (12\times60\times60)\text{с} = 2{,}5\times10^3\text{м/с}.$$

Эта скорость >> скорости звука и приближается к первой космической скорости. Только сказочные способности Конька-Горбунка позволяют ему развивать, очевидно, такую скорость, которую, конечно, надо сравнивать не со скоростью ветра («Горбунок летит как ветер…»), т.к. даже самые сильные ветры имеют скорость в ~ 10^2 раз меньшую. Считая, что такой скорости можно достичь только в отсутствие сопротивления среды, дальнейшее решение проведём в этом приближении.

Определим величину подъёма центра масс системы Иван – Конёк-Горбунок Δh при каждом «махе» последнего на длину l = 500м, решая задачу о движении тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью V.

Так как

$$l = V^2 \sin 2\alpha / g, \text{ то } \sin 2\alpha = gl / V^2 = 10\text{м/с}^2 \times 500\text{м} / 6{,}25\times10^6\text{м}^2/\text{с}^2 = 8\times10^{-4} << 1,$$

при этих условиях $\sin x \approx x$, откуда $\alpha = 4\cdot10^{-4}$ радиана.

Максимальная высота подъёма Δh в этом случае будет определяться выражением:

$$\Delta h = V^2 \sin^2\alpha / 2g = 6{,}25\times10^6\text{м}^2/\text{с}^2\times16\cdot10^{-4} / 2\times10\text{м/с}^2 = 5{,}0\times10^{-2}\text{м}.$$

Высота подъёма центра масс Δh мала. Т.е. при такой скорости при скачке Горбунок просто стелется по земле. Работа A_1 против силы тяжести, совершаемая Коньком при подъёме центров масс своего и Ивана на Δh при одном скачке, определяется выражением:

$$A_1 = mg\Delta h = 100\text{кг}\times10\text{м/с}^2\times5{,}0\times10^{-2}\text{м} = 50\text{Дж}.$$

Работа A_Σ за всё время путешествия равна $A_1\cdot n$, где $n = L / l$ – число скачков, тогда

$$A_\Sigma = mg\Delta h\times L / l = 50\text{Дж}\times1{,}07\times10^8\text{м} / 5\times10^2\text{м} = 10{,}7\text{МДж}.$$

Средняя мощность, развиваемая Горбунком для совершения этой работы,

$$P = A_\Sigma / \Delta t = 10{,}7\times10^6\text{Дж} / 12\times60\times60\text{с} = 2{,}5\times10^2\text{Вт}.$$

Что вполне по силам и не сказочному коню, т.к. одна лошадиная сила эквивалентна 736Вт.

Задача по мотивам песни «В далёком созвездии Тау Кита» В. Высоцкого

(А.П. Смирнов, О.В. Захаров, Весёлый бал и вдумчивый урок, – М.: «Кругозор», 1994)

В далёком созвездии Тау Кита
Всё стало для нас непонятно, –
Сигнал посылаем: «Вы что это там?» –
А нас посылают обратно…

Вот, двигаясь по световому лучу
Без помощи, но при посредстве,
Я к Тау Кита этой самой лечу,
Чтоб с ней разобраться на месте.

Не помню, как поднял я свой звездолёт, –
Лечу в настроеньи питейном:
Земля ведь ушла лет на триста вперёд
По гнусной теорьи Эйнштейна!...

Определите время, проведённое «космонавтом» в полёте на Тау Кита и обратно, и на сколько по «гнусной теорьи Эйнштейна» должен отличаться возраст «космонавта», вернувшегося из полёта, от возраста жителей Земли, которая «ушла лет на триста вперёд» с момента старта «космонавта»?

Формирование данных

В отрывке, очевидно речь идёт о созвездии Кита. Слабая звёздочка в углу «рта» Кита – это звезда Тау Кита. Расстояние L до неё от Земли равно 12 световым годам. Световой год – это расстояние, проходимое светом за 1 год. Это расстояние составляет $9{,}463\times10^{25}$ м или 0,3069 парсека.

Фразу: «…Земля ведь ушла лет на триста вперёд…» надо понимать так, что по часам, оставленным на Земле с момента старта прошло время Δt = 300 лет. Мы не можем трактовать это время как разницу между показаниями часов, находящихся на месте старта, и часов в кабине звездолёта после его возвращения на Землю $\Delta t'$, так как в этом случае минимальное расстояние, на которое должен слетать космонавт и вернуться, должно соответствовать именно этим 300 световым годам, а расстояние до Тау Кита и обратно соответствует только 24 световым годам.

Решение

«По гнусной теорьи Эйнштейна» времена $\Delta t'$ и Δt связаны соотношением:

$$\Delta t' = \Delta t\,[1 - \frac{V^2}{C^2}]^{\,0,5},$$

где

$\Delta t'$ и Δt – определены в разделе «Формирование данных»,

V – скорость звездолёта,

c – скорость света в вакууме (3×10^8 м/с).

Так как $V = \frac{2L}{\Delta t}$, где L – расстояние от Земли до Тау Кита,

то $\Delta t' = \Delta t\,[1 - \frac{4L^2}{(C\Delta t)^2}]^{\,0,5}$,

Тогда $\Delta t' = [\Delta t^2 - 4\,(\frac{L^2}{C^2})]^{0,5} = [(300)^2 - 4\times12^2]^{\,0,5} = 299$ лет,

т.к. $\frac{L}{C}$ = 12 лет, а Δt = 300 лет.

Т.е. «космонавт» вернётся на один год моложе своего «двойника», оставленного на Земле. Очевидно, что в качестве «космонавта» и его «двойника» должны выступать роботы, первого из которых поэт наделил склонностью к «питейному настроению», с ресурсом работы не менее 300 лет. Такая небольшая разница в возрастах наблюдается из-за того, что звездолёт летел со скоростью:

$$V = 2\frac{L}{\Delta t} = \frac{2\times12\times C}{300} = \frac{1}{12,5}\times c,$$

то есть более чем на порядок меньше скорости света.

Задачи для самостоятельного решения

1. В книге **Э. Распе «Приключения барона Мюнхгаузена»** её герой рассказывает о себе следующую историю: «*Я стоял рядом с огромнейшей пушкой … и когда из пушки вылетело ядро, я вскочил на него верхом и лихо понёсся вперёд… мимо меня пролетало встречное ядро… я пересел на него и как ни в чём не бывало помчался обратно*».

- Оцените, как изменится дальность полёта ядра, если барон оседлает его при вылете из пушки или пересядет с одного ядра на другое в полёте.

2. **Н.А. Некрасов. «Дедушка Мазай и зайцы»**.

Мимо бревно суковатое плыло,
Сидя, и стоя, и лёжа пластом,
Зайцев с десяток спасалось на нём.
«Взял бы я вас – да потопите
лодку!»
Жаль их, однако, да жаль и находку –
Я зацепился багром за сучок
И за собою бревно поволок.

- Оцените, при каком минимальном объёме бревна зайцы могли на нём плыть.

3. **В.Я. Брюсов. «Мир электрона».**

Быть может, эти электроны –
Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны
И память сорока веков!
Ещё, быть может, каждый атом –
Вселенная, где сто планет;
Там всё, что здесь, в объёме сжатом,
Но также то, чего здесь нет.
Их меры малы, но всё та же
Их бесконечность, как и здесь;
Там скорбь и страсть, как здесь, и даже
Там та же мировая спесь…

- В чём видит поэт сходство мира электрона и Земли?
- Сравните отношения радиусов первых четырёх боровских орбит электрона в атоме водорода с отношениями расстояний от Солнца до других планет.