ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

СИЛЬНЫ ЛИ ВЫ В АРИФМЕТИКЕ ?

ЛЕНИНГРАД
1941

ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

СИЛЬНЫ ЛИ ВЫ в АРИФМЕТИКЕ?

составил
Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

Ленинград 1941

Хорошо ли вы владеете школьной арифметикой? Чтобы проверить это попытайтесь ответить на 25 вопросов, которые предложены в нашей книжечке. Они не похожи на задачи, обычно задаваемые при испытаниях в школе. Тем не менее, эти вопросы в большинстве случаев не предполагают у читателя каких-либо знаний, выходящих за рамки школьной программы. Они требуют зато вполне сознательного владения приобретенными знаниями.

Итак, испытайте, насколько вы сильны в арифметике: ответьте самостоятельно на все 25 предложенных далее вопросов, а затем, чтобы проверить себя, прочтите ответы, напечатанные в книжечке.

ВОПРОСЫ

ДЕЙСТВИЯ НАД ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Задумано два целых числа. Если из большего вычесть меньшее, получится нечетный результат. Можете ли вы сказать, какой результат — четный или нечетный получится от переумножения задуманных чисел?
2. Зная, что произведение десяти неизвестных нам целых чисел — число нечетное, можете ли вы сказать, какова их сумма — четная или нечетная?

3—7. Какие из следующих утверждений правильны и какие неправильны:

Если сумма двух целых чисел четная, то разность их тоже четная;

Если сумма двух целых чисел нечетная, то разность их тоже нечетная;

Если сумма двух целых чисел нечетная, то произведение их тоже нечетное;

Если сумма двух целых чисел четная, то произведение их тоже четное;

Если произведение двух целых чисел нечетное, то сумма их четная.

8. Из 60 депутатов желают составить 7 комиссий так, чтобы в каждой было нечетное число членов. Сколькими способами можно это сделать?

9. Верно ли, что произведение любых двух последовательных четных чисел делится без остатка на 8?

10. Существует ли два таких целых числа, сумма которых 100, а произведение 99?

11. Как, не производя действия деления, найти остаток от деления данного числа на 9?

12. Делится ли без остатка число 2^{100} на 5?

13. Назовите последнюю цифру числа 6^{10}.

14. В известной легенде об изобретении шахматной игры награда изобретателю равна числу $2^{64} - 1$ хлебных зерен. Можете ли вы быстро прикинуть, чему приблизительно равно это число?

ЧИСЛА ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ

15. Назовите наименьшее простое число.
16. Может ли от сложения двух составных чисел получиться число простое?
17. Может ли простое число получиться от сложения двух также простых чисел?

ДРОБИ

18. Восемь плиток шоколада надо разделить поровну между 15 пионерами так, чтобы ни одной плитки не ломать больше, чем на 5 частей?

ПРОЦЕНТЫ

19. В начале этого года цена на товар была повышена на 10%, а на днях понижена на 10%.

    Какая цена ниже: нынешняя или прошлогодняя?

РАЗНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

20. Напишите римскими цифрами число 1941.
21. В чем главное преимущество употребляемой нами системы счисления перед римской?
22. Некоторое число, написанное по десятичной системе счисления, делится без остатка на 3. Сохранится ли это свойство для того же числа, если его выразить в семиричной системе счисления? А в шестиричной?

ИЗ ИСТОРИИ АРИФМЕТИКИ

23. Почему наши цифры называются арабскими?
24. Кто изобрел десятичные дроби?
25. Что такое Эратосфеново решето?

О Т В Е Т Ы

1. Легко сообразить, что нечетная разность может получиться лишь при вычитании четного числа из нечетного или же нечетного из четного. Значит, в нашем случае одно из перемноженных чисел четное, т. е. содержит множитель 2. Этот множитель должен, очевидно, входить и в состав произведения. Следовательно, произведение задуманных чисел четное.
2. От перемножения нескольких целых чисел может получиться нечетный результат только в том случае, если каждое из них — число нечетное: наличие среди

них хотя бы одного четного числа вводит в состав произведения множитель 2, т. е. делает результат четным. Следовательно, все 10 чисел — нечетные. От сложения же 5 пар нечетных чисел сумма должна получиться четная, так как каждая пара дает четную сумму.

3—7. Верны утверждения 3-е, 4-е и 7-е.

Неверны утверждения 5-е и 6-е (5-е неверно во всех случаях; 6-е верно только в отдельных случаях и не может быть обобщено).

8. Требование задачи невыполнимо: четное число (60) не может быть суммою нечетного числа нечетных слагаемых. Семь любых нечетных чисел составляют в сумме число нечетное.

9. В натуральном ряду чисел каждое второе число делится без остатка на 2, а каждое четвертое делится на 4. Поэтому в каждой паре последовательных четных чисел одно заключает множитель 2, другое — множитель 4. Произведение таких чисел должно делиться без остатка на 2×4, т. е. на 8.

10. Искомые числа — 99 и 1:

$$99 + 1 = 100$$
$$99 \times 1 = 99$$

11. При выводе признака делимости на 9 (см. учебник арифметики) устанавливается попутно, что остаток от деления числа на 9 равен сумме его цифр, приведенной к однозначному результату.

Например, для числа 188 находим, что при делении на 9 оно дает остаток 8:

$$1+8+8=17; \qquad 1+7=8.$$

12. Число 2^{100}, получающееся от перемножения 100 двоек, заключает в составе своих простых множителей только двойки, а потому делиться без остатка на 5 не может.

13. Легко убедиться испытанием, что при перемножении чисел, оканчивающихся 6-ю, получается результат оканчивающийся тоже 6-ю. Поэтому любая степень числа 6 оканчивается 6-ю.

14. Для определения приближенного значения степени 2^{64} можно воспользоваться тем, что $2^{10}=1024$, т. е. округленно 1000. Степень 2^{64} будем рассматривать, как

произведение, составленное из четырех двоек и шести групп по 10 двоек каждая:

$$2^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$$

Результат равен приблизительно:

$$16 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000,$$

т. е.

$$16\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

15. Наименьшее простое число не 1, а 2. Единица не есть ни простое, ни составное число. В учебнике арифметики А. П. Киселева („Систематический курс арифметики" под ред. проф. А. Я. Хинчина), дается такое определение простого числа:

„Всякое число, кроме единицы, которое делится только на единицу и на самое себя, называется простым. Число 1 не причисляется ни к простым, ни к составным числам, оно занимает особое положение".*)

16. Можно привести много примеров таких простых чисел, которые представляют собою сумму двух составных:

$$13 = 4 + 9$$
$$17 = 8 + 9$$
$$23 = 9 + 14$$
$$29 = 14 + 15, \text{ и т. д.}$$

17. На этот вопрос часто отвечают отрицательно потому, что исходят из ошибочного положения, будто все простые числа — нечетные. Забывают о простом числе 2. При участии этого числа

*) В высшей математике единица также не рассматривается, как число простое. В „Лекциях по теории чисел", классическом труде Лежен-Дирихле, читаем:

„Единицу не следует причислять к простым числам, ибо многие теоремы относительно простых чисел не имеют места для единицы".

можно составить много примеров простых чисел, являющихся суммой двух также простых:

$$5 = 2 + 3$$
$$7 = 5 + 2$$
$$19 = 17 + 2$$
$$43 = 41 + 2, \text{ и т. п.}$$

(Два простых числа, разность которых равна 2, называются „близнецами“).

18. Требуемый раздел можно осуществить, исходя из того, что

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Надо разломать каждую из 5 плиток на 3 равные части, а каждую из остальных 3-х на 5 равных частей; затем каждому школьнику дать по 1/3 и по 1/5 плитки.

19. Если прошлогоднюю цену товара примем за единицу, то после

повышения на 10%, т. е. на 0,1, цена равнялась

$$1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

Когда сделано было понижение на 10%, цена уменьшилась на

$$1{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}11$$

Следовательно, нынешняя цена равна

$$1{,}1 - 0{,}11 = 0{,}99$$

Последняя цена ниже прошлогодней на 0,01, т. е. на 1%. (Ради наглядности проделайте вычисление для случая, когда первоначальная цена 100 руб.)

20. В римской системе счисления тысяча обозначается буквой M, 500 — D; 100 — C, 50 — L. Число 1941 римскими цифрами пишется так: MCMXLI.

21. В употребляемой нами так называемой арабской системе счисления цифры имеют разное значе-

ние в зависимости от их положения: первая цифра справа означает число единиц, вторая — число десятков, третья — число сотен, и т. д. Это не только упрощает обозначение чисел, но и значительно облегчает выполнение над ними арифметических действий. В римской системе цифра имеет всегда одинаковое значение, где бы она ни стояла,— за исключением шести случаев, когда цифра, стоящая налево, отнимается от цифры, стоящей направо, а именно в числах:

$$IV = 4;\ IX = 9;\ XL = 40;\ XC = 90$$
$$CD = 400;\ CM = 900$$

Легко убедиться испытанием, что такой способ обозначения чисел делает вычисления с ними крайне громоздкими.

22. Ошибочно думать, будто делимость данного числа на то или иное число может меняться при переходе на другую систему счисления. Если некоторое число делится без остатка на 3, то это значит, что данное число предметов (орехов, например) может быть разложено на 3 равные кучки. Понятно, что это свойство данной группы вещей не может измениться оттого, что ее численность выражена в той или иной системе счисления, — точно так же, как не меняется это свойство, если написать число прописью на русском или иностранном языке.

Поэтому, если некоторое число кратно 3-м в десятичной системе счисления, то оно сохраняет это свойство, будучи написано по любой другой системе. (Однако признаки делимости в различных системах счисления различны).

23. Наши цифры получили название арабских потому, что арабы были (в XII веке) посредниками при проникновении этих цифр из Индии к народам Европы. Подлинными изобретателями „арабских“ цифр были индусы; поэтому наши цифры нередко называют индийскими.

24. Изобретателем десятичных дробей был выдающийся фламандский физик и математик Симон Стевин (1548—1620).

25. „Эратосфеновым решетом“ называют старинный способ составления таблицы простых чисел. Способ этот, приписываемый греческому ученому Эратосфену

(270—194), состоит в следующем. В ряду последовательных целых чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... и т. д.

зачеркивают сначала каждое второе число большее 2-х; затем каждое третье число большее 3-х; каждое пятое число большее 5, каждое 7-е большее 7 и т. д. Этим механически устраняются все составные числа, кратные простых делителей: 2, 3, 5, 7, 11 и т. д. Эратосфен проделывал все это на деревянной доске, покрытой воском, и пробивал отверстие возле каждого составного числа. Доска, усеянная дырочками, представляла собой как бы решето, отсеивающее все составные числа и удерживающие только простые.

30 коп.

В ЛЕНИНГРАДЕ

на Фонтанке, 34

ЕЖЕДНЕВНО

КРОМЕ ПЯТНИЦ

ОТКРЫТ

ДЛЯ ПОСЕЩЕНИЙ

ДОМ

ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ