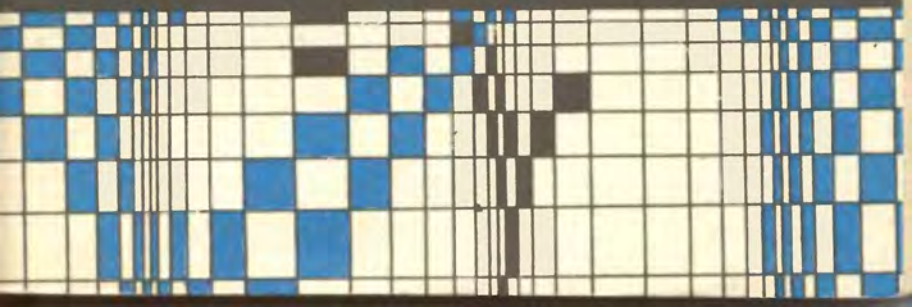


Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

**ЖИВАЯ
МАТЕМАТИКА**



Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

Живая математика

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
РАССКАЗЫ
И ГОЛОВЛОМКИ

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И С ДОПОЛНЕНИЯМИ
В. Г. БОЛТЯНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

511 + 512 + 513

II 27

УДК 511 + 512 + 513

АННОТАЦИЯ

Книга Я. И. Перельмана принадлежит к числу наиболее доступных из известного цикла книг автора, посвященных занимательным вопросам математики. Здесь собраны разнообразные математические головоломки, из которых многие облечены в форму маленьких рассказов. Для их решения достаточно знакомства с элементарной арифметикой и простейшими сведениями из геометрии. Лишь незначительная часть задач требует умения составлять и решать простейшие уравнения.

Книга рассчитана на подростков — учащихся средней школы, школ рабочей молодежи и на взрослых, ищущих разумных и полезных развлечений в часы отдыха.

Перельман Яков Исидорович

ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

М., 1967 г., 160 стр. с илл.

Редактор А. П. Баева.
Художник Б. Жутовский.
Техн. редактор С. Я. Шкляр.
Корректор С. Д. Кайсер.

Сдано в набор 8/IX 1966 г. Подписано к печати 12/XI 1966 г.
Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 5. Условн. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 7,68.
Тираж 100000 экз. Т15903. Цена 23 коп. Заказ № 779.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28

Завтрак с головоломками

1. Белка на поляне.— Сегодня утром я с белкой в прятки играл,— рассказывал во время завтрака один из собравшихся за столом дома отдыха.— Вы знаете в нашем лесу круглую полянку с одинокой березой посредине? За этим деревом и пряталась от меня белка. Выйдя из чащи на полянку, я сразу заметил беличью мордочку с живыми глазками, уставившуюся на меня из-за ствола. Осторожно, не приближаясь, стал я обходить по краю полянки, чтобы взглянуть на зверька. Раза четыре обошел я дерево — но плутовка отступала по стволу в обратную сторону, по-прежнему показывая только мордочку. Так и не удалось мне обойти вокруг белки.

— Однако,— возразил кто-то,— сами же вы говорите, что четыре раза обошли вокруг дерева.

— Вокруг д е р е в а, но не вокруг б е л к и!

— Но белка-то на дереве?

— Что же из того?

— То, что вы кружились и вокруг белки.

— Хорошо кружился, если ни разу не видел ее спинки.

— При чем тут спинка? Белка в центре, вы ходите по кругу, значит, ходите вокруг белки.

— Ничуть не значит. Вообразите, что я хожу около вас по кругу, а вы поворачиваетесь ко мне все время лицом, пряча спину. Скажете вы разве, что я кружусь вокруг вас?

— Конечно, скажу. Как же иначе?

— Кружусь, хотя не бываю позади вас, не вижу вашей спины?

— Далась вам спина! Вы замыкаете вокруг меня путь — вот в чем суть дела, а не в том, чтобы видеть спину.

— Позвольте: что значит кружиться вокруг чего-нибудь? По-моему, это означает только одно: становиться последовательно в такие места, чтобы видеть предмет со всех сторон. Ведь правильно, профессор? — обратился спорящий к сидевшему за столом старику.

— Спор идет у вас в сущности о словах, — ответил ученый. — А в таких случаях надо начинать всегда с того, о чем вы сейчас только завели речь: надо договориться о значении слов. Как понимать слова: «двигаться вокруг предмета»? Смысл их может быть двоякий. Можно, во-первых, разуметь под ними перемещение по замкнутой линии, внутри которой находится предмет. Это одно понимание. Другое: двигаться по отношению к предмету так, чтобы видеть его со всех сторон. Держась первого понимания, вы должны признать, что четыре раза обошли вокруг белки. Придерживаясь же второго, — обязаны заключить, что не обошли вокруг нее ни разу. Поводов для спора здесь, как видите, нет, если обе стороны говорят на одном языке, понимают слова одинаково.

— Прекрасно, можно допустить двоякое понимание. Но какое все же правильнее?

— Так ставить вопрос не приходится. Уславливаясь можно о чем угодно. Уместно только спросить, что более согласно с общепринятым пониманием. Я сказал бы, что лучше вяжется с духом языка первое понимание и вот почему. Солнце, как известно, делает полный оборот вокруг своей оси немного более, чем за 25 суток.

— Солнце вертится?

— Конечно, как и Земля вокруг оси. Вообразите, однако, что вращение Солнца совершается медленнее, а именно, что оно делает один оборот не в 25 суток, а в $365\frac{1}{4}$ суток, т. е. в год. Тогда Солнце было бы обращено к Земле всегда одной и той же своей стороной; противоположной половины, «спины» Солнца, мы никогда не видели бы. Но разве стал бы кто-нибудь утверждать из-за этого, что Земля не кружится вокруг Солнца?

— Да, теперь ясно, что я все-таки кружился вокруг белки.

— Есть предложение, товарищи! Не расходиться, — сказал один из слушавших спор. — Так как в дождь гулять никто не пойдет, а перестанет дождик, видно, не скоро, то давайте проведем здесь время за головоломками. Начало сделано. Пусть каждый по очереди при-



Рис. 1. «Плутовка отступала в обратную сторону».

думает или припомнит какую-нибудь головоломку. Вы же, профессор, явитесь нашим верховным судьей.

— Если головоломки будут с алгеброй или с геометрией, то я должна отказаться, — заявила молодая женщина.

— И я тоже, — присоединился кто-то.

— Нет, нет, участвовать должны все! А мы попросим присутствующих не привлекать ни алгебры, ни геометрии, разве только самые начатки. Возражений не имеется?

— Тогда я согласна и готова первая предложить головоломку.

— Прекрасно, просим! — донеслось с разных сторон. — Начинайте.

2. В общей кухне. — Головоломка моя зародилась в обстановке дачной квартиры. Задача, так сказать, бытовая. Жилица — назову ее для удобства Тройкиной — положила в общую плиту 3 полена своих дров, жилица Пятеркина — 5 полен, жилец Бестопливный, у которого, как вы догадываетесь, не было своих дров, получил от обеих гражданок разрешение сварить обед на общем огне. В возмещение расходов он уплатил соседкам 8 копеек. Как должны они поделить между собой эту плату?

— Попролам, — поспешил заявить кто-то. Бестопливный пользовался их огнем в равной мере.

— Ну, нет,— возразил другой,— надо принять в соображение, как участвовали в этом огне дровяные вложения гражданок. Кто дал 3 полена, должен получить 3 копейки; кто дал 5 полена — получает 5 копеек. Вот это будет справедливый дележ.

— Товарищи,— взял слово тот, кто затеял игру и считался теперь председателем собрания.— Окончательные решения головоломок давайте пока не объявлять. Пусть каждый еще подумает над ними. Правильные ответы судья огласит нам за ужином. Теперь следующий. Очередь за вами, товарищ пионер!

3. Работа школьных кружков.— В нашей школе,— начал пионер,— имеется 5 кружков: слесарный, столярный, фотографический, шахматный и хоровой. Слесарный кружок занимается через день, столярный — через 2 дня на 3-й, фотографический — каждый 4-й день, шахматный — каждый 5-й день и хоровой — каждый 6-й день. Первого января собрались в школе все 5 кружков, а затем занятия велись в назначенные по плану дни, без отступлений от расписания. Вопрос состоит в том, сколько в первом квартале было еще вечеров, когда собирались в школе все 5 кружков.

— А год был простой или високосный? — осведомился у пионера.

Простой.— Значит, первый квартал,— январь, февраль, март,— надо считать за 90 дней?

— Очевидно.

— Позвольте к вопросу вашей головоломки присоединить еще один,— сказал профессор.— А именно: сколько в том же квартале года было таких вечеров, когда кружковых занятий в школе вовсе не происходило?

— Ага, понимаю! — раздался возглас.— Задача с подвохом. Ни одного дня не будет больше с 5 кружками и ни одного дня без всяких кружков. Это уж ясно!

— Почему? — спросил председатель.

— Объяснить не могу, но чувствую, что отгадчика жотят поймать впросак.

— Ну, это не довод. Вечером выяснитея, правильно ли ваше предчувствие. За вами очередь, товарищ!

4. Кто больше?— Двое считали в течение часа всех, кто проходил мимо них на тротуаре. Один стоял у ворот дома, другой прохаживался взад и вперед по тротуару. Кто насчитал больше прохожих?

— Идя, больше насчитаешь, ясное дело, — донеслось с другого конца стола.

— Ответ узнаем за ужином, — объявил председатель. — Следующий!

5. Дед и внук. — То, о чем я скажу, происходило в 1932 г. Мне было тогда ровно столько лет, сколько выражают последние две цифры года моего рождения. Когда я об этом соотношении рассказал деду, он удивил меня заявлением, что с его возрастом выходит то же самое. Мне это показалось невозможным...

— Разумеется, невозможно, — вставил чей-то голос.

— Представьте, что вполне возможно. Дед доказал мне это. Сколько же лет было каждому из нас?

6. Железнодорожные билеты. — Я — железнодорожная кассирша, продаю билеты, — начала следующая участница игры. — Многим это кажется очень простым делом. Не подозревают, с каким большим числом билетов приходится иметь дело кассиру даже маленькой станции. Ведь необходимо, чтобы пассажиры могли получить билеты от данной станции до любой другой на той же дороге, притом в обоих направлениях. Я служу на дороге с 25 станциями. Сколько же, по-вашему, различных образцов билетов заготовлено железной дорогой для всех ее касс?



Рис. 2. «Продаю железнодорожные билеты».

— Ваша очередь, товарищ летчик,— провозгласил председатель.

7. Полет вертолета.— Из Ленинграда вылетел прямо на север вертолет. Пролетев в северном направлении 500 км, он повернул на восток. Пролетев в эту сторону 500 км, вертолет сделал новый поворот — на юг и прошел в южном направлении 500 км. Затем он повернул на запад и, пролетев 500 км, опустился. Спрашивается: где расположено место спуска вертолета относительно Ленинграда — к западу, к востоку, к северу или к югу?

— На простака рассчитываете,— сказал кто-то: — 500 шагов вперед, 500 вправо, 500 назад да 500 влево — куда придем? Откуда вышли, туда и придем!

— Итак, где по-вашему спустился вертолет?

— На том же ленинградском аэродроме, откуда поднялся. Не так разве?

— Именно не так.

— В таком случае я ничего не понимаю!

— В самом деле, здесь что-то неладно,— вступил в разговор сосед.— Разве вертолет спустился не в Ленинграде?.. Нельзя ли повторить задачу?

Летчик охотно исполнил просьбу. Его внимательно выслушали и с недоумением переглянулись.

— Ладно,— объявил председатель.— До ужина успеем подумать об этой задаче, а сейчас будем продолжать.

8. Тень.— Позвольте мне,— сказал очередной загадчик,— взять сюжетом головоломки тот же вертолет. Что шире: вертолет или его полная тень?

— В этом и вся головоломка?

— Вся.

Тень, конечно, шире вертолета: ведь лучи солнца расходятся веером,— последовало сразу решение.

— Я бы сказал,— возразил кто-то,— что, напротив, лучи солнца параллельны; тень и вертолет одной ширины.

— Что вы? Разве не случалось вам видеть расходящиеся лучи от спрятанного за облаком солнца? Тогда можно воочию убедиться, как сильно расходятся солнечные лучи. Тень вертолета должна быть значительно больше вертолета, как тень облака больше самого облака.

— Почему же обычно принимают, что лучи солнца параллельны? Моряки, астрономы — все так считают...

Председатель не дал спору разгореться и предоставил слово следующему загадчику.

9. Задача со спичками. Очередной оратор высыпал на стол все спички из коробка и стал распределять их в три кучки.

— Костер собираетесь раскладывать? — шутили слушатели.

— Головоломка, — объяснил загадчик, — будет со спичками. Вот их три неравные кучки. Во всех вместе 48 штук. Сколько в каждой, я вам не сообщаю. Зато отметьте следующее: если из первой кучи я переложу во вторую столько спичек, сколько в этой второй куче имелось, затем из второй в третью переложу столько, сколько в этой третьей перед тем будет находиться, и, наконец, из третьей переложу в первую столько спичек, сколько в этой первой куче будет тогда иметься, — если, говорю, все это проделать, то число спичек во всех кучках станет одинаково. Сколько же было в каждой кучке первоначально?

10. Коварный пенёк. — Головоломка эта, — начал сосед последнего загадчика, — напоминает задачу, которую давно как-то задал мне деревенский математик.

Это был целый рассказ, довольно забавный. Повстречал крестьянин в лесу незнакомого старика. Разговорились. Старик внимательно оглядел крестьянина и сказал:

— Известен мне в леску этом пенечек один удивительный. Очень в нужде помогает.

— Как помогает? Вылечивает?

— Лечить не лечит, а деньги удваивает. Положишь под него кошель с деньгами, досчитаешь до ста — и готово: деньги, какие были в кошельке, удвоились. Такое свойство имеет. Замечательный пенёк!

— Вот бы мне испробовать, — мечтательно сказал крестьянин.

— Это можно. Отчего же? Заплатить только надо.

— Кому платить? И много ли?

— Тому платить, кто дорогу укажет. Мне, значит. А много ли, о том особый разговор.

Стали торговаться. Узнав, что у крестьянина в кошельке денег мало, старик согласился получать после каждого удвоения по 1 р. 20 к. На том и порешили.

Старик повел крестьянина в глубь леса, долго бродил с ним и, наконец, разыскал в кустах старый, покрытый мохом еловый пенёк. Взяв из рук крестьянина кошелек,

он засунул его между корнями пня. Досчитали до ста. Старик снова стал шарить и возиться у основания пня, наконец извлек оттуда кошелек и подал крестьянину.

Заглянул крестьянин в кошелек и что же? — деньги в самом деле удвоились! Отсчитал из них старику обещанные 1 р. 20 к. и попросил засунуть кошелек вторично под чудодейственный пенек.

Снова досчитали до ста, снова старик стал возиться в кустах у пня, и снова совершилось чудо: деньги в кошельке удвоились. Старик вторично получил из кошелька обусловленные 1 р. 20 к.

В третий раз спрятали кошель под пенек. Деньги удвоились и на этот раз. Но когда крестьянин уплатил старику обещанное вознаграждение, в кошельке не осталось больше ни одной копейки. Бедняга потерял на этой комбинации все свои деньги. Удваивать дальше было уже нечего, и крестьянин уныло побрел из лесу.

Секрет волшебного удвоения денег вам, конечно, ясен: старик не даром, отыскивая кошелек, мешкал в зарослях у пня. Но можете ли вы ответить на другой вопрос: сколько было у крестьянина денег до злополучных опытов с коварным пнем?

11. Задача о декабре. — Я, товарищи, языковед, от всякой математики далек, — начал пожилой человек, которому пришел черед задавать головоломку. — Не ждите от меня поэтому математической задачи. Могу только предложить вопрос из знакомой мне области. Разрешите задать календарную головоломку?

— Просим!

— Двенадцатый месяц называется у нас «декабрь». А вы знаете, что собственно значит «декабрь»? Слово это происходит от греческого слова «дека» — десять, отсюда также слово «декалитр» — десять литров, «декада» — десять дней и др. Выходит, что месяц декабрь носит название «десятый». Чем объяснить такое несоответствие?

— Ну теперь осталась только одна головоломка, — произнес председатель.

12. Арифметический фокус. — Мне приходится выступать последним, двенадцатым. Для разнообразия покажу вам арифметический фокус и попрошу раскрыть его секрет. Пусть кто-нибудь из вас, хотя бы вы, товарищ председатель, напишет на бумажке, тайно от меня, любое трехзначное число.

- Могут быть и нули в этом числе?
 - Не ставлю никаких ограничений. Любое трехзначное число, какое пожелаете.
 - Написал. Что теперь?
 - Припишите к нему это же число еще раз. У вас получится, конечно, шестизначное число.
 - Есть. Шестизначное число.
 - Передайте бумажку соседу, что сидит подальше от меня. А он пусть разделит это шестизначное число на семь.
 - Легко сказать: разделить на семь! Может и не разделится.
 - Не беспокойтесь, поделится без остатка.
 - Числа не знаете, а уверены, что поделится.
 - Сначала разделите, потом будем говорить.
 - На ваше счастье разделилось.
 - Результат вручите своему соседу, не сообщая мне. Он разделит его на 11.
 - Думаете опять повезет — разделится?
 - Делите, остатка не получится.
 - В самом деле без остатка! Теперь что?
 - Передайте результат дальше. Разделим его... ну, скажем, на 13.
 - Нехорошо выбрали. Без остатка на 13 мало чисел делится... Ан, нет, разделилось нацело. Везет же вам!
 - Дайте мне бумажку с результатом; только сложите ее, чтобы я не видел числа.
- Не развертывая листа бумаги, «фокусник» вручил его председателю.
- Извольте получить задуманное вами число. Правильно?
 - Совершенно верно! — с удивлением ответил тот, взглянув на бумажку.— Именно это я и задумал... теперь, так как список ораторов исчерпан, позвольте закрыть наше собрание, благо и дождь успел пройти. Разгадки всех головоломок будут оглашены сегодня же, после ужина. Записки с решениями можете подавать мне.

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК 1—12

1. Головоломка с белкой на поляне рассмотрена была полностью раньше. Переходим к следующей.
2. Нельзя считать, как многие делают, что 8 копеек уплачено за 8 полен, по 1 копейке за полено. Деньги эти

уплачены только за третью часть от 8 полен, потому что огнем пользовались трое в одинаковой мере. Отсюда следует, что все 8 полен оценены были в 8×3 , т. е. в 24 к., и цена одного полена — 3 копейки.

Теперь легко сообразить, сколько причитается каждому. Пятеркиной за ее 5 полен следует 15 копеек; но она сама воспользовалась плитой на 8 копеек; значит, ей остается дополучить еще 15—8, т. е. 7 копеек. Тройкина за три свои полена должна получить 9 копеек, а если вычесть 8 копеек, причитающихся с нее за пользование плитой, то следовать ей будет всего 9—8, т. е. 1 копейка.

Итак, при правильном дележе Пятеркина должна получить 7 копеек, Тройкина — 1 копейку.

3. На первый вопрос — через сколько дней в школе соберутся одновременно все 5 кружков — мы легко ответим, если сумеем разыскать наименьшее из всех чисел, которое делится без остатка на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6. Нетрудно сообразить, что число это 60. Значит, на 61-й день соберется снова 5 кружков: слесарный — через 30 двухдневных промежутков, столярный — через 20 трехдневных, фотокружок — через 15 четырехдневных, шахматный — через 12 пятидневок и хоровой — через 10 шестидневок. Раньше чем через 60 дней такого вечера не будет. Следующий подобный же вечер будет еще через 60 дней, т. е. уже во втором квартале.

Итак, в течение первого квартала окажется только один вечер, когда в клубе снова соберутся для занятий все 5 кружков.

Хлопотливее найти ответ на второй вопрос задачи: сколько будет вечеров, свободных от кружковых занятий? Чтобы разыскать такие дни, надо выписать по порядку все числа от 1 до 90 и зачеркнуть в этом ряду дни работы слесарного кружка, т. е. числа 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Потом зачеркнуть дни работы столярного кружка: 4-й, 7-й, 10-й, и т. д. После того как зачеркнем затем дни занятий фотокружка, шахматного и хорового, у нас останутся незачеркнутыми те дни первого квартала, когда ни один кружок не работал.

Кто проделает эту работу, тот убедится, что вечеров, свободных от занятий, в течение первого квартала будет довольно много: 24. В январе их 8, а именно: 2-го, 8-го,

12-го, 14-го, 18-го, 20-го, 24-го и 30-го. В феврале насчитывается 7 таких дней, в марте — 9.

4. Оба насчитали одинаковое число прохожих. Хотя тот, кто стоял у ворот, считал проходивших в обе стороны, зато тот, кто ходил, видел вдвое больше встречных людей.

Можно рассуждать и иначе. Когда тот из считавших, который прохаживался по тротуару, первый раз возвратился к своему стоявшему товарищу, они насчитали одинаковое число прохожих — всякий, прошедший мимо стоявшего, попался (на том или на обратном пути) и прохаживавшемуся (и наоборот). И каждый раз, возвращаясь к своему стоявшему товарищу, гулявший насчитывал такое же число прохожих. То же было и в конце часа, когда они последний раз встретились и сообщили друг другу результаты подсчетов.

5. С первого взгляда может действительно показаться, что задача неправильно составлена: выходит как будто, что внук и дед одного возраста. Однако, требование задачи, как сейчас увидим, легко удовлетворяется.

Внук, очевидно, родился в XX столетии. Первые две цифры года его рождения, следовательно, 19: таково число сотен. Число, выражаемое остальными цифрами, будучи сложено с самим собою, должно составить 32. Значит, это число 16: год рождения внука 1916, и ему в 1932 г. было 16 лет.

Дед его родился, конечно, в XIX столетии; первые две цифры года его рождения 18. Удвоенное число, выражаемое остальными цифрами, должно составить 132. Значит, само это число равно половине 132, т. е. 66. Дед родился в 1866 г. и ему в 1932 году было 66 лет.

Таким образом, и внуку и деду в 1932 г. было столько лет, сколько выражают последние две цифры годов их рождения.

6. На каждой из 25 станций пассажиры могут требовать билет до любой станции, т. е. на 24 пункта. Значит, разных билетов надо напечатать $25 \times 24 = 600$ образцов.

Если же пассажиры могут приобретать не только прямые билеты («туда»), но, при желании, и обратные («туда-обратно»), то число образцов билетов возрастет еще вдвое, т. е. их потребуется 1200.

7. Задача эта никакого противоречия не содержит. Не следует думать, что вертолет летел по контуру квадрата:

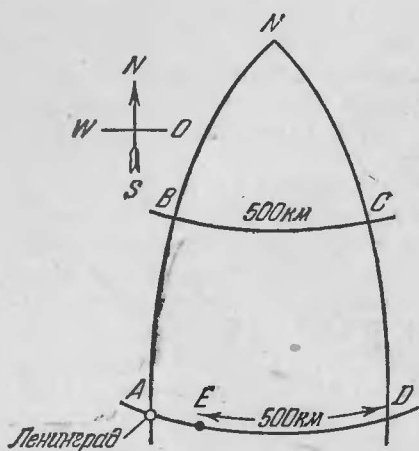


Рис. 3.

надо принять в расчет шарообразную форму Земли. Дело в том, что меридианы к северу сближаются (рис. 3); поэтому, пройдя 500 км по параллельному кругу, расположенному на 500 км севернее широты Ленинграда, вертолет отошел к востоку на большее число градусов, чем пролетел потом в обратном направлении, очутившись снова на широте Ленинграда. В результате вертолет, закончив

полет, оказался восточнее Ленинграда.

На сколько именно? Это можно рассчитать. На рис. 3 вы видите маршрут вертолета: $ABCDE$. Точка N — северный полюс; в этой точке сходятся меридианы AB и DC . Вертолет пролетел сначала 500 км на север, т. е. по меридиану AN . Так как длина градуса меридиана 111 км, то дуга меридиана в 500 км содержит $500 : 111 \approx 4^{\circ},5$. Ленинград лежит на 60-й параллели; значит, точка B находится на широте $60^{\circ} + 4^{\circ},5 = 64^{\circ},5$. Затем вертолет летел к востоку, т. е. по параллели BC , и прошел по ней 500 км. Длину одного градуса на этой параллели можно вычислить (или узнать из таблиц); она равна примерно 48 км. Отсюда легко определить, сколько градусов пролетел вертолет на восток: $500 : 48 \approx 10^{\circ},4$. Далее вертолет летел в южном направлении, т. е. по меридиану CD и, пройдя 500 км, должен был очутиться снова на параллели Ленинграда. Теперь путь лежит на запад, т. е. по AD ; 500 км этого пути явно короче расстояния AD . В расстоянии AD заключается столько же градусов, сколько и в BC , т. е. $10^{\circ},4$. Но длина 1° на ширине 60° примерно равна 55,5 км. Следовательно, между A и D расстояние равно $55,5 \times 10,4 \approx 577$ км. Мы видим, что вертолет не мог спуститься в Ленинграде; он не долетел до него 77 км, т. е. оказался над Ладожским озером и мог опуститься только на воду.

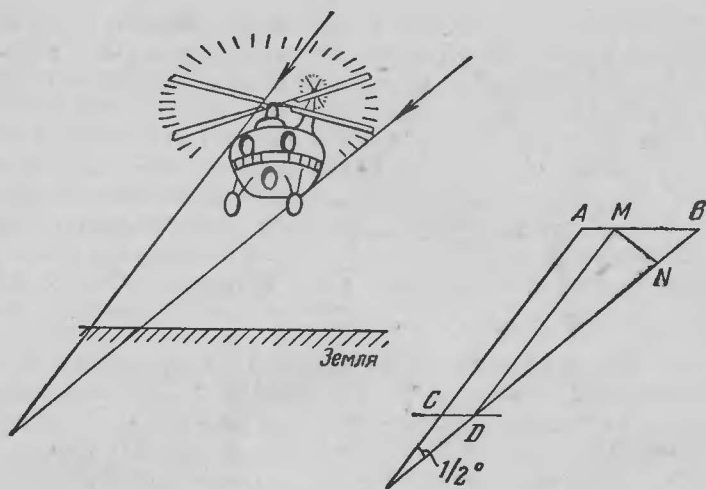


Рис. 4.

8. Беседовавшие об этой задаче допустили ряд ошибок. Неверно, что лучи солнца, падающие на земной шар, заметно расходятся. Земля так мала по сравнению с расстоянием ее от солнца, что солнечные лучи, падающие на какую-либо часть ее поверхности, расходятся на неуловимо малый угол: практически лучи эти можно считать параллельными. То, что мы видим иногда (при так называемом «иззаоблачном сиянии») лучи солнца, расходящиеся веером, — не более, как следствие перспективы.

В перспективе параллельные линии представляются сходящимися; вспомните вид уходящих вдаль рельсов или вид длинной аллеи.

Однако, из того, что лучи солнца падают на землю параллельным пучком, вовсе не следует, что полная тень вертолета равна по ширине самому вертолету. Взглянув на рис. 4, вы поймете, что полная тень вертолета в пространстве суживается по направлению к земле, и что, следовательно, тень, отбрасываемая им на земную поверхность, должна быть уже самого вертолета: CD меньше чем AB .

Если знать высоту вертолета, то можно вычислить и то, как велика эта разница. Пусть вертолет летит на высоте 100 м над земной поверхностью. Угол, составляемый прямыми AC и BD между собою, равен тому углу,

под которым усматривается солнце с земли; угол этот известен: около $1/2^\circ$. С другой стороны, известно, что всякий предмет, видимый под углом в $1/2^\circ$, удален от глаза на 115 своих поперечников. Значит, отрезок MN (этот отрезок усматривается с земной поверхности под углом в $1/2^\circ$) должен составлять 115-ю долю от AC . Величина AC больше отвесного расстояния от A до земной поверхности. Если угол между направлением солнечных лучей и земной поверхностью равен 45° , то AC (при высоте вертолета 100 м) составляет около 140 м, и, следовательно, отрезок MN равен $\frac{140}{115} \approx 1,2$ м.

Но избыток ширины вертолета над шириною тени, т. е. отрезок MB , больше MN , а именно больше в 1,4 раза, потому что угол MBD почти точно равен 45° . Следовательно, MB равно $1,2 \times 1,4$; это дает почти 1,7 м.

Все сказанное относится к полной тени вертолета — черной и резкой, и не имеет отношения к так называемой полутени, слабой и размытой.

Расчет наш показывает, между прочим, что будь на месте вертолета небольшой шар-зонд, диаметром меньше 1,7 м, он не отбрасывал бы вовсе полной тени; видна была бы только его смутная полутень.

9. Задачу решают с конца. Будем исходить из того, что после всех перекладываний число спичек в кучках сделалось одинаковым. Так как от этих перекладываний общее число спичек не изменилось, осталось прежнее (48), то в каждой кучке к концу всех перекладываний оказалось 16 штук.

Итак, имеем в самом конце:

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка
16	16	16

Непосредственно перед этим в 1-ю кучку было прибавлено столько спичек, сколько в ней имелось; иначе говоря, число спичек в ней было удвоено. Значит, до последнего перекладывания в 1-й кучке было не 16, а только 8 спичек. В кучке же 3-й, из которой 8 спичек было взято, имелось перед тем $16 + 8 = 24$ спички.

Теперь у нас такое распределение спичек по кучкам:

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка
8	16	24

Далее: мы знаем, что перед этим из 2-й кучки было переложено в 3-ю столько спичек, сколько имелось в 3-й кучке. Значит 24 — это удвоенное число спичек, бывших в 3-й кучке до этого перекаладывания. Отсюда узнаем распределение спичек после первого перекаладывания:

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка
8	$16+12=28$	12

Легко сообразить, что раньше первого перекаладывания (т. е. до того как из 1-й кучки переложено было во 2-ю столько спичек, сколько в этой 2-й имелось) — распределение спичек было таково:

1-я кучка	2-я кучка	3-я кучка
22	14	12

Таковы первоначальные числа спичек в кучках.

10. Эту головоломку также проще решить с конца. Мы знаем, что после третьего удвоения в кошельке оказалось 1 р. 20 к. (деньги эти получил старик в последний раз). Сколько же было до этого удвоения? Конечно, 60 к. Остались эти 60 к. после уплаты старику вторых 1 р. 20 к., а до уплаты было в кошельке 1 р. 20 к. + 60 к. = 1 р. 80 к.

Далее: 1 р. 80 к. оказались в кошельке после второго удвоения; до того было всего 90 к., оставшихся после уплаты старику первых 1 р. 20 к. Отсюда узнаем, что до уплаты находилось в кошельке 90 к. + 1 р. 20 к. = 2 р. 10 к. Столько денег имелось в кошельке после первого удвоения; раньше же было вдвое меньше — 1 р. 05 к. Это и есть те деньги, с которыми крестьянин приступил к своим неудачным финансовым операциям.

Проверим ответ.

Деньги в кошельке:

после 1-го удвоения	1 р. 5 к. $\times 2 = 2$ р. 10 к.,
» 1-й уплаты	2 р. 10 к. — 1 р. 20 к. = 90 к.,
» 2-го удвоения	90 к. $\times 2 = 1$ р. 80 к.,
» 2-й уплаты	1 р. 80 к. — 1 р. 20 к. = 60 к.,
» 3-го удвоения	60 к. $\times 2 = 1$ р. 20 к.,
» 3-й уплаты	1 р. 20 к. — 1 р. 20 к. = 0.

11. Наш календарь ведет свое начало от календаря древних римлян. Римляне же (до Юлия Цезаря) считали началом года не 1 января, а 1 марта. Декабрь тогда был,

следовательно, д е с я т ы й месяц. С перенесением начала года на 1 января, названия месяцев изменены не были. Отсюда и произошло то несоответствие между названием и порядковым номером, которое существует теперь для ряда месяцев.

Название месяцев	Смысл названия	Порядковый номер
Сентябрь	седьмой	9
Октябрь	восьмой	10
Ноябрь	девятый	11
Декабрь	десятый	12

12. Проследим за тем, что проделано было с задуманным числом. Прежде всего к нему приписали взятое трехзначное число еще раз. Это то же самое, что приписать три нуля и прибавить затем первоначальное число; например:

$$872\ 872 = 872\ 000 + 872.$$

Теперь ясно, что собственно проделано было с числом: его увеличили в 1000 раз и, кроме того, прибавили его самого; короче сказать — умножили число на 1001.

Что же сделано было потом с этим произведением? Его разделили последовательно на 7, на 11 и на 13. В конечном итоге, значит, разделили его на $7 \times 11 \times 13$, т. е. на 1001.

Итак, задуманное число сначала умножили на 1001, потом разделили на 1001. Надо ли удивляться, что в результате получилось то же самое число?

* *

*

Прежде чем закончить главу о головоломках в доме отдыха, расскажу еще о трех арифметических фокусах, которыми вы можете занять досуг ваших товарищей. Два состоят в отгадывании чисел, третий — в отгадывании владельцев вещей.

Это — старые, быть может даже и известные вам фокусы, но едва ли все знают, на чем они основаны. А без

знания теоретической основы фокуса нельзя сознательно и уверенно его выполнять. Обоснование первых двух фокусов потребует от нас весьма скромной и ничуть не утомительной экскурсии в область начальной алгебры.

13. Зачеркнутая цифра. Пусть товарищ ваш задумает какое-нибудь многозначное число, например, 847. Предложите ему найти сумму цифр этого числа $(8+4+7)=19$ и отнять ее от задуманного числа. У загадчика окажется:

$$847-19=828.$$

В том числе, которое получится, пусть он зачеркнет одну цифру — безразлично какую, и сообщит вам все остальные. Вы немедленно называете ему зачеркнутую цифру, хотя не знаете задуманного числа и не видели, что с ним проделывалось.

Как можете вы это выполнить и в чем разгадка фокуса?

Выполняется это очень просто: подыскивается такая цифра, которая вместе с суммой вам сообщенных цифр составила бы ближайшее число, делящееся на 9 без остатка. Если, например, в числе 828 была зачеркнута первая цифра (8) и вам сообщены цифры 2 и 8, то, сложив $2+8$, вы соображаете, что до ближайшего числа, делящегося на 9, т. е. до 18 — не хватает 8. Это и есть зачеркнутая цифра.

Почему так получается? Потому что если от какого-либо числа отнять сумму его цифр, то должно остаться число, делящееся на 9, — иначе говоря, такое, сумма цифр которого делится на 9. В самом деле, пусть в задуманном числе a — цифра сотен, b — цифра десятков и c — цифра единиц. Значит, всего в этом числе содержится единиц

$$100a + 10b + c.$$

Отнимаем от этого числа сумму его цифр $a+b+c$. Получим

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Но $9(11a+b)$, конечно, делится на 9; значит, при вычитании из числа суммы его цифр всегда должно получиться число, делящееся на 9 без остатка.

При выполнении фокуса может случиться, что сумма сообщенных вам цифр сама делится на 9 (например, 4 и 5). Это показывает, что зачеркнутая цифра есть либо 0, либо 9. Так вы и должны ответить: 0 или 9.

Вот видеоизменение того же фокуса: вместо того чтобы из задуманного числа вычитать сумму его цифр, можно вычесть число, полученное из данного какой-либо перестановкой его цифр. Например, из числа 8247 можно вычесть 2748 (если получается число, большее задуманного, то вычитают меньшее из большего). Далее поступают, как раньше сказано: $8247 - 2748 = 5499$; если зачеркнута цифра 4, то, зная цифры 5, 9, 9, вы замечаете, что ближайшее к $5+9+9$, т. е. 23, число, делящееся на 9, есть 27. Значит зачеркнутая цифра $27 - 23 = 4$.

14. Отгадать число, ничего не спрашивая. Вы предлагаете товарищу задумать любое трехзначное число, не оканчивающееся нулем (но такое, чтобы разница между крайними цифрами была не меньше 2), и просите затем переставить цифры в обратном порядке. Сделав это, он должен вычесть меньшее число из большего и полученную разность сложить с нею же, но написанную в обратной последовательности цифр. Ничего не спрашивая у загадчика, вы сообщаете ему число, которое у него получилось в конечном итоге.

Если, например, было задумано 467, то загадчик должен выполнить следующие действия:

$$\begin{array}{r} 467; \quad 764; \quad \begin{array}{r} - 764 \\ - 467 \\ \hline 297 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} 297 \\ 792 \\ \hline 1089 \end{array} \end{array}$$

Этот окончательный результат — 1089 — вы и объявляете загадчику. Как вы можете его узнать?

Рассмотрим задачу в общем виде. Возьмем число с цифрами a , b , c , причем a больше чем c по крайней мере на две единицы. Оно изобразится так:

$$100a + 10b + c.$$

Число с обратным расположением цифр имеет вид:

$$100c + 10b + a.$$

Разность между первым и вторым равна:

$$99a - 99c.$$

Делаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} 99a - 99c &= 99(a - c) = 100(a - c) - (a - c) = \\ &= 100(a - c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c = \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c). \end{aligned}$$

Значит, разность состоит из следующих трех цифр:

$$\begin{aligned} \text{цифра сотен: } &a - c - 1, \\ \text{» десятков: } &9, \\ \text{» единиц: } &10 + c - a. \end{aligned}$$

Число с обратным расположением цифр изображается так:

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1).$$

Сложив оба выражения

$$+ \begin{aligned} &100(a - c - 1) + 90 + 10 + c - a \\ &100(10 + c - a) + 90 + a - c - 1, \end{aligned}$$

получаем

$$100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089.$$

Итак, независимо от выбора цифр a , b и c всегда получается одно и то же число: 1089. Нетрудно поэтому отгадать результат этих вычислений: вы знали его заранее.

Понятно, что показывать этот фокус одному лицу дважды нельзя — секрет будет раскрыт.

15. Кто что взял? Для выполнения этого остроумного фокуса необходимо приготовить три какие-нибудь мелкие вещицы, удобно помещающиеся в кармане, например — карандаш, ключ и перочинный ножик. Кроме того, поставьте на стол тарелку с 24 орехами; за неимением орехов годятся шашки, кости домино, спички и т. п.

Троим товарищам вы предлагаете во время вашего отсутствия спрятать в карман карандаш, ключ или ножик, кто какую вещь хочет. Вы беретесь отгадать, в чем кармане какая вещь.

Процедура отгадывания проводится так. Возвратившись в комнату после того, как вещи спрятаны по карманам товарищей, вы начинаете с того, что вручаете им на

сохранение орехи из тарелки. Первому даете один орех, второму — два, третьему — три. Затем снова удаляетесь из комнаты, оставив товарищам следующую инструкцию. Каждый должен взять себе из тарелки еще орехов, а именно: обладатель карандаша берет столько орехов, сколько ему было вручено; обладатель ключа берет в д в о е больше того числа орехов, какое ему было вручено; обладатель ножа берет в ч е т в е р о больше того числа орехов, какое ему было вручено.

Прочие орехи остаются на тарелке.

Когда все это проделано и вам дан сигнал возвратиться, вы, входя в комнату, бросаете взгляд на тарелку и объявляете, у кого в кармане какая вещь.

Фокус тем более озадачивает, что выполняется без участия тайного сообщника, подающего вам незаметные сигналы. В нем нет никакого обмана: он целиком основан на арифметическом расчете. Вы разыскиваете обладателя каждой вещи единственно лишь по числу оставшихся орехов. Остается их на тарелке немного — от 1 до 7, и счесть их можно одним взглядом. Как же, однако, узнать по остатку орехов, кто взял какую вещь?

Очень просто: каждому случаю распределения вещей между товарищами отвечает иное число остающихся орехов. Мы сейчас в этом убедимся.

Пусть имена ваших товарищей, получивших один, два, три ореха, соответственно Владимир, Георгий, Константин; обозначим их начальными буквами: *В*, *Г*, *К*. Вещи также обозначим буквами: карандаш — *а*, ключ — *б*, нож — *с*. Как могут три вещи распределиться между тремя обладателями? Шестью способами.

<i>В</i>	<i>Г</i>	<i>К</i>
<i>а</i>	<i>б</i>	<i>с</i>
<i>а</i>	<i>с</i>	<i>б</i>
<i>б</i>	<i>а</i>	<i>с</i>
<i>б</i>	<i>с</i>	<i>а</i>
<i>с</i>	<i>а</i>	<i>б</i>
<i>с</i>	<i>б</i>	<i>а</i>

Других случаев, очевидно, быть не может; наша табличка систематически исчерпывает все комбинации.

Посмотрим теперь, какие остатки отвечают каждому из этих 6 случаев:

ВГК	Число взятых орехов	Итого	Оста-ток
<i>abc</i>	$1+1=2$; $2+4=6$; $3+12=15$	23	1
<i>acb</i>	$1+1=2$; $2+8=10$; $3+6=9$	21	3
<i>bac</i>	$1+2=3$; $2+2=4$; $3+12=15$	22	2
<i>bca</i>	$1+2=3$; $2+8=10$; $3+3=6$	19	5
<i>cab</i>	$1+4=5$; $2+2=4$; $3+6=9$	18	6
<i>cba</i>	$1+4=5$; $2+4=6$; $3+3=6$	17	7

Вы видите, что остаток орехов во всех случаях различен. Поэтому, зная остаток, вы легко устанавливаете, каково распределение вещей между вашими товарищами. Вы снова — в третий раз — удаляетесь из комнаты и заглядываете там в свою записную книжку, где записана сейчас воспроизведенная табличка (собственно нужны вам только первая и последняя графы); запомнить ее наизусть трудно, да и нет надобности. Табличка скажет вам, в чьем кармане какая вещь. Если, например, на тарелке осталось 5 орехов, то это означает (случай *b, c, a*) что

ключ — у Владимира,
нож — у Георгия,
карандаш — у Константина.

Чтобы фокус удался, вы должны твердо помнить, сколько орехов вы дали каждому товарищу (раздавайте орехи поэтому всегда по алфавиту, как и было сделано в нашем случае).

Математика в играх

ДОМИНО

16. Цепь из 28 костей. Почему 28 костей домино можно выложить с соблюдением правил игры в одну непрерывную цепь?

17. Начало и конец цепи. Когда 28 костей домино выложены в цепь, на одном ее конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

18. Фокус с домино. Ваш товарищ берет одну из костей домино и предлагает вам из остальных 27 составить непрерывную цепь, утверждая, что это всегда возможно, какая бы кость ни была взята. Сам же он удаляется в соседнюю комнату, чтобы не видеть вашей цепи.

Вы приступаете к работе и убеждаетесь, что товарищ ваш прав: 27 костей выложились в одну цепь. Еще удивительнее то, что товарищ, оставаясь в соседней комнате и не видя вашей цепи, объявляет оттуда, какие числа очков на ее концах.

Как может он это знать? И почему он уверен, что из всяких 27 костей домино составится непрерывная цепь?

19. Рамка. Рис. 5 изображает квадратную рамку, выложенную из костей домино с соблюдением правил игры. Стороны рамки равны по длине, но не одинаковы по сумме очков: верхний и левый ряды заключают по 44 очка, остальные же два ряда — 59 и 32.

Можете ли вы выложить такую квадратную рамку, все стороны которой заключали бы одинаковую сумму очков — именно 44?

20. Семь квадратов. Четыре кости домино можно выбрать так, чтобы из них составилась квадратик с рав-

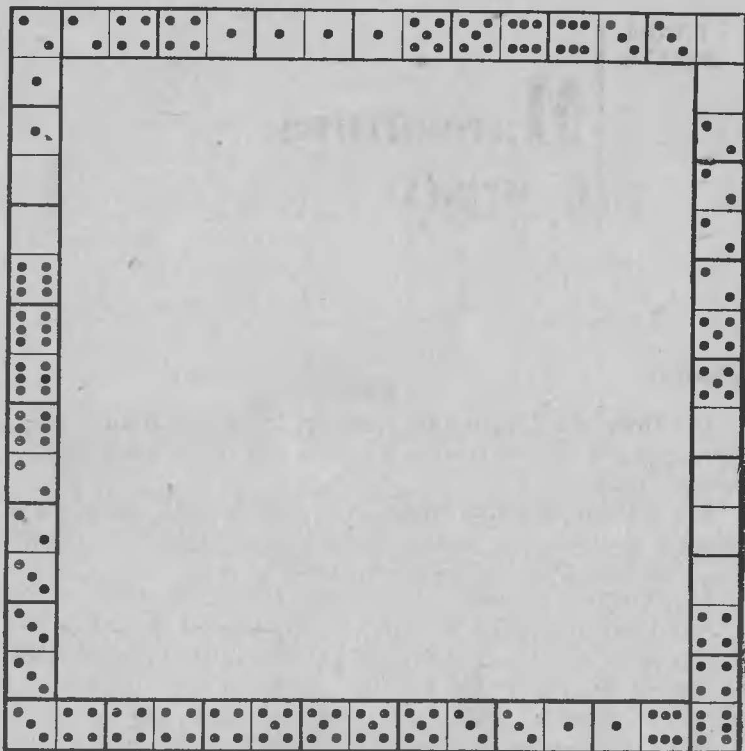


Рис. 5.

ной суммой очков на каждой стороне. (Образчик вы видите на рис. 6: сложив очки на каждой стороне квадрата, во всех случаях получите 11.)

Можете ли вы из полного набора домино составить одновременно семь таких квадратов? Не требуется, чтобы сумма очков на одной стороне была у всех квадратов одна и та же; надо лишь, чтобы каждый квадрат имел на своих четырех сторонах одинаковую сумму очков.

21. Магические квадраты из домино. На рис. 7 показан квадрат из 18 косточек домино, замечательный тем, что сумма очков любого его ряда — продольного, поперечного или диагонального — одна и

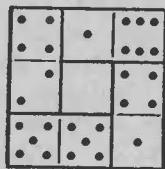


Рис. 6.

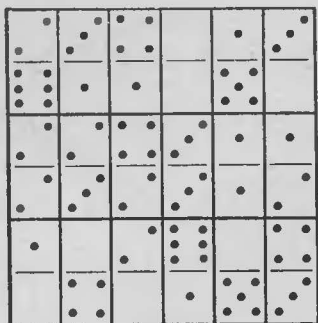


Рис. 7.

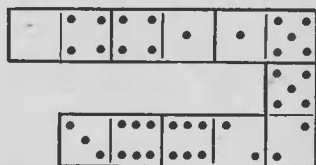


Рис. 8.

та же: 13. Подобные квадраты издавна называются «магическими».

Вам предлагается составить несколько таких же 18-косточковых магических квадратов, но с другой суммой очков в ряду. 13 — наименьшая сумма в рядах магического квадрата, составленного из 18 костей. Наибольшая сумма — 23.

22. Прогрессия из домино. Вы видите на рис. 8 шесть косточек домино, выложенных по правилам игры и отличающихся тем, что число очков на косточках (на двух половинах каждой косточки) возрастает на 1. Ряд начинается с 4 и состоит из следующих чисел очков:

4; 5; 6; 7; 8; 9.

Такой ряд чисел, которые возрастают (или убывают) на одну и ту же величину, называется «арифметической прогрессией». В нашем ряду каждое число больше предыдущего на 1; но в прогрессии может быть и любая другая «разность».

Задача состоит в том, чтобы составить еще несколько 6-косточковых прогрессий.

ИГРА В 15, ИЛИ ТАКЕН

Общеизвестная коробочка с 15 пронумерованными квадратными пашками имеет любопытную историю, о которой мало кто из игроков подозревает. Расскажем о ней словами немецкого исследователя игр, математика В. Аренса.

«Около полувека назад — в конце 70-х годов — вынырнула в Соединенных Штатах «игра в 15»; она быстро распространилась и, благодаря несчетному числу игроков, которых она заполонила, превратилась в настоящее общественное бедствие.

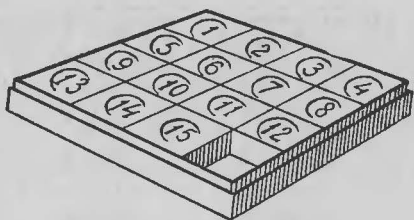


Рис. 9. Игра в 15.

«То же наблюдалось по эту сторону океана, в Европе. Здесь можно было даже в конках видеть в руках пассажиров коробочки с 15 шашками. В конторах и магазинах хозяева приходили в отчаяние от увлечения своих служащих и вынуждены были воспретить им игру в часы занятий и торговли. Содержатели увеселительных заведений ловко использовали эту манию и устраивали большие игорные турниры.

Игра проникла даже в торжественные залы германского рейхстага. «Как сейчас вижу в рейхстаге седовласых людей, сосредоточенно рассматривающих в своих руках квадратную коробочку», — вспоминает известный географ и математик Зигмунд Гюнтер, бывший депутатом в годы игровой эпидемии.

«В Париже игра эта нашла себе приют под открытым небом, на бульварах, и быстро распространилась из столицы по всей провинции. «Не было такого уединенного сельского домика, где не гнезился бы этот паук, подстерегая жертву, готовую запутаться в его сетях», — писал один французский автор.

«В 1880 г. игорная лихорадка достигла, по-видимому, своей высшей точки. Но вскоре после этого тиран был повержен и побежден оружием математики. Математическая теория игры обнаружила, что из многочисленных задач, которые могут быть предложены, разрешима только половина; другая не разрешима никакими ухищрениями.

«Стало ясно, почему иные задачи не поддавались самым упорным усилиям, и почему организаторы турниров отваживались назначать огромные премии за разрешения задач. В этом отношении всех превзошел изобретатель игры, предложивший издателю нью-йоркской газеты для

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 10.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 11.

воскресного приложения неразрешимую задачу с премией в 1000 долларов за ее разрешение; так как издатель колебался, то изобретатель выразил полную готовность внести названную сумму из собственного кармана. Имя

изобретателя Самуэль (Сэм) Лойд. Он приобрел широкую известность как составитель остроумных задач и множества головоломок. Любопытно, что получить в Америке патент на придуманную игру ему не удалось. Согласно инструкции, он должен был представить «рабочую модель» для исполнения пробной партии; он предложил чиновнику патентного бюро задачу, и когда последний осведомился, разрешима ли она, изобретатель должен был ответить: «Нет, это математически невозможно». «В таком случае,— последовало возражение,— не может быть и рабочей модели, а без модели нет и патента». Лойд удовлетворился этой резолюцией,— но, вероятно, был бы более настойчив, если бы предвидел неслыханный успех своего изобретения» *).

Приведем собственный рассказ изобретателя игры о некоторых фактах из ее истории:

«Давнишние обитатели царства смекалки,— пишет Лойд,— помнят, как в начале 70-х годов я заставил весь мир ломать голову над коробкой с подвижными шашками, получившей известность под именем «игры в 15» (рис. 10). Пятнадцать шашек были размещены в квадратной коробочке в правильном порядке, и только шашки 14 и 15 были переставлены, как показано на прилагаемой иллюстрации (рис. 11). Задача состояла в том, чтобы, последовательно передвигая шашки, привести их в нормальное положение, причем, однако, порядок шашек 14 и 15 должен быть исправлен.

«Премия в 1000 долларов, предложенная за первое правильное решение этой задачи, никем не была заслужена, хотя все без усталы решали эту задачу. Рассказы-

*) Этот эпизод использован Марком Твэном в его романе «Американский претендент».



Рис. 12. «...о почтенных чиновниках, целые ночи напролет простаивавших под фонарем...».

вали забавные истории о торговцах, забывавших из-за этого открывать свои магазины, о почтенных чиновниках, целые ночи напролет простаивавших под уличным фонарем, отыскивая путь к решению. Никто не желал отказаться от поисков решения, так как все чувствовали уверенность в ожидающем их успехе. Штурманы, говорят, из-за игры сажали на мель свои суда, машинисты проводили поезда мимо станций; фермеры забрасывали свои плуги».

* *
*

Познакомим читателя с начатками теории этой игры. В полном виде она очень сложна и тесно примыкает к одному из отделов высшей алгебры («теория определителей»). Мы ограничимся лишь некоторыми соображениями, изложенными В. Аренсом.

«Задача игры состоит обыкновенно в том, чтобы посредством последовательных передвижений, допускаемых наличием свободного поля, перевести любое начальное расположение 15 шашек в нормальное, т. е. в такое, при котором шашки идут в порядке своих чисел: в верхнем левом углу 1, направо — 2, затем 3, потом в верхнем правом углу 4; в следующем ряду слева направо: 5, 6,

7, 8 и т. д. Такое нормальное конечное расположение мы даем здесь на рис. 10.

«Вообразите теперь расположение, при котором 15 пашек размещены в пестром беспорядке. Рядом передвижений всегда можно привести пашку 1 на место, занимаемое ею на рисунке.

«Точно так же возможно, не трогая пашки 1, привести пашку 2 на соседнее место вправо. Затем, не трогая пашек 1 и 2, можно поместить пашки 3 и 4 на их нормальные места: если они случайно не находятся в двух последних вертикальных рядах, то легко привести их в эту область и затем рядом передвижений достичь желаемого результата. Теперь верхняя строка 1, 2, 3, 4 приведена в порядок, и при дальнейших манипуляциях с пашками мы трогать этого ряда не будем. Таким же путем стараемся мы привести в порядок и вторую строку: 5, 6, 7, 8; легко убедиться, что это всегда достижимо. Далее, на пространстве двух последних рядов необходимо привести в нормальное положение пашки 9 и 13; это тоже всегда возможно. Из всех приведенных в порядок пашек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 13 в дальнейшем ни одной не перемещают; остается небольшой участок в шесть полей, в котором одно свободно, а пять остальных заняты пашками 10, 11, 12, 14, 15 в произвольном порядке. В пределах этого шестиместного участка всегда можно привести на нормальные места пашки 10, 11, 12. Когда это достигнуто, то в последнем ряду пашки 14 и 15 окажутся размещенными либо в нормальном порядке, либо в обратном (рис. 11). Таким путем, который читатели легко могут проверить на деле, мы приходим к следующему результату.

«Любое начальное положение может быть приведено к расположению либо рис. 10 (положение I), либо рис. 11 (положение II).

«Если некоторое расположение, которое для краткости обозначим буквою S , может быть преобразовано в положение I, то, очевидно, возможно и обратное — перевести положение I в положение S . Ведь все ходы пашек обратимы: если, например, в схеме I мы можем пашку 12 поместить на свободное поле, то можно ход этот тотчас взять обратно противоположными движениями.

«Итак, мы имеем две такие серии расположений, что положения одной серии могут быть переведены в нормальное I, а другой серии — в положение II. И наоборот,

из нормального расположения можно получить любое положение первой серии, а из расположения II — любое положение второй серии. Наконец, два любых расположения, принадлежащих к одной и той же серии, могут быть переводимы друг в друга.

«Нельзя ли идти дальше и объединить эти два расположения — I и II? Можно строго доказать (не станем входить в подробности), что положения эти не превращаются одно в другое никаким числом ходов. Поэтому все огромное число размещений шашек распадается на две разобщенные серии: 1) на те, которые могут быть переведены в нормальное I: это — положения разрешимые, 2) на те, которые могут быть переведены в положение II и, следовательно, ни при каких обстоятельствах не переводятся в нормальное расположение: это — положения, за разрешение которых назначались огромные премии.

«Как узнать, принадлежит ли заданное расположение к первой или ко второй серии? Пример разъяснит это.

«Рассмотрим такое расположение.

«Первый ряд шашек в порядке, как и второй, за исключением последней шашки (9). Эта шашка занимает место, которое в нормальном расположении принадлежит 8. Шашка 9 стоит, значит, р а н е е шашки 8: такое упреждение нормального порядка называют «беспорядком». О шашке 9 мы скажем: здесь имеет место 1 беспорядок. Рассматривая дальнейшие шашки, обнаруживаем «упреждение» для шашки 14; она поставлена на три места (шашек 12, 13, 11) ранее своего нормального положения; здесь у нас 3 беспорядка (14 ранее 12; 14 ранее 13; 14 ранее 11). Всего мы насчитали уже $1+3=4$ беспорядка. Далее, шашка 12 помещена ранее шашки 11, и точно так же шашка 13 ранее шашки 11. Это дает еще 2 беспорядка. Итого имеем 6 беспорядков. Подобным образом для каждого расположения устанавливают общее число беспорядков, освободив предварительно последнее место в правом нижнем углу. Если общее число беспорядков, как в рассмотренном случае, ч е т н о е, то заданное расположение может быть приведено к нормальному конечному; другими словами, оно принадлежит к разрешимым. Если же число беспорядков н е ч е т н о е, то расположение принадлежит ко второй серии, т. е. к неразрешимым (нуль беспорядков принимается за четное число их).

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Рис. 13.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 14.

«Благодаря ясности, внесенной в эту игру математикой, прежняя лихорадочная страстность в увлечении сейчас совершенно немыслима. Математика создала исчерпывающую теорию игры, теорию, не оставляющую ни од-

ного сомнительного пункта. Исход игры зависит не от каких-либо случайностей, не от находчивости, как в других играх, а от чисто математических факторов, предопределяющих его с безусловной достоверностью».

Обратимся теперь к головоломкам в этой области.

Вот несколько разрешимых задач, придуманных изобретателем игры:

23. Первая задача Лойда. Исходя из расположения, показанного на рис. 11, привести шашки в правильный порядок, но со свободным полем в левом верхнем углу (рис. 13).

24. Вторая задача Лойда. Исходя из расположения рис. 11 поверните коробку на четверть оборота и передвигайте шашки до тех пор, пока они не примут расположения рис. 14.

25. Третья задача Лойда. Передвигая шашки согласно правилам игры из расположения рис. 11, превратите коробку в «магический квадрат», а именно, разместите шашки так, чтобы сумма чисел была во всех направлениях равна 30.

КРОКЕТ

Занимаясь головоломками, относящимися к домино и игре 15, мы оставались в пределах арифметики. Переходя к головоломкам на крокетной площадке, мы вступаем отчасти в область геометрии.

Предлагаю крокетным игрокам следующие пять задач.

26. Пройти ворота или крокировать? Крокетные ворота имеют прямоугольную форму. Ширина их вдвое больше диаметра шара. При таких условиях, что легче: свободно, не задевая проволоки, пройти с наилучшей пози-

ции ворота или с такого же расстояния попасть в шар («крокировать»)?

27. Шар и столбик. Толщина крокетного столбика внизу — 6 см. Диаметр шара 10 см. Во сколько раз попасть в шар легче, чем с такого же расстояния попасть в колышек («заколоться»)?

28. Пройти ворота или заколоться? Шар в двое уже прямоугольных ворот и вдвое шире столбика. Что легче: свободно пройти ворота с наилучшей позиции или с такого же расстояния заколоться?

29. Пройти мышеловку или крокировать? Ширина прямоугольных ворот в три раза больше диаметра шара. Что легче: свободно пройти с наилучшей позиции мышеловку или с такого же расстояния крокировать шар?

30. Непроходимая мышеловка. При каком соотношении между шириной прямоугольных ворот и диаметром шара пройти мышеловку становится невозможным?

РЕШЕНИЯ ГОЛОВЛОМОК 16—30

16. Для упрощения задачи отложим пока в сторону все 7 двойных косточек: 0—0, 1—1, 2—2 и т. д. Останется 21 косточка, на которых каждое число очков повторяется 6 раз. Например, 4 очка (на одном поле) имеется на следующих 6 косточках:

4—0; 4—1; 4—2; 4—3; 4—5; 4—6.

Итак, каждое число очков повторяется, мы видим, четное число раз. Ясно, что косточки такого набора можно приставлять одну к другой равными числами очков до исчерпания всего набора. А когда это сделано, когда наши 21 косточка вытянуты в непрерывную цепь, тогда между стыками 0—0, 1—1, 2—2 и т. д. вдвигаем отложенные 7 двойняшек. После этого все 28 косточек домино оказываются вытянутыми, с соблюдением правил игры, в одну цепь.

17. Легко показать, что цепь из 28 костей домино должна кончатся тем же числом очков, каким она начинается. В самом деле: если бы было не так, то числа очков, оказавшиеся на концах цепи, повторялись бы не четное число раз (внутри цепи числа очков лежат ведь парами); мы знаем, однако, что в полном наборе костей

домино каждое число очков повторяется 8 раз, т. е. четное число раз. Следовательно, сделанное нами допущение о неодинаковом числе очков на концах цепи — неправильно: числа очков должны быть одинаковы. (Рассуждения такого рода, как это, в математике называются «доказательствами от противного».)

Между прочим, из только что доказанного свойства цепи вытекает следующее любопытное следствие: цепь из 28 косточек всегда можно сомкнуть концами и получить кольцо. Полный набор костей домино может быть, значит, выложен, с соблюдением правил игры, не только в цепь со свободными концами, но также и в замкнутое кольцо.

Читателя может заинтересовать вопрос: сколькими различными способами выполняется такая цепь или кольцо? Не входя в утомительные подробности расчета, скажем здесь, что число различных способов составления 28-косточковой цепи (или кольца) огромно: свыше 7 триллионов. Вот точное число:

7 959 229 931 520

(оно представляет собою произведение следующих множителей: $2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$).

18. Решение этой головоломки вытекает из только что сказанного. 28 косточек домино, мы знаем, всегда выкладываются в сомкнутое кольцо; следовательно, если из этого кольца вынуть одну косточку, то

1) остальные 27 косточек составят непрерывную цепь с разомкнутыми концами;

2) концевые числа очков этой цепи будут те, которые имеются на вынутой косточке.

Спрятав одну кость домино, мы можем поэтому заранее сказать, какие числа очков будут на концах цепи, составленной из прочих костей.

19. Сумма очков всех сторон искомого квадрата должна равняться $44 \times 4 = 176$, т. е. на 8 больше, чем сумма очков на косточках полного набора домино (168). Происходит это, конечно, оттого, что числа очков, занимающих вершины квадрата, считаются дважды. Сказанным определяется, какова должна быть сумма очков на вершинах квадрата: 8. Это несколько облегчает поиски требуемого расположения, хотя нахождение его все же довольно хлопотливо. Решение показано на рис. 15.

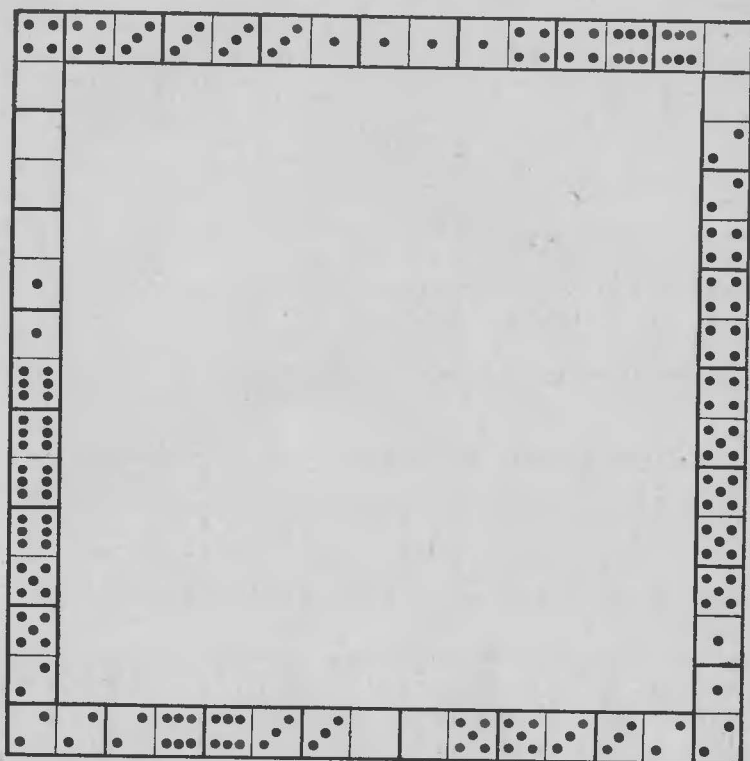


Рис. 15.

20. Приводим два решения этой задачи из числа многих возможных. В первом решении (рис. 16) имеем:

1 квадрат с суммой 3,	2 квадрата с суммой 9,
1 » » » 6,	1 квадрат » » 10,
1 » » » 8,	1 » » » 16.

Во втором решении (рис. 17):

2 квадрата с суммой 4,	2 квадрата с суммой 10,
1 квадрат » » 8,	2 » » » 12.

21. На рис. 18 дан образчик магического квадрата с суммой очков в ряду 18.

22. Вот в виде примера две прогрессии с разностью 2:

а) 0—0; 0—2; 0—4; 0—6; 4—4 (или 3—5); 5—5 (или 4—6).

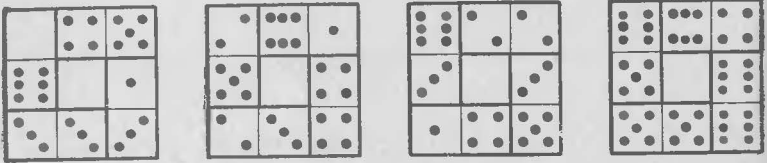
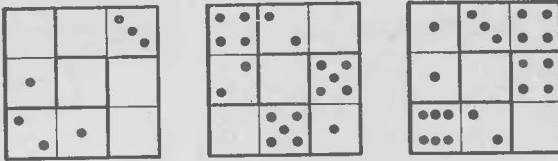


Рис. 16.

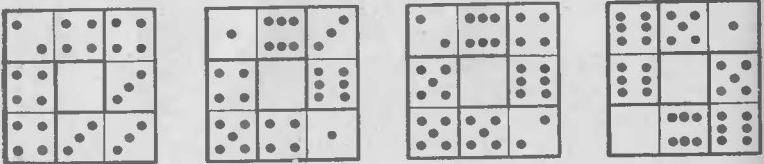
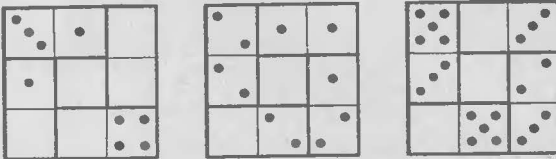


Рис. 17.

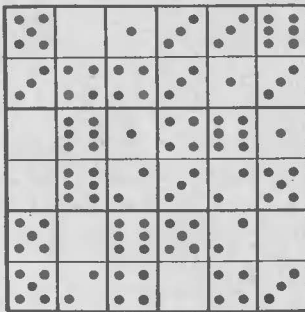


Рис. 18.

б) 0—1; 0—3 (или 1—2); 0—5 (или 2—3); 1—6 (или 3—4); 3—6 (или 4—5); 5—6.

Всех 6-косточковых прогрессий можно составить 23. Начальные косточки их следующие:

а) для прогрессий с разностью 1:

0—0	1—1	2—1	2—2	3—2
0—1	2—0	3—0	3—1	2—4
1—0	0—3	0—4	1—4	3—5
0—2	1—2	1—3	2—3	3—4

б) для прогрессий с разностью 2:

0—0; 0—2; 0—4.

23. Расположение задачи может быть получено из начального положения следующими 44 ходами:

14,	11,	12,	8,	7,	6,	10,	12,	8,	7,
4,	3,	6,	4,	7,	14,	11,	15,	13,	9,
12,	8,	4,	10,	8,	4,	14,	11,	15,	13,
9,	12,	4,	8,	5,	4,	8,	9,	13,	14,
10,	6,	2,	1.						

24. Расположение задачи достигается следующими 39 ходами:

14,	15,	10,	6,	7,	11,	15,	10,	13,	9,
5,	1,	2,	3,	4,	8,	12,	15,	10,	13,
9,	5,	1,	2,	3,	4,	8,	12,	15,	14,
13,	9,	5,	1,	2,	3,	4,	8,	12.	

25. Магический квадрат с суммой 30 получается после ряда ходов:

12,	8,	4,	8,	2,	6,	10,	9,	13,	15,
14,	12,	8,	4,	7,	10,	9,	14,	12,	8,
4,	7,	10,	9,	6,	2,	3,	10,	9,	6,
5,	1,	2,	3,	6,	5,	3,	2,	1,	13,
14,	3,	2,	1,	13,	14,	3,	12,	15,	3.

26. Даже опытный игрок скажет, вероятно, что при указанных условиях пройти ворота легче, чем крокировать: ведь ворота вдвое шире шара. Однако такое представление ошибочно: ворота, конечно, шире, нежели шар, но свободный проход для шара через ворота вдвое уже, чем мишень для крокировки.

Взгляните на рис. 19, и сказанное станет вам ясно. Центр шара не должен приближаться к проволоке ворот

меньше чем на величину радиуса, иначе шар заденет проволоку. Значит, для центра шара останется мишень на два радиуса меньше ширины ворот. Легко видеть, что в условиях нашей задачи ширина мишени при прохождении ворот с наилучшей позиции равна диаметру шара.

Посмотрим теперь, как велика ширина мишени для центра движущегося шара при крокировке. Очевидно, что если центр крокирующего приблизится к центру крокируемого меньше чем на радиус шара, удар обеспечен. Значит, ширина мишени в этом случае, как видно из рис. 20, равна двум диаметрам шара.

Итак, вопреки мнению игроков, при данных условиях в д в о е л е г ч е попасть в шар, нежели свободно пройти ворота с самой лучшей позиции.

27. После только что сказанного эта задача не требует долгих разъяснений. Легко видеть (рис. 21), что ширина цели при крокировке равна двум диаметрам шара, т. е. 20 см; ширина же мишени при нацеливании в столбик равна сумме диаметра шара и столбика, т. е. 16 см (рис. 22). Значит, крокировать легче, чем заколотся, в

$$20:16 = 1 \frac{1}{4} \text{ раза,}$$

всего на 25%. Игроки же обычно сильно преувеличивают шансы крокировки по сравнению с попаданием в столбик.

28. Иной игрок рассудит так: раз ворота вдвое шире чем шар, а столбик вдвое уже шара, то для свободного прохода ворот мишень в ч е т в е р о шире, чем для попадания в столбик. Наученный предыдущими задачами, читатель наш подобной ошибки не сделает. Он сообразит, что для прицела в столбик мишень в $1\frac{1}{2}$ раза шире, чем для прохода ворот с наилучшей позиции. Это ясно из рассмотрения рис. 23 и 24.

(Если бы ворота были не прямоугольные, а выгнутые дугой, проход для шара был бы еще уже — как легко сообразить из рассмотрения рис. 25.)

29. Из рис. 26 и 27 видно, что промежуток a , остающийся для прохода центра шара, довольно тесен при указанных в задаче условиях. Знакомые с геометрией знают, что сторона AB квадрата меньше его диагонали AC примерно в 1,4 раза.

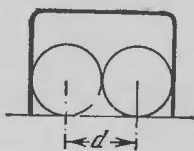


Рис. 19.

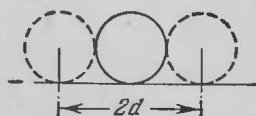


Рис. 20.

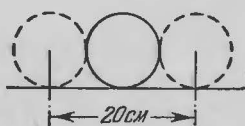


Рис. 21.

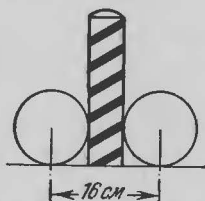


Рис. 22.

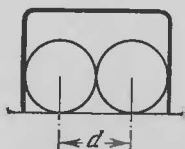


Рис. 23.

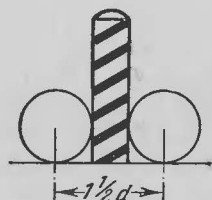


Рис. 24.

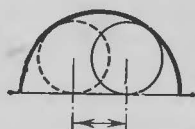


Рис. 25.

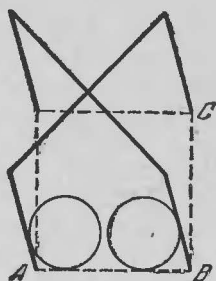


Рис. 26.

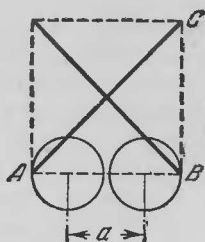


Рис. 27.

Если ширина ворот $3d$ (где d — диаметр шара), то AB равно

$$3d:1,4 \approx 2,1d.$$

Промежуток же a , который является мишенью для центра шара, проходящего мышеловку с наилучшей позиции, — еще уже. Он на целый диаметр меньше, т. е. равен:

$$2,1d - d = 1,1d.$$

Между тем мишень для центра крокирующего шара равна, как мы знаем, $2d$. Следовательно, крокировать почти вдвое легче при данных условиях, чем пройти мышеловку.

30. Мышеловка становится совершенно непроходимой в том случае, когда ширина ворот превышает диаметр шара менее чем в 1,4 раза. Это вытекает из объяснения, данного в предыдущей задаче. Если ворота дугообразные, условия прохождения еще более ухудшаются.

Еще дюжина ГОЛОВОЛОМОК

31. Веребочка *).— Еще веревочку? — спросила мать, вытаскивая руки из лоханки с бельем.— Можно подумать, что я вся веревочная. Только и слышишь: веревочку да веревочку. Ведь я вчера дала тебе порядочный клубок. На что тебе такая уйма? Куда ты ее девал?

— Куда девал бечевку? — отвечал мальчуган.— Во-первых, половину ты сама взяла обратно...

— А чем же прикажешь мне обвязывать пакеты с бельем?

— Половину того, что осталось, взял у меня Том, чтобы удить в канаве колюшек.

— Старшему брату ты всегда должен уступать.

— Я и уступил. Осталось совсем немного, да из того еще папа взял половину для починки подтяжек, которые лопнули у него от смеха, когда случилась беда с автомобилем. А после понадобилось еще сестре взять две пятых оставшегося, чтобы завязать свои волосы узлом...

— Что же ты сделал с остальной бечевкой?

— С остальной? Остальной-то было всего-навсего 30 см! Вот и устраивай телефон из такого обрывка...

Какую же длину имела бечевка первоначально?

32. Носки и перчатки. В одном ящике лежат 10 пар коричневых и 10 пар черных носков, в другом — 10 пар коричневых и 10 пар черных перчаток. По сколько носков и перчаток достаточно извлечь из каждого ящика, чтобы из них можно было выбрать одну (какую-либо) пару носков и одну пару перчаток?

*) Эта головоломка принадлежит английскому беллетристу Барри Пену.

33. Долговечность волоса. Сколько в среднем волос на голове человека? Сосчитано: около 150 000 *). Определено также, сколько их средним числом выпадает в месяц: около 3000.

Как по этим данным высчитать, сколько времени — в среднем, конечно, — держится на голове каждый волос?

34. Заработная плата. Мой заработок за последний месяц вместе со сверхурочными составляет 130 руб. Основная плата на 100 руб. больше, чем сверхурочные. Как велика моя заработная плата без сверхурочных?

35. Лыжный пробег. Лыжник рассчитал, что если он станет делать в час 10 км, то прибудет на место назначения часом позже полудня; при скорости же 15 км в час он прибыл бы часом раньше полудня.

С какой же скоростью должен он бежать, чтобы прибыть на место ровно в полдень?

36. Двое рабочих. Двое рабочих, старик и молодой, проживают в одной квартире и работают на одном заводе. Молодой доходит от дома до завода в 20 мин., старый — в 30 мин. Через сколько минут молодой догонит старого, если последний выйдет из дому 5 минутами раньше его?

37. Переписка доклада. Переписка доклада поручена двум машинисткам. Более опытная из них могла бы выполнить всю работу в 2 часа, менее опытная — в 3 часа.

Во сколько времени перепишут они этот доклад, если разделят между собою работу так, чтобы выполнить ее в кратчайший срок?

Задачи такого рода обычно решают по образцу знаменитой задачи о бассейнах. А именно: в нашей задаче находят, какую долю всей работы выполняет в час каждая машинистка, складывают обе дроби и делят единицу на эту сумму. Не можете ли вы придумать новый способ решения подобных задач, отличный от шаблонного?

38. Две зубчатки. Шестеренка с 8 зубцами сцеплена с колесом, имеющим 24 зубца (рис. 28). При вращении большего колеса шестеренка обходит кругом него.

*) Многих удивляет, как могли это узнать: неужели пересчитали один за другим все волосы на голове? Нет, этого не делали: сосчитали лишь, сколько волос на 1 кв. см поверхности головы. Зная это и зная поверхность кожи, покрытой волосами, легко уже определить общее число волос на голове. Короче сказать, число волос сосчитано анатомами таким же приемом, каким пользуются лесоводы при пересчете деревьев в лесу.

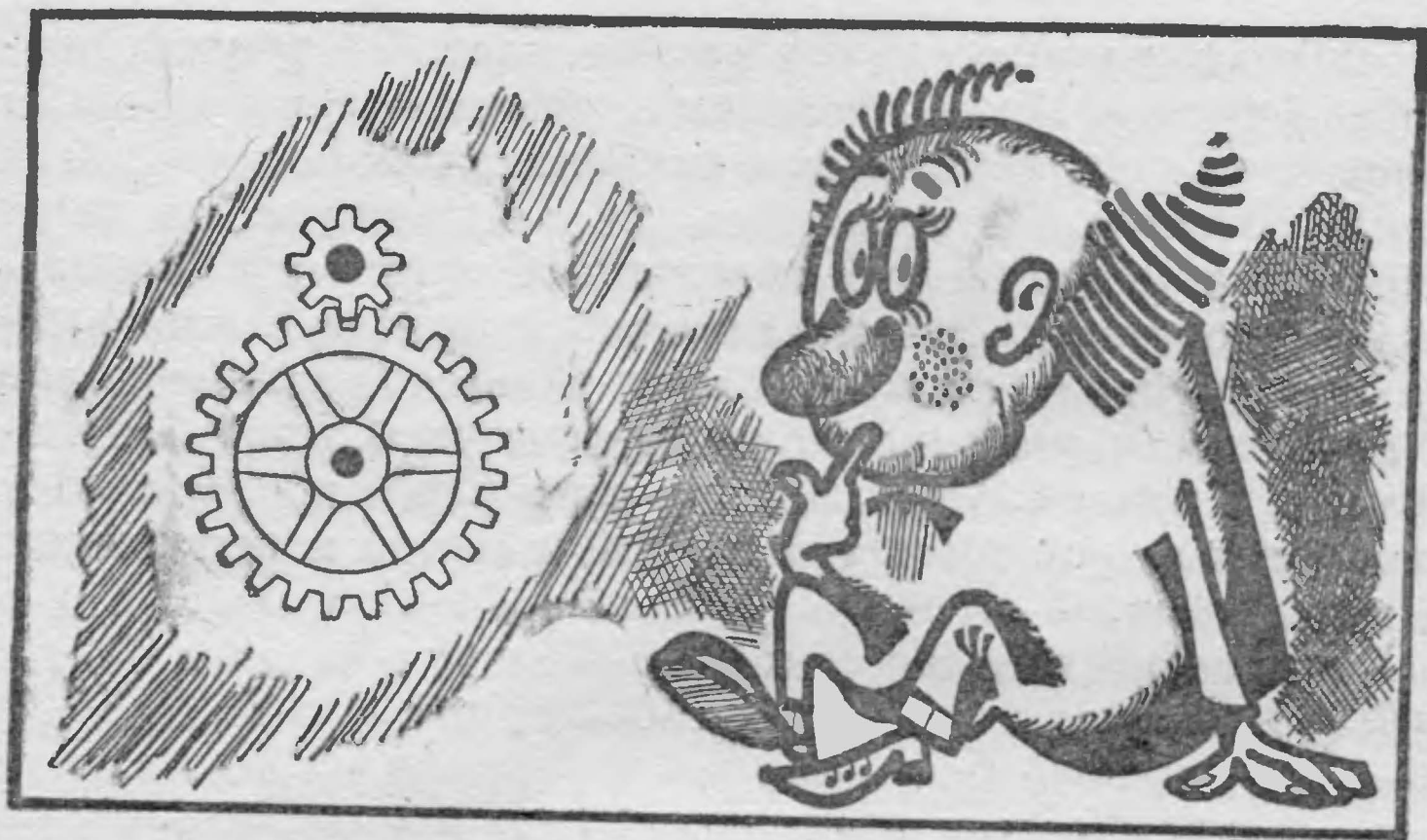


Рис. 28. Сколько раз обернется шестеренка?

Спрашивается, сколько раз обернется шестеренка вокруг своей оси за то время, пока она успеет сделать один полный оборот вокруг большей зубчатки?

39. Сколько лет? У любителя головоломок спросили, сколько ему лет. Ответ был замысловатый:

— Возьмите трижды мои годы через три года, да отнимите трижды мои годы три года назад, — у вас как раз и получатся мои годы.

Сколько же ему теперь лет?

40. Семья Ивановых. Сколько лет Иванову?

— Давайте, сообразим. Восемнадцать лет назад он был ровно в т р о е старше своего сына. Я хорошо это помню, потому что в тот год происходила перепись населения.

— Позвольте, насколько мне известно, он теперь как раз в д в о е старше своего сына. Это другой сын?

— Нет, тот же: у него только один сын. И потому нетрудно установить, сколько сейчас лет Иванову и его сыну.

Сколько, читатель?

41. Приготовление раствора. В одной мензурке имеется немного соляной кислоты, в другой — такое же количество воды. Для приготовления раствора сначала вылили из первой мензурки во вторую 20 г кислоты. Затем две трети раствора, получившегося во второй мензурке,

перелили в первую. После этого в первой мензурке оказалось вчетверо больше жидкости, чем во второй. Сколько кислоты и воды было взято первоначально?

42. Покупки. Отправляясь за покупками, я имел в кошельке около 15 руб. отдельными рублями и 20-копеечными монетами. Возвратившись, я принес столько отдельных рублей, сколько было у меня первоначально 20-копеечных монет, и столько 20-копеечных монет, сколько имел я раньше отдельных рублей. Всего же уцелела у меня в кошельке треть той суммы, с какой я отправился за покупками.

Сколько стоили покупки?

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК 31—42

31. После того как мать взяла половину, осталась $\frac{1}{2}$; после заимствования старшего брата осталась $\frac{1}{4}$; после отца $\frac{1}{8}$, после сестры $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$. Если 30 см составляют $\frac{3}{40}$ первоначальной длины, то вся длина равна $30 : \frac{3}{40} = 400$ см, или 4 м.

32. Достаточно трех носков, так как два из них всегда будут одинакового цвета. Не так просто обстоит дело с перчатками, которые отличаются друг от друга не только цветом, но еще и тем, что половина перчаток правые, а половина — левые. Здесь достаточно будет 21 перчатка. Если же доставать меньшее количество, например 20, то может случиться, что все 20 будут на одну и ту же руку (10 коричневых левых и 10 черных левых).

33. Позже всего выпадет, конечно, тот волос, который сегодня моложе всех, т. е. возраст которого — 1 день.

Посмотрим же, через сколько времени дойдет до него очередь выпасть. В первый месяц из тех 150 000 волос, которые сегодня имеются на голове, выпадет 3 тысячи, в первые два месяца — 6 тысяч, в течение первого года — 12 раз по 3 тысячи, т. е. 36 тысяч. Пройдет, следовательно, четыре года с небольшим, прежде чем наступит черед выпасть последнему волосу. Так определилась у нас средняя долговечность человеческого волоса: 4 с небольшим года.

34. Многие, не подумав, отвечают: 100 руб. Это неверно: ведь тогда основная заработная плата будет больше сверхурочных только на 70 руб., а не на 100.

Задачу нужно решать так. Мы знаем, что если к сверхурочным прибавить 100 руб., то получим основную заработную плату. Поэтому если к 130 руб. прибавим 100 руб., то у нас должны составиться две основные заработные платы. Но $130 + 100 = 230$. Значит, двойная зарплата составляет 230 руб. Отсюда одна основная плата без сверхурочных равна 115 руб., сверхурочные же составят остальное от 130 руб., т. е. 15 руб.

Проверим: заработная плата, 115 руб., больше сверхурочных, т. е. 15 руб., на 100 руб., — как и требует условие задачи.

35. Эта задача любопытна в двух отношениях: во-первых, она легко может внушить мысль, что искомая скорость есть средняя между 10 км и 15 км в час, т. е. равна $12\frac{1}{2}$ км в час. Нетрудно убедиться, что такая догадка неправильна. Действительно, если длина пробега a километров, то при 15-километровой скорости лыжник будет в пути $\frac{a}{15}$ часов, при 10-километровой $\frac{a}{10}$, при $12\frac{1}{2}$ -километровой $\frac{a}{12\frac{1}{2}}$ или $\frac{2a}{25}$. Но тогда должно существовать равенство

$$\frac{2a}{25} - \frac{a}{15} = \frac{a}{10} - \frac{2a}{25},$$

потому что каждая из этих разностей равна одному часу. Сократив на a , имеем

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{2}{25}$$

или иначе

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10};$$

равенство получилось неверное:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{4}{24}, \quad \text{а не} \quad \frac{4}{25}.$$

Вторая особенность задачи та, что она может быть решена не только без помощи уравнений, но даже просто устным расчетом.

Рассуждаем так: если бы при 15-километровой скорости лыжник находился в пути на два часа дольше (т. е. столько же, сколько при 10-километровой), то он прошел бы путь на 30 км больший, чем прошел в действительности.

В один час, мы знаем, он проходит на 5 км больше; значит, он находился бы в пути $30 : 5 = 6$ час. Отсюда определяется продолжительность пробега при 15-километровой скорости: $6 - 2 = 4$ часа. Вместе с тем становится известным и проходимое расстояние: $15 \times 4 = 60$ км.

Теперь легко уже найти, с какой скоростью должен лыжник идти, чтобы прибыть на место ровно в полдень, — иначе говоря, чтобы употребить на пробег 5 час:

$$60 : 5 = 12 \text{ км в час.}$$

Легко убедиться испытанием, что этот ответ правилен.

36. Задачу можно решить, не обращаясь к уравнению, и притом различными способами.

Вот первый прием. Молодой рабочий проходит в 5 мин. $\frac{1}{4}$ пути, старый — $\frac{1}{6}$ пути, т. е. меньше, чем молодой, на

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Так как старый опередил молодого на $\frac{1}{6}$ пути, то молодой достигнет его через

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2$$

пятиминутных промежутка, иначе говоря, через 10 мин.

Другой прием проще. На прохождении всего пути старый рабочий тратит на 10 мин. больше молодого. Выйди старик на 10 мин. раньше молодого, оба пришли бы на завод в одно время. Если старик вышел только на 5 мин. раньше, то молодой должен нагнать его как раз посередине пути, т. е. спустя 10 мин. (весь путь молодой рабочий проходит в 20 мин.).

Возможны еще и другие арифметические решения.

37. Нешаблонный путь решения задачи таков. Прежде всего поставим вопрос: как должны машинистки поделить между собою работу, чтобы закончить ее одновременно? (Очевидно, что только при таком условии, т. е. при отсутствии простоя, работа будет выполнена в кратчайший срок.) Так как более опытная машинистка пишет в $1\frac{1}{2}$ раза быстрее менее опытной, то ясно, что доля первой должна быть в $1\frac{1}{2}$ раза больше доли второй — тогда обе кончат писать одновременно. Отсюда следует, что первая должна взяться переписывать $\frac{3}{5}$ доклада, вторая — $\frac{2}{5}$.

Собственно задача уже почти решена. Остается только найти, во сколько времени первая машинистка выполнит свои $\frac{3}{5}$ работы. Всю работу она может сделать, мы знаем, в 2 часа; значит, $\frac{3}{5}$ работы будет выполнено в $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ часа. В такое же время должна сделать свою долю работы и вторая машинистка.

Итак, кратчайший срок, в какой может быть переписан доклад обеими машинистками, — 1 час 12 мин.

Можно предложить и другое решение. За 6 часов первая машинистка могла бы трижды перепечатать доклад, а вторая за этот же срок перепечатает доклад дважды. Значит вместе они за 6 часов могли бы 5 раз перепечатать доклад (т. е. смогли бы за 6 часов перепечатать в пять раз большее количество страниц, чем имеется в докладе). Но тогда для перепечатки доклада им надо в пять раз меньше времени, чем 6 часов, т. е. им нужно $6 \text{ час} : 5 = 1 \text{ час} 12 \text{ мин}$.

38. Если вы думаете, что шестеренка обернется три раза, то ошибаетесь: она сделает не три, а четыре оборота.

Чтобы наглядно уяснить себе, в чем тут дело, положите перед собою на гладком листке бумаги две одинаковые монеты, например две 20-копеечные, так, как показано на рис. 29. Придерживая рукой нижнюю монету, катите по ее ободу верхнюю. Вы заметите неожиданную вещь: когда верхняя монета обойдет нижнюю наполовину и окажется внизу, она успеет сделать уже полный оборот вокруг своей оси; это будет видно по положению цифр на монете. А обходя неподвижную монету кругом, монета наша успеет обернуться не один, а два раза.

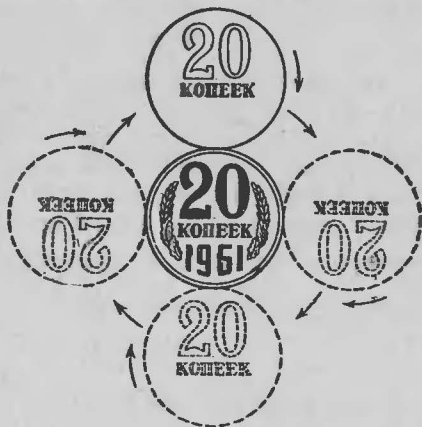


Рис. 29. Обходя неподвижную монету, другая монета успеет обернуться не один, а два раза.

Вообще когда тело, вертись, движется по кругу, оно делает одним

оборотом больше, чем можно насчитать непосредственно. По той же причине и наш земной шар, обходя вокруг солнца, успевает обернуться вокруг своей оси не 365 с четвертью, а 366 с четвертью раз, если считать обороты не по отношению к солнцу, а по отношению к звездам. Вы понимаете теперь, почему звездные сутки короче солнечных.

39. Арифметическое решение довольно запутанное, но задача решается просто, если обратиться к услугам алгебры и составить уравнение. Искомое число лет обозначим буквою x . Возраст спустя три года надо тогда обозначить через $x + 3$, а возраст три года назад через $x - 3$. Имеем уравнение

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x,$$

решив которое, получаем $x = 18$. Любителю головоломок теперь 18 лет.

Пр о в е р и м: через три года ему будет 21 год, три года назад ему было 15 лет. Разность

$$3 \cdot 21 - 3 \cdot 15 = 63 - 45 = 18,$$

т. е. равна нынешнему возрасту любителя головоломок.

40. Как и предыдущая, задача разрешается с помощью несложного уравнения. Если сыну теперь x лет, то отцу $2x$. Восемнадцать лет назад каждому из них было на 18 лет меньше: отцу $2x - 18$, сыну $x - 18$. При этом известно, что отец был тогда втрое старше сына

$$3(x - 18) = 2x - 18.$$

Решив это уравнение, получаем $x = 36$: сыну теперь 36 лет, отцу 72.

41. Пусть вначале в первой мензурке было x г соляной кислоты, во второй x г воды. После первого переливания в первой мензурке стало $(x - 20)$ г кислоты, а во второй всего кислоты и воды $(x + 20)$ г. После второго переливания во второй мензурке останется $\frac{1}{3}(x + 20)$ г жидкости, а в первой станет

$$x - 20 + \frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3}.$$

Так как известно, что в первой мензурке оказалось жидкости вчетверо меньше, чем во второй, то

$$\frac{4}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3},$$

откуда $x=100$, т. е. в каждой мензурке было по 100 г.

42. Обозначим первоначальное число отдельных рублей через x , а число 20-копеечных монет через y . Тогда, отправляясь за покупками, я имел в кошельке денег

$$(100x + 20y) \text{ коп.}$$

Возвратившись, я имел

$$(100y + 20x) \text{ коп.}$$

Последняя сумма, мы знаем, втрое меньше первой; следовательно,

$$3(100y + 20x) = 100x + 20y.$$

Упрощая это выражение, получаем

$$x = 7y.$$

Если $y = 1$, то $x = 7$. При таком допущении у меня первоначально было денег 7 р. 20 к.; это не вяжется с условием задачи («около 15 рублей»).

Испытаем $y = 2$; тогда $x = 14$. Первоначальная сумма равнялась 14 р. 40 к., что хорошо согласуется с условием задачи.

Допущение $y = 3$ дает слишком большую сумму денег: 21 р. 60 к.

Следовательно, единственный подходящий ответ — 14 р. 40 к. После покупок осталось 2 отдельных рубля и 14 монет 20-копеечных, т. е. $200 + 280 = 480$ коп.; это действительно составляет треть первоначальной суммы ($1440 : 3 = 480$).

Израсходовано же было $1440 - 480 = 960$. Значит, стоимость покупок 9 р. 60 к.

Умеете ли вы считать?

43. Умеете ли вы считать? Вопрос, пожалуй, даже обидный для человека старше трехлетнего возраста. Кто не умеет считать? Чтобы произносить подряд «один», «два», «три», — особого искусства не требуется. И все же, я уверен, вы не всегда хорошо справляетесь с таким, казалось бы, простым делом. Все зависит от того, что считать. Нетрудно пересчитать гвозди в ящике. Но пусть в нем лежат не одни только гвозди, а вперемешку гвозди с винтами; требуется установить, сколько тех и других отдельно. Как вы тогда поступите? Разберете груды на гвозди и винты отдельно, а затем пересчитаете их?

Такая задача возникает и перед хозяйкой, когда ей приходится считать белье для стирки. Она раскладывает сначала белье по сортам: сорочки в одну кучу, полотенца — в другую, наволочки — в третью и т. д. И лишь провозившись с этой довольно утомительной работой, приступает она к счету штук в каждой кучке.

Вот это и называется не уметь считать! Потому что такой способ счета неоднородных предметов довольно неудобен, хлопотлив, а зачастую даже и вовсе неосуществим. Хорошо, если вам приходится считать гвозди или белье: их можно раскидать по кучкам. Но поставьте себя в положение лесоведа, которому необходимо сосчитать, сколько на гектаре растет сосен, сколько на том же участке елей, сколько берез и сколько осин. Тут уж рассортировать деревья, сгруппировать их предварительно по породам — нельзя. Что же, вы станете считать сначала только сосны, потом только ели, потом одни березы, затем осины? Четыре раза обойдете участок?

Нет ли способа сделать это проще, одним обходом участка? Да, такой способ есть, и им издавна пользуются

работники леса. Покажу, в чем он состоит, на примере счета гвоздей и винтов.

Чтобы в один прием сосчитать, сколько в коробке гвоздей и сколько винтов, не разделяя их сначала по сортам, запаситесь карандашом и листком бумаги, разграфленным по такому образцу:

Гвоздей	Винтов

Затем начинайте счет. Берите из коробки первое, что попадет под руку. Если это гвоздь, вы делаете на листке бумаги черточку в графе гвоздей; если винт — отмечаете его черточкой в графе винтов. Берете вторую вещь и поступаете таким же образом. Берете третью вещь и т. д., пока не опорожнится весь ящик. К концу счета на бумажке окажется в графе гвоздей столько черточек, сколько было в коробке гвоздей, а в графе винтов — столько черточек, сколько было винтов. Остается только подытожить черточки на бумаге.

Счет черточек можно упростить и ускорить, если не ставить их просто одну под другой, а собирать по пяти в такие, например, фигурки, какая изображена на рис. 30.

Квадратики этого вида лучше группировать парами, т. е. после первых 10 черточек ставить 11-ю в новую строку; когда во второй строке вырастут 2 квадрата, начинают следующий квадрат в третьей строке и т. д. Черточки будут располагаться тогда примерно в таком виде, как показано на рис. 31.

Считать так расположенные черточки очень легко: вы сразу видите, что тут три полных десятка, один пяток и еще три черточки, т. е. всего $30+5+3=38$.

Можно пользоваться фигурками и иного вида; часто, например, употребляют такие значки, где каждый полный квадратик означает 10 (рис. 32).

При счете деревьев разных пород на участке леса вы должны поступить совершенно таким же образом, но на листке бумаги у вас будут уже не две графы, а четыре. Удобнее здесь иметь графы не стоячие, а лежащие. До



Рис. 30. Черточки
следует собирать
по пяти.

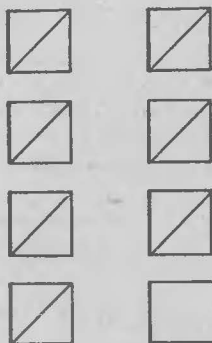


Рис. 31. Так рас-
полагают резуль-
таты счета.



Рис. 32. Каждый
полный квадратик
означает 10.

подсчета листок имеет, следовательно, такой вид, как на рис. 33.

В конце же подсчета получается на листке примерно то, что показано на рис. 34.

Подвести окончательный итог здесь очень легко:

Сосен	53	Берез	46
Елей	79	Оси	37

Составляя список белья для стирки, хозяйка может поступить таким же образом, сберегая труд и время.

Если вам понадобится сосчитать, например, какие растения и в каком числе растут на небольшом участке луга, вы уже будете знать, как справиться с этой задачей в возможно короткий срок. На листке бумаги вы заранее выпишете названия замеченных растений, отведя для каждого особую графу и оставив несколько свободных граф про запас для тех растений, которые вам могут еще попасться. Вы начнете подсчет с такой, например, бумажкой, какая указана на рис. 35.

Дальше поступают так же, как и при подсчете на участке леса.

44. Зачем считать деревья в лесу? Городским жителям это представляется даже и вовсе невозможным делом. В романе Л. Н. Толстого «Анна Каренина» знаток сельского хозяйства, Левин, спрашивает своего несве-

<i>Сосен</i>	
<i>Елей</i>	
<i>Берез</i>	
<i>Осин</i>	

Рис. 33. Бланк для подсчета деревьев в лесу.

<i>Сосен</i>	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☐
<i>Елей</i>	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☐
<i>Берез</i>	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑
<i>Осин</i>	☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☐

Рис. 34. Вид бланка после подсчета.

<i>Одуванчиков</i>	
<i>Лютиков</i>	
<i>Подорожников</i>	
<i>Звездчаток</i>	
<i>Пастушьей сумки</i>	

Рис. 35. Как начинать счет растений на участке луга.

дущего в этом деле родственника, собирающегося продать лес:

— «Счел ли ты деревья?»

— Как счесть деревья?» — с удивлением отвечает тот. — «Сочешь пески, лучи планет хотя и мог бы ум высокий...»

— «Ну да, а ум высокий Рябинина (кушца) может. И ни один мужик не купит, не считая».

Деревья в лесу считают для того, чтобы определить, сколько в нем кубических метров древесины. Пересчитывают деревья не всего леса, а определенного участка, в четверть или половину гектара, выбранного так, чтобы густота, состав, толщина и высота его деревьев были средние в данном лесу. Для удачного выбора такой «пробной площади» нужно, конечно, иметь опытный глаз. При подсчете недостаточно определять число деревьев каждой породы; необходимо еще знать, сколько имеется стволов каждой толщины: сколько 25-сантиметровых, сколько 30-сантиметровых, 35-сантиметровых и т. д. В счетной ведомости окажется поэтому не четыре только графы, как в нашем упрощенном примере, а гораздо больше. Вы можете представить себе теперь, какое множество раз пришлось бы обойти лес, если бы считать деревья обычным путем, а не так, как здесь объяснено.

Как видите, счет является простым и легким делом только тогда, когда считают предметы **о д н о р о д н ы е**. Если же надо приводить в известность число разнородных предметов, то приходится пользоваться особыми, объясненными сейчас приемами, о существовании которых многие и не подозревают.

Числовые ГОЛОВОЛОМКИ

45. За пять рублей — сто. Один эстрадный счетчик на своих сеансах делал публике следующее заманчивое предложение:

— Объявляю при свидетелях, что плачу 100 рублей каждому, кто даст мне 5 рублей двадцатью монетами — по 50, 20 и 5 коп. Сто рублей за пять! Кто желает?

Воцарялось молчание.

Публика погрузалась в размышление. Карандаши бегали по листкам записных книжек, — но ответного предложения не поступало.

— Публика, я вижу, находит 5 рублей слишком высокой платой за 100 рублей. Извольте, я готов скинуть два рубля и назначаю пониженную цену: 3 рубля двадцатью монетами названного достоинства. Плачу 100 рублей за 3 рубля! Желающие, составляйте очередь!

Но очередь не выстраивалась. Публика явно медлила воспользоваться редким случаем.

— Неужели и 3 рубля дорого? Хорошо, понижаю сумму еще на рубль; уплатите указанными двадцатью монетами всего только 2 рубля, и я немедленно вручу предьявителю сто рублей.

Так как никто не выражал готовности совершить обмен, счетчик продолжал:

— Может быть, у вас нет при себе мелких денег? Не стесняйтесь этим, я поверю в долг. Дайте мне только на бумажке реестрик, сколько монет каждого достоинства вы обязуетесь доставить!

46. Тысяча. Можете ли вы число 1000 выразить семью одинаковыми цифрами?

При этом, кроме цифр, разрешается пользоваться также знаками действий.

47. Двадцать четыре. Очень легко число 24 выразить тремя восьмерками: $8+8+8$. Но можете ли вы сделать то же, пользуясь не восьмерками, а другими тремя одинаковыми цифрами? Задача имеет не одно решение.

48. Тридцать. Число тридцать легко выразить тремя пятерками: $5 \times 5 + 5$. Труднее сделать это тремя другими одинаковыми цифрами.

Попробуйте. Может быть, вам удастся отыскать несколько решений?

49. Недостающие цифры. В этом примере умножения больше половины цифр заменено звездочками.

$$\begin{array}{r} *1* \\ \times 3*2 \\ \hline *3* \\ + 3*2* \\ + *2*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

Можете ли вы восстановить недостающие цифры?

50. Какие числа? Вот еще одна задача такого же рода.

Требуется установить, какие числа перемножаются в примере:

$$\begin{array}{r} **5 \\ \times 1** \\ \hline 2**5 \\ 13*0 \\ + *** \\ \hline 4*77* \end{array}$$

51. Что делили? Восстановите недостающие цифры в таком примере деления:

$$\begin{array}{r} *2*5* \overline{) 325} \\ \underline{***} \\ *0** \\ \underline{*9**} \\ *5* \\ \underline{*5*} \\ \hline \end{array}$$

52. Деление на 11. Напишите какое-нибудь девятизначное число, в котором нет повторяющихся цифр (все цифры разные) и которое делится без остатка на 11.

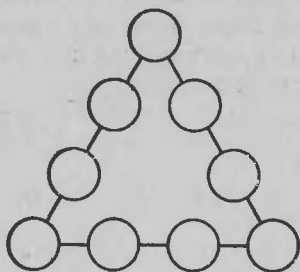


Рис. 36. Расставьте в кружках 9 цифр.

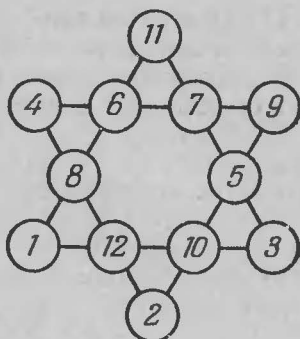


Рис. 37. Шестиконечная числовая звезда.

Напишите наибольшее из таких чисел.

Напишите наименьшее из таких чисел.

53. Странные случаи умножения. Рассмотрите такой случай умножения двух чисел:

$$48 \times 159 = 7632.$$

Он замечателен тем, что в нем участвуют по одному разу все девять значащих цифр.

Можете ли вы подобрать еще несколько таких примеров? Сколько их, если они вообще существуют?

54. Числовой треугольник. В кружках этого треугольника (рис. 36) расставьте все девять значащих цифр так, чтобы сумма их на каждой стороне составляла 20.

55. Еще числовой треугольник. Все значащие цифры разместить в кружках того же треугольника (рис. 36) так, чтобы сумма их на каждой стороне равнялась 17.

56. Магическая звезда. Шестиконечная числовая звезда, изображенная на рис. 37 обладает «магическим» свойством: все шесть рядов чисел имеют одну и ту же сумму

$$4 + 6 + 7 + 9 = 26$$

$$11 + 6 + 8 + 1 = 26$$

$$4 + 8 + 12 + 2 = 26$$

$$11 + 7 + 5 + 3 = 26$$

$$9 + 5 + 10 + 2 = 26$$

$$1 + 12 + 10 + 3 = 26$$

Но сумма чисел, расположенных на вершинах звезды, другая:

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$$

Не удастся ли вам усовершенствовать эту звезду, расставив числа в кружках так, чтобы не только прямые ряды давали одинаковые суммы (26), но чтобы ту же сумму (26) составляли числа на вершинах звезды?

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК 45—56

45. Все три задачи неразрешимы; счетчик мог безбоязненно обещать за их решения любую премию. Чтобы в этом удостовериться, обратимся к языку алгебры и рассмотрим задачи одну за другой.

Уплата 5 рублей. Предположим, что уплата возможна и что для этого понадобилось x 50-копеечных, y 20-копеечных и z 5-копеечных монет. Имеем уравнение:

$$50x + 20y + 5z = 500.$$

Сократив на 5, получаем:

$$10x + 4y + z = 100.$$

Кроме того, так как общее число монет, по условию, равно 20, то x , y и z связаны еще и другим уравнением:

$$x + y + z = 20.$$

Вычтя это уравнение из первого, получаем:

$$9x + 3y = 80.$$

Разделив на 3, приводим уравнение к виду:

$$3x + y = 26\frac{2}{3}.$$

Но $3x$, тройное число 50-копеечных монет, есть, конечно, число целое. Число 20-копеечных, y , также целое. Сумма же двух целых чисел не может оказаться числом дробным ($26\frac{2}{3}$). Наше предположение о разрешимости этой задачи приводит, как видите, к нелепости. Значит, задача неразрешима.

Подобным же образом читатель убедится в неразрешимости двух других, «удешевленных» задач: с уплатой в 3 и 2 руб. Первая приводит к уравнению

$$3x + y = 13\frac{1}{3},$$

вторая — к уравнению

$$3x + y = 6\frac{2}{3}.$$

То и другое в целых числах неразрешимо.

Как видите, счетчик нисколько не рисковал, предлагая крупные суммы за решение этих задач: выдать премии никогда не придется.

Другое дело было бы, если бы требовалось уплатить двадцатью монетами названного достоинства не 5, не 3 и не 2 руб., а например 4 руб.: тогда задача легко решалась бы и даже семью различными способами *).

46. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$

Имеются и другие решения.

47. Вот два решения:

$$22 + 2 = 24; \quad 3^3 - 3 = 24.$$

48. Приводим три решения:

$$6 \times 6 - 6 = 30; \quad 3^3 + 3 = 30; \quad 33 - 3 = 30.$$

49. Недостающие цифры восстанавливаются постепенно, если применить следующий ход рассуждений.

Для удобства пронумеруем строки:

$$\begin{array}{r} *1* \dots\dots\dots .I \\ \times 3*2 \dots\dots\dots .II \\ \hline *3* \dots\dots\dots .III \\ 3*2* \dots\dots\dots .IV \\ + *2*5 \dots\dots\dots .V \\ \hline 1*8*30 \dots\dots\dots .VI \end{array}$$

Легко сообразить, что последняя звездочка в III строке цифр есть 0: это ясно из того, что 0 стоит в конце VI строки.

Теперь определяется значение последней звездочки I строки: это — цифра, которая от умножения на 2 дает число, оканчивающееся нулем, а от умножения на 3 — число, оканчивающееся 5 (V ряд). Цифра такая только одна — 5.

Ясно далее, что в конце IV строки стоит цифра 0. (Сравните цифры, стоящие на втором с конца месте в III и VI строках!)

*) Вот одно из возможных решений: 6 монет 50-копеечных, 2 монеты 20-копеечные и 12 монет 5-копеечных.

Нетрудно догадаться, что скрывается под звездочкой II строки: 8, потому что только 8 при умножении на число 15 дает результат, оканчивающийся 20 (IV строка).

Наконец, становится ясным значение первой звездочки строки I: это цифра 4, потому что только 4, умноженное на 8, дает результат, начинающийся на 3 (строка IV).

Узнать остальные неизвестные цифры теперь не составляет никакой трудности: достаточно перемножить числа первых двух строк, уже вполне определившиеся.

В конечном итоге получаем такой пример умножения:

$$\begin{array}{r} \times 415 \\ \times 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ + 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

50. Подобным сейчас примененному ходом рассуждений раскрываем значение звездочек и в этом случае.

Получаем:

$$\begin{array}{r} \times 325 \\ \times 147 \\ \hline 2275 \\ + 1300 \\ + 325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

51. Вот искомый случай деления:

$$\begin{array}{r} 52650 \overline{) 325} \\ - 325 \quad \overline{) 162} \\ \hline 2015 \\ - 1950 \\ \hline 650 \\ - 650 \\ \hline \end{array}$$

52. Чтобы решить эту задачу, надо знать признак делимости на 11. Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11 или равна нулю. Испытаем, для примера, число 23 658 904.

Сумма цифр, стоящих на четных местах:

$$3+5+9+4=21,$$

сумма цифр, стоящих на нечетных местах:

$$2+6+8+0=16.$$

Разность их (надо вычитать из большего меньшее) равна:

$$21-16=5.$$

Эта разность (5) не делится на 11; значит и взятое число не делится без остатка на 11.

Испытаем другое число: 7 344 535;

$$3+4+3=10 \quad 7+4+5+5=21 \quad 21-10=11.$$

Так как 11 делится на 11, то и испытываемое число кратно 11.

Теперь легко сообразить, в каком порядке надо писать девять цифр, чтобы получилось число, кратное 11 и удовлетворяющее требованиям задачи.

Вот пример: 352 049 786.

Испытаем: $3+2+4+7+6=22$, $5+0+9+8=22$.

Разность $22-22=0$; значит, написанное нами число кратно 11.

Наибольшее из всех таких чисел есть: 987 652 413.

Наименьшее: 102 347 586.

53. Терпеливый читатель может разыскать девять случаев такого умножения. Вот они:

$$12 \times 483 = 5796,$$

$$48 \times 159 = 7632,$$

$$42 \times 138 = 5796,$$

$$28 \times 157 = 4396,$$

$$18 \times 297 = 5346,$$

$$4 \times 1738 = 6952,$$

$$27 \times 198 = 5346,$$

$$4 \times 1963 = 7852.$$

$$39 \times 186 = 7254,$$

54—55. Решения показаны на прилагаемых рисунках 38 и 39. Средние цифры каждого ряда можно переставить и получить таким образом еще ряд решений.

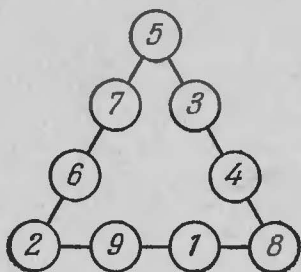


Рис. 38.

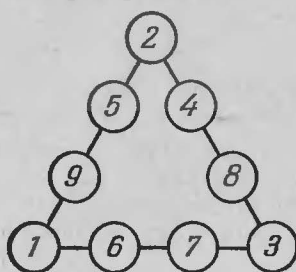


Рис. 39.

56. Чтобы облегчить себе отыскание требуемого расположения чисел, будем руководствоваться следующими соображениями.

Сумма чисел на концах искомой звезды равна 26, сумма же всех чисел звезды 78. Значит, сумма чисел внутреннего шестиугольника равна $78 - 26 = 52$.

Рассмотрим затем один из больших треугольников. Сумма чисел каждой его стороны равна 26; сложим числа всех трех сторон — получим $26 \times 3 = 78$, причем каждое из чисел, стоящих на углах, входит дважды. А так как сумма чисел трех внутренних пар (т. е. сумма чисел внутреннего шестиугольника) должна, мы знаем, равняться 52, то удвоенная сумма чисел на вершинах каждого треугольника равна $78 - 52 = 26$; однократная же сумма = 13.

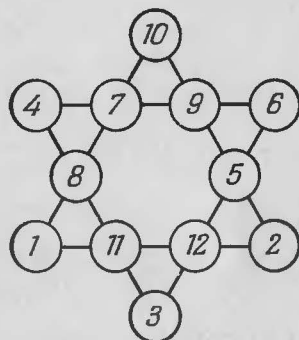


Рис. 40.

Поле поисков теперь заметно сузилось. Мы знаем, например, что ни 12, ни 11 не могут занимать вершины звезды (почему?). Значит, испытания можно начинать с 10, причем сразу определяется, какие два числа должны занимать остальные вершины треугольника: 1 и 2.

Продвигаясь таким путем далее, мы, наконец, разыщем требуемое расположение. Оно показано на рис. 40.

Зашифрованная переписка

57. Решетка. Революционер-подпольщик вынужден вести свои записи и переписку с товарищами таким образом, чтобы никто из посторонних не мог понять написанного. Для этого пользуются особым способом письма, называемым «тайнописью» (или «криптографией»). Придуманы разные системы тайнописи; к их услугам прибегают не одни подпольщики, но также дипломаты и военные для сохранения государственных тайн. Расскажем далее об одном из способов ведения секретной переписки, именно о так называемом способе «решетки». Он принадлежит к числу сравнительно простых и тесно связан с арифметикой.

Желающие вести тайную переписку по этому способу запасаются каждый «решеткой», т. е. бумажным квадратиком с прорезанными в нем окошечками.

Образчик решетки вы видите на рис. 41. Окошечки размещены не произвольно, а в определенном порядке, который станет ясен вам из дальнейшего.

Пусть требуется послать товарищу такую записку: *Собрание делегатов района отмените. Полиция кем-то предупреждена. Антон.*

Наложив решетку на листок бумаги, подпольщик пишет сообщение букву за буквой в окошечках решетки.

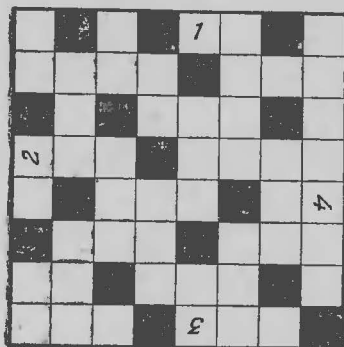


Рис. 41. Решетка для тайной переписки. (Сделайте такую из бумаги и прочтите секретную запись рис. 45.)

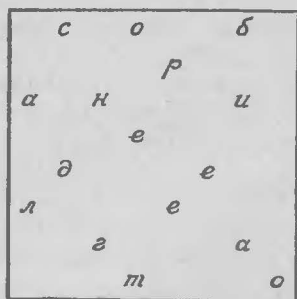


Рис. 42. Сняв решетку, увидим запись.



Рис. 43. Пишем затем следующие 16 букв.

Так как окошек 16, то сначала помещается только часть записки:

Собрание делегатов...

Сняв решетку, мы увидим запись, представленную на рис. 42.

Здесь, разумеется, ничего засекреченного пока нет: каждый легко поймет, в чем дело. Но это только начало; записка в таком виде не останется. Подпольщик поворачивает решетку «по часовой стрелке» на четверть оборота, т. е. располагает ее на том же листке так, что цифра 2, бывшая раньше сбоку, теперь оказывается сверху. При новом положении решетки все ранее написанные буквы заслонены, а в окошечках появляется чистая бумага. В них пишут следующие 16 букв секретного сообщения. Если теперь убрать решетку, получим запись, показанную на рис. 43.

Такую запись не поймет не только посторонний человек, но и сам писавший, если позабудет текст своего сообщения.

Но записана пока только половина сообщения, именно: *Собрание делегатов района отмените. П...*

Чтобы писать дальше, надо вновь повернуть решетку на четверть оборота по часовой стрелке. Она закроет все написанное и откроет новые 16 свободных клеток. В них найдут себе место еще несколько слов, и записка приобретет вид рис. 44.

Наконец, делается последний поворот решетки, цифрой 4 вверх, и в открывшиеся 16 чистых квадратиков

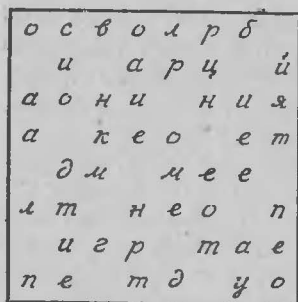


Рис. 44. Надо вновь повернуть решетку.

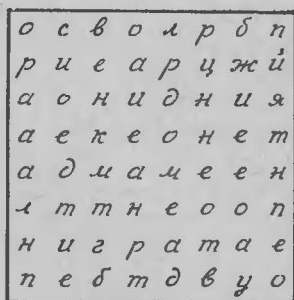


Рис. 45. Секретная записка готова.

вписывают окончание записки. Так как остаются три неиспользованные клетки, их заполняют буквами *а, б, в*, — просто для того, чтобы в записке не оказалось пробелов.

Письмо имеет вид, представленный на рис. 45.

Попробуйте в нем что-нибудь разобрать! Пусть записка попадет в руки полиции, пусть полицейские сколько угодно подозревают, что в ней скрыто важное сообщение, — догадаться о содержании записки в состоянии только адресат, имеющий в руках точно такую же решетку, как и та, которой пользовался отправитель.

Как же прочтет адресат это секретное письмо? Он наложит свою решетку на текст, обратив ее цифрой 1 вверх, и выпишет те буквы, которые появятся в окошечках. Это будут первые 16 букв сообщения. Затем повернет решетку — и перед ним предстанут следующие 16 букв. После четвертого поворота вся секретная записка будет прочтена.

Вместо квадратной решетки можно пользоваться и прямоугольной, в форме почтовой карточки, с широкими окошечками (рис. 46). В окошечки такой решетки вписывают не отдельные буквы, а части слов, даже целые слова, если они помещаются.

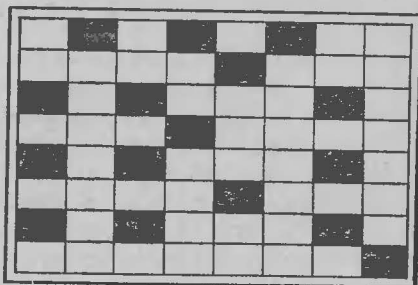


Рис. 46. Решетка в форме почтовой карточки.

1	2	3	4	13	9	5	7
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Рис. 47. Свыше 4 миллиардов секретных решеток в одном квадрате.

Не думайте, что запись окажется тогда более разборчивой. Нисколько! Хотя отдельные слоги и слова видны, но перемешаны они в таком нелепом беспорядке, что секрет достаточно надежно сохранен. Продолговатую решетку кладут сначала одним краем вверх, потом противоположным; после этого переворачивают ее на левую сторону и снова пользуются в двух положениях. В каждом новом положении решетка закрывает все написанное раньше.

Если бы возможна была только одна решетка, то способ переписки с ее помощью никуда не годился бы в смысле секретности. В руках полиции, конечно, имелась бы эта единственная решетка, и тайна немедленно раскрывалась бы. Но в том-то и дело, что число различных решеток чрезвычайно велико.

Все решетки, какие можно изготовить для 64-клеточного квадрата, отмечены на рис. 47. Вы можете выбрать для окошечек любые 16 клеток, заботясь лишь о том, чтобы в числе взятых клеток не было двух с одинаковыми номерами. Для той решетки, которой мы пользовались сейчас, взяты были следующие номера клеток:

2, 4, 5
14
9, 11, 7
16
8, 15
3, 12
10, 6
13, 1

Как видите, ни один номер не повторяется.

Понять систему расположения цифр в квадрате (рис. 47) нетрудно. Он делится поперечными линиями на 4 меньших квадрата, которые обозначим для удобства римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 48). В I квадрате клетки пронумерованы в обычном порядке. Квадрат II — тот же квадрат I, только повернутый на четверть оборота вправо.

Повернув его еще на четверть оборота, получаем квадрат III; при следующей четверти оборота получается квадрат IV.

Подсчитаем теперь математически, сколько может существовать разных решеток. Клетку № 1 можно взять (в качестве окошка) в 4 местах. В каждом случае можно присоединить клетку № 2, взяв ее также в 4 местах. Следовательно, два окошка можно наметить 4×4 , т. е. 16 способами. Три окошка — $4 \times 4 \times 4 = 64$ способами. Рассуждая таким образом, устанавливаем, что 16 окошек можно набрать 4^{16} способами (произведение 16 четверок). Число это превышает 4 миллиарда. Если даже считать наш расчет преувеличенным в несколько раз (так как неудобно пользоваться решетками с примыкающими друг к другу окошечками, и эти случаи надо исключить), то все же остается несколько сотен миллионов решеток, — целый океан! Попробуйте отыскать в нем именно ту, которая требуется.

I	II
III	IV

Рис. 48. Схема к рис. 47.

Если, скажем, группа дешифровальщиков тратит на приготовление решетки и проверку, дает ли она что-либо осмысленное, лишь минуту, то для расшифровки записки могут потребоваться сотни миллионов минут — целые тысячелетия! Впрочем, все это верно лишь в том случае, если расшифровка ведется так сказать «голыми руками». В книге «Занимательная алгебра» того же автора вы можете прочитать о быстродействующих вычислительных машинах. Такие машины могут по определенной программе производить сотни тысяч и даже миллионы вычислений в секунду. Могут они и не только считать. Например, они могут перебирать всевозможные решетки и проверять, дает ли каждая такая решетка осмысленный текст, — нужно лишь составить подходящую программу для такой машины. И если испытание одной решетки на машине требует, скажем, одной тысячной доли секунды, то для перебора сотен миллионов решеток требуются сотни тысяч секунд, т. е. несколько суток. Как видите, в современных условиях сохранение секретности переписки становится затруднительным.

58. Как запомнить решетку? Но предположим, что опасаться рассекречивания с помощью машин не придется. Скажем, содержание записки должно остаться

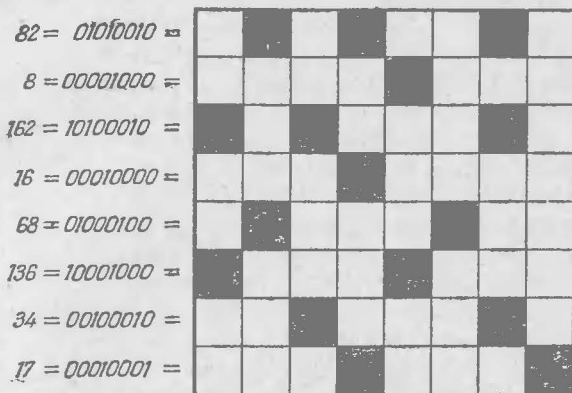


Рис. 49. Арифметизация секретной решетки.

тайным лишь 2—3 дня, и можно надеяться, что это время недостаточно для перехвата записки, отправки ее в вычислительный центр и дешифровки. Подпольщики решили воспользоваться решеткой. Само собою разумеется, оба участника переписки должны быть начеку, чтобы их решетка не попала в посторонние руки. Лучше всего вовсе не хранить решеток, а вырезать их при получении письма и уничтожать тотчас по прочтении. Но как запомнить расположение окошек? Здесь снова приходит нам на помощь математика. Будем обозначать окошки цифрой 1, прочие же клетки решетки цифрой 0. Тогда первый ряд клеток решетки получит такое обозначение (рис. 49):

01010010

или, отбросив передний нуль,—

1010010.

Второй ряд, если отбросить в нем передние нули, обозначится так:

1000.

Прочие ряды получают следующие обозначения:

10100010	10001000
10000	100010
1000100	10001.

Чтобы упростить запись этих чисел, будем считать, что они написаны не по десятичной системе, которою обычно пользуются, а по «двоичной». Это значит, что единица больше соседней, стоящей справа, не в 10 раз, а только в 2 раза. Единица в конце числа означает, как обычно, простую единицу; единица на предпоследнем месте означает двойку; на третьем с конца — четверку; на четвертом — восьмерку; на пятом — 16 и т.д. При таком понимании число 1010010, обозначающее расположение окошек первого ряда, включает простых единиц

$$64 + 16 + 2 = 82,$$

потому что нули указывают на отсутствие единиц данного разряда.

Число 1000 (второй ряд) заменится в десятичной системе числом 8.

Остальные числа нужно будет заменить следующими:

$$128 + 32 + 2 = 162$$

$$16$$

$$64 + 4 = 68$$

$$128 + 8 = 136$$

$$32 + 2 = 34$$

$$16 + 1 = 17$$

Запомнить же числа: 82, 8, 162, 16, 68, 136, 34, 17 не так уж трудно. А зная их, всегда можно получить ту первоначальную группу чисел, из которой они получены и которые прямо указывают расположение окошек в решетке.

Как это делается, покажем на примере первого числа — 82. Разделим его на два, чтобы узнать, сколько в нем двоек; получим 41; остатка нет, — значит, на последнем месте, в разряде простых единиц, должно быть 0. Полученное число двоек 41, делим на 2, чтобы узнать, сколько в нашем числе четверок:

$$41 : 2 = 20, \text{ остаток } 1.$$

Это значит, что в разряде двоек, т. е. на предпоследнем месте, имеется цифра 1.

Далее, делим 20 на 2, чтобы узнать, сколько в нашем числе восьмерок:

$$20 : 2 = 10.$$

Остатка нет, — значит, на месте четверок стоит 0.

Делим 10 на 2; получаем 5 без остатка: на месте восьмерок — 0.

От деления 5 на 2 получаем 2 и в остатке 1: в этом разряде стоит цифра 1. Наконец, делим 2 на 2 и узнаем, что в следующем разряде 0, а в последнем разряде 1 (этот разряд соответствует шестидесяти четырем).

Итак, все цифры искомого числа определились:

1010010.

Так как здесь всего 7 цифр, а в каждом ряду решетки 8 клеток, то ясно, что один нуль впереди был опущен, и расположение окошек в первом ряду определяется цифрами:

01010010,

т. е. окошки имеются на 2-м, 4-м и 7-м местах.

Так же восстанавливается расположение окошек и в прочих рядах.

Существует, как было сказано, множество разных систем тайнописи. Мы остановились на решетке потому, что она близко соприкасается с математикой и лишней раз доказывает, как разнообразны те стороны жизни, куда заглядывает эта наука.

Рассказы о числах-великанах

59. Выгодная сделка. Когда и где происходила эта история — неизвестно. Возможно, что и вовсе не происходила; даже скорее всего, что так. Но будь это или небылица, история достаточно занятна, чтобы ее послушать.

1.

Богач-миллионер возвратился из отлучки необычайно радостный: у него была в дороге счастливая встреча, сулившая большие выгоды.

«Бывают же такие удачи,— рассказывал он домашним.— Неспроста, видно, говорят, что деньга на деньгу набегает. Вот и на мою деньгу денежка бежит. И как неожиданно! Повстречался мне в пути незнакомец, из себя не видный. Мне бы и разговаривать с ним не пристало, да он сам начал, как проведаль, что у меня достаток есть. И такое к концу разговора предложил выгодное дельце, что у меня дух захватило.

— Сделаем,— говорит,— с тобой такой уговор. Я буду целый месяц приносить тебе ежедневно по сотне тысяч рублей. Не даром, разумеется, но плата пустяшная. В первый день я должен по уговору заплатить — смешно вымолвить — всего только одну копейку.

Я ушам не верил:

— Одну копейку? — переспрашиваю.

— Одну копейку,— говорит.— За вторую сотню тысяч заплатишь 2 копейки.

— Ну,— не терпится мне.— А дальше?

— А дальше: за третью сотню тысяч 4 копейки, за четвертую 8, за пятую — 16. И так целый месяц, каждый день вдвое больше против предыдущего.

— И потом что? — спрашиваю.

— Все, — говорит, — больше ничего не потребую. Только крепко держать уговор: каждое утро буду носить по сотне тысяч рублей, а ты плати, что сговорено. Раньше месяца кончать не смей.

Сотни тысяч рублей за копейки отдает! Если деньги не фальшивые, то не в полном уме человек. Однако же дело выгодное, упускать не надо.

— Ладно, — говорю. — Неси деньги. Я-то свои уплачу аккуратно. Сам, смотри, не обмани: правильные деньги приноси.

— Будь покоен, — говорит; — завтра с утра жди.

Одного только боюсь: придет ли? Как бы не спохватился, что слишком невыгодное дело затеял! Ну, до завтра недолго ждать».

2.

Прошел день. Рано утром постучал богачу в окошко тот самый незнакомец, которого он встретил в дороге.

— Деньги готовь, — говорит. — Я свои принес.

И, действительно, войдя в комнату, странный человек стал выкладывать деньги — настоящие, не фальшивые. Отсчитал ровно сто тысяч и говорит:

— Вот мое по уговору. Твой черед платить.

Богач положил на стол медную копейку и с опаской дожидался, возьмет гость монету или раздумает, деньги свои назад потребует. Посетитель осмотрел копейку, взвесил в руке и спрятал в суму.

— Завтра в такое же время жди. Да не забудь, две копейки припаси, — сказал он и ушел.

Богач не верил удаче: сто тысяч с неба свалилось! Снова пересчитал деньги, удостоверился хорошенько, что не фальшивые: все правильно. Запрятал деньги подальше и стал ждать завтрашней уплаты.

Ночью взяло его сомнение: не разбойник ли простаком прикинулся, хочет поглядеть, куда деньги прячут, да потом и нагрянуть с шайкой лихих людей?

Запер богач двери покрепче, с вечера в окно поглядывал, прислушивался, долго заснуть не мог. На утро снова стук в окно: незнакомец деньги принес. Отсчитал сто тысяч, получил свои две копейки, спрятал монету в суму и ушел, бросив на прощанье:



Рис. 50. «Сто тысяч с неба свалилось!»

— К завтрашнему четыре копейки, смотри, приготовь. Снова радуется богач: вторая сотня тысяч даром досталась. А гость на грабителя не похож: по сторонам не глядит, не высматривает, свои только копейки требует. Чудак! Побольше бы таких на свете, умным людям хорошо бы жилось...

Явился незнакомец и на третий день — третья сотня тысяч перешла к богачу за 4 копейки.

Еще день, и таким же манером явилась четвертая сотня тысяч — за 8 копеек.

Пришла и пятая сотня тысяч — за 16 копеек.

Потом шестая за 32 копейки.

Спустя семь дней от начала сделки получил наш богач уже семьсот тысяч рублей, а уплатил пустяки:

$$1 \text{ коп.} + 2 \text{ коп.} + 4 \text{ коп.} + 8 \text{ коп.} + 16 \text{ коп.} + \\ + 32 \text{ коп.} + 64 \text{ коп.} = 1 \text{ р. } 27 \text{ к.}$$

Понравилось это алчному миллионеру, и он уже стал сожалеть, что договорился всего на один только месяц. Больше трех миллионов получить не удастся. Склонить разве чудака продлить срок еще хоть на полмесяца? Боязно: как бы не сообразил, что зря деньги отдает...

А незнакомец аккуратно являлся каждое утро со своей сотней тысяч. На 8-й день получил он 1 р. 28 к., на 9-й — 2 р. 56 к., на 10-й — 5 р. 12 к., на 11-й — 10 р. 24 к., на

12-й — 20 р. 48 к., на 13-й — 40 р. 96 к., на 14-й — 81 р. 92 к.

Богач охотно платил эти деньги: ведь он получил уже один миллион 400 тысяч рублей, а отдал незнакомцу всего около полутора ста рублей.

Недолго, однако, длилась радость богача: скоро стал он соображать, что странный гость не простак и что сделка с ним вовсе не так выгодна, как казалось сначала. Спустя 15 дней приходилось за очередные сотни тысяч платить уже не копейки, а сотни рублей, и плата страшно быстро нарастала. В самом деле, богач уплатил во второй половине месяца:

за 15-ю сотню тысяч	. . .	163 р. 84 к.,
» 16-ю » »	. . .	327 » 68 »,
» 17-ю » »	. . .	655 » 36 »,
» 18-ю » »	. . .	1310 » 72 »,
» 19-ю » »	. . .	2621 » 44 ».

Впрочем, богач считал себя еще далеко не в убытке: хотя и уплатил больше пяти тысяч, зато получил 1800 тысяч.

Прибыль, однако, с каждым днем уменьшалась, притом все быстрее и быстрее.

Вот дальнейшие платежи:

за 20-ю сотню тысяч	5 242 р. 88 к.,
» 21-ю » »	10 485 » 76 »,
» 22-ю » »	20 971 » 52 »,
» 23-ю » »	41 943 » 04 »,
» 24-ю » »	83 886 » 08 »,
» 25-ю » »	167 772 » 16 »,
» 26-ю » »	335 544 » 32 »,
» 27-ю » »	671 088 » 64 ».

Платить приходилось уже больше, чем получать. Тут бы и остановиться, да нельзя ломать договора.

Дальше пошло еще хуже. Слишком поздно убедился миллионер, что незнакомец жестоко перехитрил его и получит куда больше денег, чем сам уплатит...

Начиная с 28-го дня, богач должен был уже платить миллионы. А последние два дня его вконец разорили. Вот эти огромные платежи:

за 28-ю сотню тысяч	1 342 177 р. 28 к.,
» 29-ю » »	2 684 354 » 56 »,
» 30-ю » »	5 368 709 » 12 ».

Когда гость ушел в последний раз, миллионер подсчитал, во что обошлись ему столь дешевые на первый взгляд три миллиона рублей. Оказалось, что уплачено было незнакомцу

10 737 418 р. 23 к.

Без малого 11 миллионов!.. А ведь началось с одной копейки. Незнакомец мог бы приносить даже по три сотни тысяч и все-таки не прогадал бы.

3.

Прежде чем кончить с этой историей, покажу, каким способом можно ускорить подсчет убытков миллионера; другими словами — как скорее всего выполнить сложение ряда чисел:

$$1+2+4+8+16+32+64+\text{и т. д.}$$

Нетрудно подметить следующую особенность этих чисел:

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\2 &= 1+1 \\4 &= (1+2)+1 \\8 &= (1+2+4)+1 \\16 &= (1+2+4+8)+1 \\32 &= (1+2+4+8+16)+1 \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Мы видим, что каждое число этого ряда равно всем предыдущим, вместе взятым, плюс одна единица. Поэтому, когда нужно сложить все числа такого ряда, например от 1 до 32 768, то мы прибавляем лишь к последнему числу (32 768) сумму всех предыдущих, иначе сказать — прибавляем то же последнее число без единицы (32 768—1). Получаем 65 535.

Этим способом можно подсчитать убытки алчного миллионера очень быстро, как только узнаем, сколько уплатил он в последний раз. Его последний платеж был 5 368 709 р. 12 к.

Поэтому, сложив 5 368 709 р. 12 к. и 5 368 709 р. 11 к., получаем сразу искомый результат:

10 737 418 р. 23 к.

60. **Городские слухи.** Удивительно, как быстро разбегаются по городу слухи! Иной раз не пройдет и двух часов со времени какого-нибудь происшествия, которое видел всего несколько человек, а новость облетела уже весь город: все о ней знают, все слышали. Необычайная быстрота эта кажется поразительной, прямо загадочной.

Однако, если подойти к делу с подсчетом, то станет ясно, что ничего чудесного здесь нет: все объясняется свойствами чисел, а не таинственными особенностями самих слухов.

Для примера рассмотрим хотя бы такой случай.

1.

В небольшой городок с 50-тысячным населением приехал в 8 час. утра житель столицы и привез свежую, всем интересную новость.

В доме, где приезжий остановился, он сообщил новость только трем местным жителям; это заняло, скажем, четверть часа.

Итак, в 8 $\frac{1}{4}$ час. утра новость была известна в городе всего только четверым: приезжему и трем местным жителям.

Узнав эту новость, каждый из трех граждан поспешил рассказать ее 3 другим. Это потребовало также четверти часа. Значит, спустя полчаса после прибытия новости в город о ней знало уже $4 + (3 \times 3) = 13$ человек.

Каждый из 9 вновь узнавших поделился в ближайшие четверть часа с 3 другими гражданами, так что к 8 $\frac{3}{4}$ часам утра новость стала известна

$$13 + (3 \times 9) = 40 \text{ гражданам.}$$

Если слух распространяется по городу и далее таким же способом, т. е. каждый, узнавший про новость, успевает в ближайшие четверть часа сообщить ее 3 согражданам, то осведомление города будет происходить по следующему расписанию:

в 9 час.	новость узнают	$40 + (3 \times 27) = 121$	чел.,
» 9 $\frac{1}{4}$	»	$121 + (3 \times 81) = 364$	»,
» 9 $\frac{1}{2}$	»	$364 + (3 \times 243) = 1093$	».

Спустя полтора часа после первого появления в городе новости ее будут знать, как видим, всего около

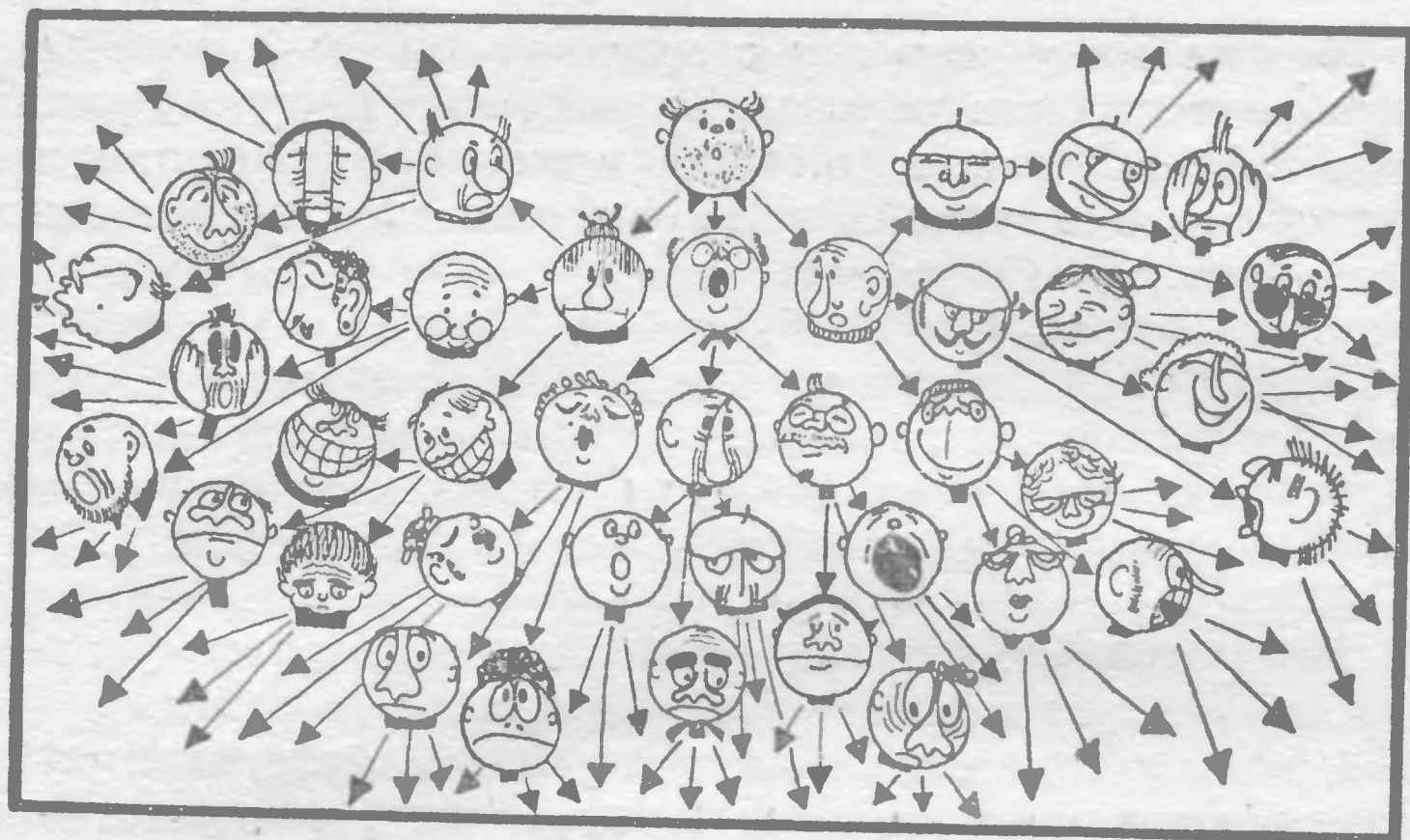


Рис. 51. Путь распространения слуха.

1100 человек. Это, казалось бы, немного для населения в 50 000. Можно подумать, что новость не скоро еще станет известна всем жителям. Проследим, однако, далее за распространением слуха:

в $9\frac{3}{4}$ час.	новость узнают	$1093 + (3 \times 729) = 3280$	чел.,
» 10	»	$3280 + (3 \times 2187) = 9841$	».

Еще спустя четверть часа будет уже осведомлено больше половины города:

$$9841 + (3 \times 6561) = 29\ 524.$$

И, значит, ранее чем в половине одиннадцатого дня поголовно все жители большого города будут осведомлены о новости, которая в 8 час. утра известна была только одному человеку.

2.

Проследим теперь, как выполнен был предыдущий подсчет.

Он сводился, в сущности, к тому, что мы сложили такой ряд чисел:

$$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) + \text{и т. д.}$$

Нельзя ли узнать эту сумму как-нибудь короче, наподобие того, как определяли мы раньше сумму чисел ряда $1+2+4+8$ и т. д.? Это возможно, если принять в соображение следующую особенность складываемых здесь чисел:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 3 &= 1 \times 2 + 1 \\
 9 &= (1+3) \times 2 + 1 \\
 27 &= (1+3+9) \times 2 + 1 \\
 81 &= (1+3+9+27) \times 2 + 1 \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

Иначе говоря: каждое число этого ряда равно удвоенной сумме всех предыдущих чисел плюс единица.

Отсюда следует, что если нужно найти сумму всех чисел нашего ряда от 1 до какого-либо числа, то достаточно лишь прибавить к этому последнему числу его половину (предварительно откинув в последнем числе единицу).

Например, сумма чисел

$$1+3+9+27+81+243+729$$

равна $729 + \text{половина от } 728$, т. е. $729 + 364 = 1093$.

3.

В нашем случае каждый житель, узнавший новость, передавал ее только трем гражданам. Но если бы жители города были еще разговорчивее и сообщали услышанную новость не 3 гражданам, а, например, 5 или даже 10 другим, слух распространялся бы, конечно, гораздо быстрее.

При передаче, например, пятерым картина осведомления города была бы такая:

в 8 час.		= 1 чел.,
» $8 \frac{1}{4}$ »	$1 + 5$	= 6 »,
» $8 \frac{1}{2}$ »	$6 + (5 \times 5)$	= 31 »,
» $8 \frac{3}{4}$ »	$31 + (25 \times 5)$	= 156 »,
» 9 »	$156 + (125 \times 5)$	= 781 »,
» $9 \frac{1}{4}$ »	$781 + (625 \times 5)$	= 3906 »,
» $9 \frac{1}{2}$ »	$3906 + (3125 \times 5)$	= 19 531 »,

Ранее чем в $9 \frac{3}{4}$ часа утра новость будет уже известна всему 50-тысячному населению города.

Еще быстрее распространится слух, если каждый, услышавший новость, передаст о ней 10 другим. Тогда получим такой любопытный, быстро возрастающий, ряд

чисел:

в 8 час.	=	1,
» 8 $\frac{1}{4}$ » 1 +	10 =	11,
» 8 $\frac{1}{2}$ » 11 +	100 =	111,
» 8 $\frac{3}{4}$ » 111 +	1000 =	1111,
» 9 » 1111 +	10 000 =	11 111.

Следующее число этого ряда, очевидно, 111 111 — это показывает, что весь город узнает про новость уже в самом начале 10-го часа утра. Слух разнесется почти в один час!

61. Лавина дешевых велосипедов. В дореволюционные годы были у нас, — а за рубежом, вероятно, и теперь еще находятся, — предприниматели, которые прибегают к довольно оригинальному способу сбывать свой товар, обычно посредственного качества. Начинали с того, что в распространенных газетах и журналах печатали рекламу такого содержания:

Велосипед за 10 рублей!

Каждый может приобрести в собственность велосипед, затратив только 10 рублей.

Пользуйтесь редким случаем.

ВМЕСТО 50 РУБЛЕЙ — 10 РУБ.

Условия покупки высылаются бесплатно

Немало людей, конечно, соблазнились заманчивым объявлением и просили прислать условия необычной покупки. В ответ на запрос они получали подробный проспект, из которого узнавали следующее.

За 10 руб. высылался пока не самый велосипед, а только 4 билета, которые надо было сбыть по 10 руб. своим четверым знакомым. Собранные таким образом 40 руб. следовало отправить фирме, и тогда лишь прибывал велосипед; значит, он обходился покупателю действительно всего в 10 руб., остальные 40 руб. уплачивались ведь не из его кармана. Правда, кроме уплаты 10 руб. наличными деньгами, приобретающий велосипед имел некоторые хлопоты по продаже билетов среди знакомых, — но этот маленький труд в счет не шел.

Что же это были за билеты? Какие блага приобретал их покупатель за 10 руб.? Он получал право обменять их у фирмы на 5 таких же билетов; другими словами, он приобретал возможность собрать 50 руб. для покупки велосипеда, который ему обходился, следовательно, только в 10 руб., т. е. в стоимость билета. Новые обладатели билетов в свою очередь получали от фирмы по 5 билетов для дальнейшего распространения, и т. д.

На первый взгляд во всем этом не было обмана. Обещание рекламного объявления исполнялось: велосипед в самом деле обходился покупателям всего лишь в 10 руб. Да и фирма не оказывалась в убытке, — она получала за свой товар полную его стоимость.

А между тем вся затея — несомненное мошенничество. «Лавина», как называли эту аферу у нас, или «снежный ком», как величали ее французы, вовлекала в убыток тех многочисленных ее участников, которым не удавалось сбыть дальше купленные ими билеты. Они-то и уплачивали фирме разницу между 50-рублевой стоимостью велосипедов и 10-рублевой платой за них. Рано ли, поздно ли, но неизбежно наступал момент, когда держатели билетов не могли найти охотников их приобрести. Что так должно непременно случиться, вы поймете, дав себе труд проследить с карандашом в руке за тем, как стремительно возрастает число людей, вовлекаемых в лавину.

Первая группа покупателей, получившая свои билеты прямо от фирмы, находит покупателей обычно без особого труда; каждый член этой группы снабжает билетами четверых новых участников.

Эти четверо должны сбыть свои билеты 4×5 , т. е. 20 другим, убедив их в выгоде такой покупки. Допустим, что это удалось, и 20 покупателей завербовано.

Лавина движется дальше: 20 новых обладателей билетов должны наделить ими $20 \times 5 = 100$ других.

До сих пор каждый из «родоначальников» лавины втянул в нее

$$1 + 4 + 20 + 100 = 125 \text{ человек,}$$

из которых 25 имеют по велосипеду, а 100 — только надежду его получить, уплатив за эту надежду по 10 руб.

Теперь лавина выходит уже из тесного круга знакомых между собою людей и начинает растекаться по городу, где ей становится, однако, все труднее и труднее оты-

скивать свежий материал. Сотня последних обладателей билетов должна снабдить такими же билетами 500 граждан, которым в свою очередь придется завербовать 2500 новых жертв. Город быстро наводняется билетами, и отыскивать охотников приобрести их становится весьма нелегким делом.

Вы видите, что число людей, втянутых в лавину, растет по тому же самому закону, с которым мы встретились, когда беседовали о распространении слухов. Вот числовая пирамида, которая в этом случае получается:

1
4
20
100
500
2 500
12 500
62 500

Если город велик, и все его население, способное сидеть на велосипеде, составляет $62\frac{1}{2}$ тысячи, то в рассматриваемый момент, т. е. на 8 «туре», лавина должна иссякнуть. Все оказались втянутыми в нее. Но обладает велосипедами только пятая часть, у остальных же $\frac{4}{5}$ имеются на руках билеты, которые некому сбыть.

Для города с более многочисленным населением, даже для современного столичного центра, насчитывающего миллионы жителей, момент насыщения наступит всего несколькими турами позднее, потому что числа лавины растут с невероятной быстротой. Вот следующие ярусы нашей числовой пирамиды:

312 500
1 562 500
7 812 500
39 062 500

На 12-м туре лавина, как видите, могла бы втянуть в себя население целого государства. И $\frac{4}{5}$ этого населения будет обмануто организаторами лавины.

Подведем итог тому, чего собственно достигает фирма устройством лавины. Она принуждает $\frac{4}{5}$ населения оплачивать товар, приобретаемый остальной $\frac{1}{5}$ частью населения; иными словами — заставляет четырех граждан

облагодетельствовать пятого. Совершенно безвозмездно приобретает фирма, кроме того, многочисленный штат усердных распространителей ее товара. Правильно охарактеризовал эту аферу один из наших писателей *) как «лавину взаимного объегоривания». Числовой великан, невидимо скрывающийся за этой затеей, наказывает тех, кто не умеет воспользоваться арифметическим расчетом для ограждения собственных интересов от посягательства аферистов.

62. Награда. Вот что, по преданию, произошло много веков назад в Древнем Риме **).

1.

Полководец Теренций, по приказу императора, совершил победоносный поход и с трофеями вернулся в Рим. Прибыв в столицу, он просил допустить его к императору.

Император ласково принял полководца, сердечно благодарил его за военные услуги империи и обещал в награду дать высокое положение в сенате.

Но Теренцию нужно было не это. Он возразил:

— Много побед одержал я, чтобы возвысить твое могущество, государь, и окружить имя твое славой. Я не страшился смерти, и будь у меня не одна, а много жизней, я все их принес бы тебе в жертву. Но я устал воевать; прошла молодость, кровь медленнее бежит в моих жилах. Наступила пора отдохнуть в доме моих предков и наслаждаться радостями домашней жизни.

— Чего желал бы ты от меня, Теренций? — спросил император.

— Выслушай со снисхождением, государь! За долгие годы военной жизни, изо дня в день обагрив меч своей кровью, я не успел устроить себе денежного благополучия. Я беден, государь...

— Продолжай, храбрый Теренций.

— Если хочешь даровать награду скромному слуге твоему, — продолжал ободренный полководец, — то пусть щедрость твоя поможет мне дожить мирно в достатке

*) И. И. Ясинский.

***) Рассказ в вольной передаче заимствован из старинной латинской рукописи, принадлежащей одному из частных книгохранилищ Англии.

годы подле домашнего очага. Я не ищю почестей и высокого положения во всемогущем сенате. Я желал бы удалиться от власти и от жизни общественной, чтобы отдохнуть на покое. Государь, дай мне денег для обеспечения остатка моей жизни.

Император — гласит предание — не отличался широкой щедростью. Он любил копить деньги для себя и скупо тратил их на других. Просьба полководца заставила его задуматься.

— Какую же сумму, Теренций, считал бы ты для себя достаточной? — спросил он.

— Миллион динариев, государь.

Снова задумался император. Полководец ждал, опустив голову.

Наконец император заговорил:

— Доблестный Теренций! Ты великий воин, и славные подвиги твои заслужили щедрой награды. Я дам тебе богатство. Завтра в полдень ты услышишь здесь мое решение.

Теренций поклонился и вышел.

2.

На следующий день в назначенный час полководец явился во дворец императора.

— Привет тебе, храбрый Теренций! — сказал император.

Теренций смиренно наклонил голову.

— Я пришел, государь, чтобы выслушать твое решение. Ты милостиво обещал вознаградить меня.

Император ответил:

— Не хочу, чтобы такой благородный воитель, как ты, получил за свои подвиги жалкую награду. Выслушай же меня. В моем казначействе лежит 5 миллионов медных брассов *). Теперь внимай моим словам. Ты войдешь в казначейство, возьмешь одну монету в руки, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную 2 брассам, и положишь здесь рядом с первой. В третий день принесешь монету, стоящую 4 брасса, в четвертый — стоящую 8 брассов, в пятый — 16, и так

*) Мелкая монета, пятая часть динария.

далее, все удваивая стоимость монеты. Я прикажу ежедневно изготавливать для тебя монеты надлежащей ценности. И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, будешь ты выносить их из моего казначейства. Никто не вправе помогать тебе; ты должен пользоваться только собственными силами. И когда заметишь, что не можешь уже больше поднять монету — остановись: уговор наш кончится, но все монеты, которые удалось тебе вынести, останутся твоими и послужат тебе наградой.

Жадно впивал Теренций каждое слово, сказанное императором.

Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые вынесет он из государственного казначейства.

— Я доволен твоею милостью, государь, — ответил он с радостной улыбкой. — Поистине щедра награда твоя!

3.

Начались ежедневные посещения Теренцием государственного казначейства. Оно помещалось невдалеке от приемной залы императора, и первые переходы с монетами не стоили Теренцию никаких усилий.

В первый день вынес он из казначейства всего один brass. Это небольшая монета, 21 мм в поперечнике и 5 г весом *).

Легки были также второй, третий, четвертый, пятый и шестой переходы, когда полководец выносил монеты двойного, тройного, 8-кратного, 16-кратного и 32-кратного веса.

Седьмая монета весила в наших современных мерах 320 граммов и имела в поперечнике $8\frac{1}{2}$ см (точнее, 84 мм) **).

На восьмой день Теренцию пришлось вынести из казначейства монету, соответствовавшую 128 единичным монетам. Она весила 640 г и была шириною около $10\frac{1}{2}$ см.

На девятый день Теренций принес в императорскую залу монету в 256 единичных монет. Она имела 13 см в ширину и весила более $1\frac{1}{4}$ кг.

*) Вес пятикопечной монеты современной чеканки.

***) Если монета по объему в 64 раза больше обычной, то она шире и толще всего в 4 раза, потому что $4 \times 4 \times 4 = 64$. Это надо иметь в виду и в дальнейшем при расчете размеров монет, о которых говорится в рассказе.



Рис. 52. Семнадцатая монета.

На двенадцатый день монета достигла почти 27 см в поперечнике и весила $10\frac{1}{4}$ кг.

Император, до сих пор смотревший на полководца приветливо, теперь не скрывал своего торжества. Он видел, что сделано уже 12 переходов, а вынесено из казначейства всего только 2000 с небольшим медных монеток.

Тринадцатый день доставил храброму Теренцию монету, равную 4096 единичным монетам. Она имела около 34 см в ширину, а вес ее равнялся $20\frac{1}{2}$ кг.

На четырнадцатый день Теренций вынес из казначейства тяжелую монету в 41 кг весом и около 42 см шириною.

— Не устал ли ты, мой храбрый Теренций? — спросил его император, сдерживая улыбку.

— Нет, государь мой, — хмуро ответил полководец, стирая пот со лба.

Наступил пятнадцатый день. Тяжела была на этот раз ноша Теренция. Медленно брел он к императору, неся огромную монету, составленную из 16 384 единичных монет. Она достигала 53 см в ширину и весила 80 кг — вес рослого воина.

На шестнадцатый день полководец шатался под ношей, лежавшей на его спине. Это была монета, равная 32 768 единичным монетам и весившая 164 кг; поперечник ее достигал 67 см.

Полководец был обессилен и тяжело дышал. Император улыбался...

Когда Теренций явился в приемную залу императора на следующий день, он был встречен громким смехом. Теренций не мог уже нести свою ношу в руках, а катил ее впереди себя. Монета имела в поперечнике 84 см и весила 328 кг. Она соответствовала весу 65 536 единичных монет.

Восемнадцатый день был последним днем обогащения Теренция. В этот день закончились его посещения казначейства и странствования с ношей в приемную залу императора. Ему пришлось доставить на этот раз монету, соответствовавшую 131 072 единичным монетам. Она имела более метра в поперечнике и весила 655 кг. Пользуясь своим копьём как рычагом, Теренций с величайшим напряжением сил едва вкатил ее в залу. С грохотом упала исполинская монета к ногам императора.

Теренций был совершенно измучен.

— Не могу больше... Довольно,— прошептал он.

Император с трудом подавил смех удовольствия, видя полный успех своей хитрости. Он приказал казначею исчислить, сколько всего брассов вынес Теренций в приемную залу.

Казначей исполнил поручение и сказал:

— Государь, благодаря твоей щедрости победоносный воитель Теренций получил в награду 262 143 брасса.

Итак, скупой император дал полководцу около 20-й части той суммы в миллион динариев, которую просил Теренций.

* *
*

Проверим расчет казначея, а заодно и вес монет. Теренций вынес:

в 1-й день .	1 брасс	весом	5 г,
на 2	2 брасса	»	10 »,
» 3	4	»	20 »,
» 4	8	»	40 »,
» 5	16	»	80 »,
» 6	32	»	160 »,
» 7	64	»	320 »,
» 8	128	»	640 »,
» 9	256	»	1 кг 280 »,
» 10	512	»	2 » 560 »,
» 11	1024	»	5 » 120 ».

на 12 день .	2 048	брассов весом	10 кг	240 г,
» 13 » .	4 096	»	»	20 » 480 »,
» 14 » .	8 192	»	»	40 » 960 »,
» 15 » .	16 384	»	»	81 » 920 »,
» 16 » .	32 768	»	»	163 » 840 »,
» 17 » .	65 536	»	»	327 » 680 »,
» 18 » .	131 072	»	»	655 » 360 ».

Мы уже знаем, как можно просто подсчитать сумму чисел таких рядов: для второго столбца она равна 262 143,— согласно правилу, указанному на стр. 75. Теренций просил у императора миллион динариев, т. е. 5 000 000 брассов. Значит, он получил меньше просимой суммы в

$$5\,000\,000 : 262\,143 \approx 19 \text{ раз.}$$

63. Легенда о шахматной доске. Шахматы — одна из самых древних игр. Она существует уже многие века, и неудивительно, что с нею связаны различные предания, правдивость которых, за давностью времени, невозможно проверить.

Одну из подобных легенд я и хочу рассказать. Чтобы понять ее, не нужно вовсе уметь играть в шахматы: достаточно знать, что игра происходит на доске, разграфленной на 64 клетки (попеременно черные и белые).

1.

Шахматная игра была придумана в Индии, и когда индусский царь Шерам познакомился с нею, он был восхищен ее остроумием и разнообразием возможных в ней положений.

Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь приказал его позвать, чтобы лично наградить за удачную выдумку.

Изобретатель, его звали Сета, явился к трону повелителя. Это был скромно одетый ученый, получавший средства к жизни от своих учеников.

— Я желаю достойно вознаградить тебя, Сета, за прекрасную игру, которую ты придумал,— сказал царь.

Мудрец поклонился.

— Я достаточно богат, чтобы исполнить самое смелое твое пожелание,— продолжал царь.— Назови награду, которая тебя удовлетворит, и ты получишь ее.



Рис. 53. «За вторую клетку прикажи выдать два зерна».

Сета молчал.

— Не робей, — ободрил его царь. — Выскажи свое желание. Я не пожалею ничего, чтобы исполнить его.

— Велика доброта твоя, повелитель. Но дай срок обдумать ответ. Завтра, по зрелом размышлении, я сообщу тебе мою просьбу.

Когда на другой день Сета снова явился к ступеням трона, он удивил царя беспримерной скромностью своей просьбы.

— Повелитель, — сказал Сета, — прикажи выдать мне за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно.

— Простое пшеничное зерно? — изумился царь.

— Да, повелитель. За вторую клетку прикажи выдать 2 зерна, за третью 4, за четвертую — 8, за пятую — 16, за шестую — 32...

— Довольно, — с раздражением прервал его царь. — Ты получишь свои зерна за все 64 клетки доски, согласно твоему желанию: за каждую вдвое больше против предыдущей. Но знай, что просьба твоя недостойна моей щедрости. Прося такую ничтожную награду, ты непочтительно пренебрегаешь моею милостью. Поистине, как учитель, ты мог бы показать лучший пример уважения к доброте

своего государя. Ступай. Слуги мои вынесут тебе твой мешок с пшеницей.

Сета улыбнулся, покинул залу и стал дожидаться у ворот дворца.

2.

За обедом царь вспомнил об изобретателе шахмат и послал узнать, унес ли уже безрассудный Сета свою жалкую награду.

— Повелитель, — был ответ, — приказание твое исполняется. Придворные математики исчисляют число следуемых зерен.

Царь нахмурился. Он не привык, чтобы повеления его исполнялись так медлительно.

Вечером, отходя ко сну, царь еще раз осведомился, давно ли Сета со своим мешком пшеницы покинул ограду дворца.

— Повелитель, — ответили ему, — математики твои трудятся без усталости и надеются еще до рассвета закончить подсчет.

— Почему медлят с этим делом? — гневно воскликнул царь. — Завтра, прежде чем я проснусь, все до последнего зерна должно быть выдано Сете. Я дважды не приказываю.

Утром царю доложили, что старшина придворных математиков просит выслушать важное донесение.

Царь приказал ввести его.

— Прежде чем скажешь о твоём деле, — объявил Шерам, — я желаю услышать, выдана ли, наконец, Сете та ничтожная награда, которую он себе назначил.

— Ради этого я и осмелился явиться перед тобой в столь ранний час, — ответил старик. — Мы добросовестно исчислили все количество зерен, которое желает получить Сета. Число это так велико...

— Как бы велико оно ни было, — надменно перебил царь, житницы мои не оскудеют. Награда обещана и должна быть выдана...

— Не в твоей власти, повелитель, исполнять подобные желания. Во всех амбарах твоих нет такого числа зерен, какое потребовал Сета. Нет его и в житницах целого царства. Не найдется такого числа зерен и на всем пространстве Земли. И если желаешь непременно выдать обещанную награду, то прикажи превратить земные царства в пахотные поля, прикажи осушить моря и океаны,

прикажи растопить льды и снега, покрывающие далекие северные пустыни. Пусть все пространство их сплошь будет засеяно пшеницей. И все то, что родится на этих полях, прикажи отдать Сете. Тогда он получит свою награду.

С изумлением внимал царь словам старца.

— Назови же мне это чудовищное число,— сказал он в раздумьи.

— Восемнадцать квинтильонов четыреста сорок шесть квадрильонов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три биллиона семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать, о повелитель!

3.

Такова легенда. Действительно ли было то, что здесь рассказано, неизвестно,— но что награда, о которой говорит предание, должна была выразиться именно таким числом, в этом вы сами можете убедиться терпеливым подсчетом.

Начав с единицы, нужно сложить числа: 1, 2, 4, 8 и т. д. Результат 63-го удвоения покажет, сколько причиталось изобретателю за 64-ю клетку доски. Поступая, как объяснено на стр. 75, мы без труда найдем всю сумму следуемых зерен, если удвоим последнее число и отнимем одну единицу. Значит, подсчет сводится лишь к перемножению 64 двоек

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \text{и т. д. (64 раза).}$$

Для облегчения выкладок разделим эти 64 множителя на 6 групп по 10 двоек в каждой и одну последнюю группу из 4 двоек. Произведение 10 двоек, как легко убедиться, равно 1024, а 4 двоек — 16. Значит, искомый результат равен

$$1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16.$$

Перемножив 1024×1024 , получим 1 048 576.

Теперь остается найти

$$1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 16,$$

отнять от результата одну единицу — и нам станет известно искомое число зерен:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Если желаете представить себе всю огромность этого числового великана, прикиньте, какой величины амбар потребовался бы для вмещения подобного количества зерен. Известно, что кубический метр пшеницы вмещает около 15 миллионов зерен. Значит, награда шахматного изобретателя должна была бы занять объем примерно в 12 000 000 000 000 *куб. м*, или 12 000 *куб. км*. При высоте амбара 4 м и ширине 10 м длина его должна была бы простираться на 300 000 000 *км*, — т. е. вдвое дальше, чем от Земли до Солнца!..

Индусский царь не в состоянии был выдать подобной награды. Но он легко мог бы, будь он силен в математике, освободиться от столь обременительного долга. Для этого нужно было лишь предложить Сете самому отсчитать себе зерно за зерном всю причитающуюся ему пшеницу.

В самом деле: если бы Сета, принявшись за счет, вел его непрерывно день и ночь, отсчитывая по зерну в секунду, он в первые сутки отсчитал бы всего 86 400 зерен. Чтобы отсчитать миллион зерен, понадобилось бы не менее 10 суток неустанного счета. Один кубический метр пшеницы он отсчитал бы примерно в полгода: это дало бы ему всего 5 четвертей. Считая непрерывно в течение 10 лет, он отсчитал бы себе не более 100 четвертей. Вы видите, что, посвятив счету даже весь остаток своей жизни, Сета получил бы лишь ничтожную часть потребованной им награды.

64. Быстрое размножение. Спелая маковая головка полна крошечных зернышек: из каждого может вырасти целое растение. Сколько же получится маков, если зернышки все до единого прорастут? Чтобы узнать это, надо сосчитать зернышки в целой головке. Скучное занятие, но результат так интересен, что стоит запастись терпением и довести счет до конца. Оказывается, одна головка мака содержит (круглым числом) 3000 зернышек.

Что отсюда следует? То, что будь вокруг нашего макового растения достаточная площадь подходящей земли, каждое упавшее зернышко дало бы росток, и будущим летом на этом месте выросло бы уже 3000 маков. Целое маковое поле от одной головки!

Посмотрим же, что будет дальше. Каждое из 3000 растений принесет не менее одной головки (чаще же несколько), содержащей 3000 зерен. Проросши, семена

каждой головки дадут 3000 новых растений, и, следовательно, на второй год у нас будет уже не менее

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ растений.}$$

Легко рассчитать, что на третий год число потомков нашего единственного мака будет уже достигать

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000.$$

А на четвертый год

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

На пятом году макам станет тесно на земном шаре, потому что число растений делается равным

$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Поверхность же всей суши, т. е. всех материков и островов земного шара, составляет только 135 миллионов квадратных километров, — 135 000 000 000 000 кв. м. — примерно в 2000 раз менее, чем выросло бы экземпляров мака.

Вы видите, что если бы все зернышки мака прорастали, потомство одного растения могло бы уже в пять лет покрыть сплошь всю сушу земного шара густой зарослью по две тысячи растений на каждом квадратном метре. Вот какой числовой великан скрывается в крошечном маковом зернышке!

Сделав подобный же расчет не для мака, а для какого-нибудь другого растения, приносящего меньше семян, мы пришли бы к такому же результату, но только потомство его покрыло бы всю Землю не в 5 лет, а в немного больший срок. Возьмем хотя бы одуванчик, приносящий ежегодно около 100 семян*). Если бы все они прорастали, мы имели бы:

в 1 год	1 растение
» 2 »	100 растений
» 3 »	10 000 »
» 4 »	1 000 000 »
» 5 »	100 000 000 »
» 6 »	10 000 000 000 »
» 7 »	1 000 000 000 000 »
» 8 »	100 000 000 000 000 »
» 9 »	10 000 000 000 000 000 »

*) В одной головке одуванчика было насчитано даже около 200 семян.

Это в 70 раз больше, чем имеется квадратных метров на всей суше.

Следовательно, на 9-м году материка земного шара были бы покрыты одуванчиками, по 70 на каждом квадратном метре.

Почему же в действительности не наблюдаем мы такого чудовищно быстрого размножения? Потому, что огромное большинство семян погибает, не давая ростков: они или не попадают на подходящую почву и вовсе не прорастают, или, начав прорастать, заглушаются другими растениями, или же, наконец, просто истребляются животными. Но если бы этого массового уничтожения семян и ростков не было, каждое растение в короткое время покрыло бы сплошь всю нашу планету.

Это верно не только для растений, но и для животных. Не будь смерти, потомство одной пары любого животного рано или поздно заполнило бы всю Землю. Полчища саранчи, сплошь покрывающие огромные пространства, могут дать нам некоторое представление о том, что было бы, если бы смерть не препятствовала размножению живых существ. В каких-нибудь два-три десятка лет материка покрылись бы непроходимыми лесами и степями, где кишели бы миллионы животных, борющихся между собой за место. Океан наполнился бы рыбой до того густо, что судоходство стало бы невозможно. А воздух сделался бы едва прозрачным от множества птиц и насекомых. Рассмотрим для примера, как быстро размножается всем известная комнатная муха. Пусть каждая муха откладывает 120 яиц и пусть в течение лета успевает появиться 7 поколений мух, половина которых — самки. За начало первой кладки примем 15 апреля и будем считать, что муха-самка в 20 дней вырастает настолько, что сама откладывает яйца. Тогда размножение будет происходить так:

15 апреля — самка отложила 120 яиц; в начале мая — вышло 120 мух, из них 60 самок.

5 мая — каждая самка кладет 120 яиц; в середине мая — выходит $60 \times 120 = 7200$ мух, из них 3600 самок;

25 мая — каждая из 3600 самок кладет по 120 яиц; в начале июня — выходит $3600 \times 120 = 432\ 000$ мух, из них 216 000 самок;

14 июня — каждая из 216 000 самок кладет по 120 яиц; в конце июня — выходит 25 920 000 мух, в их числе 12 960 000 самок;

5 июля — 12 960 000 самок кладут по 120 яиц; в июле — выходит 1 555 200 000 мух, среди них 777 600 000 самок;

25 июля — выходит 93 312 000 000 мух, среди них 46 656 000 000 самок;

13 августа — выходит 5 598 720 000 000 мух, среди них 2 799 360 000 000 самок;

1 сентября — выходит 355 923 200 000 000 мух.

Чтобы яснее представить себе эту огромную массу мух, которые при беспрепятственном размножении могли бы в течение одного лета народиться от одной пары, вообразим, что они выстроены в прямую линию, одна около другой. Так как длина мухи 5 мм, то все эти мухи вытянулись бы на 2500 млн. км — в 18 раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца (т. е. примерно, как от Земли до далекой планеты Уран)...

В заключение приведем несколько подлинных случаев необыкновенно быстрого размножения животных, поставленных в благоприятные условия.

В Америке первоначально не было воробьев. Эта столь обычная у нас птица была ввезена в Соединенные Штаты намеренно с той целью, чтобы она уничтожала там вредных насекомых. Воробей, как известно, в изобилии поедает прожорливых гусениц и других насекомых, вредящих садам и огородам. Новая обстановка полюбилась воробьям: в Америке не оказалось хищников, истребляющих этих птиц, и воробей стал быстро размножаться. Количество вредных насекомых начало заметно уменьшаться, но вскоре воробьи так размножились, что — за недостатком животной пищи — принялись за растительную и стали опустошать посевы *). Пришлось приступить к борьбе с воробьями; борьба эта обошлась американцам так дорого, что на будущее время издан был закон, запрещающий ввоз в Америку каких бы то ни было животных.

Второй пример. В Австралии не существовало кроликов, когда этот материк открыт был европейцами. Кролик ввезен туда в конце XVIII века, и так как там отсутствуют хищники, питающиеся кроликами, то размножение этих грызунов пошло необычайно быстрым тем-

*) А на Гавайских островах они полностью вытеснили всех остальных мелких птиц.

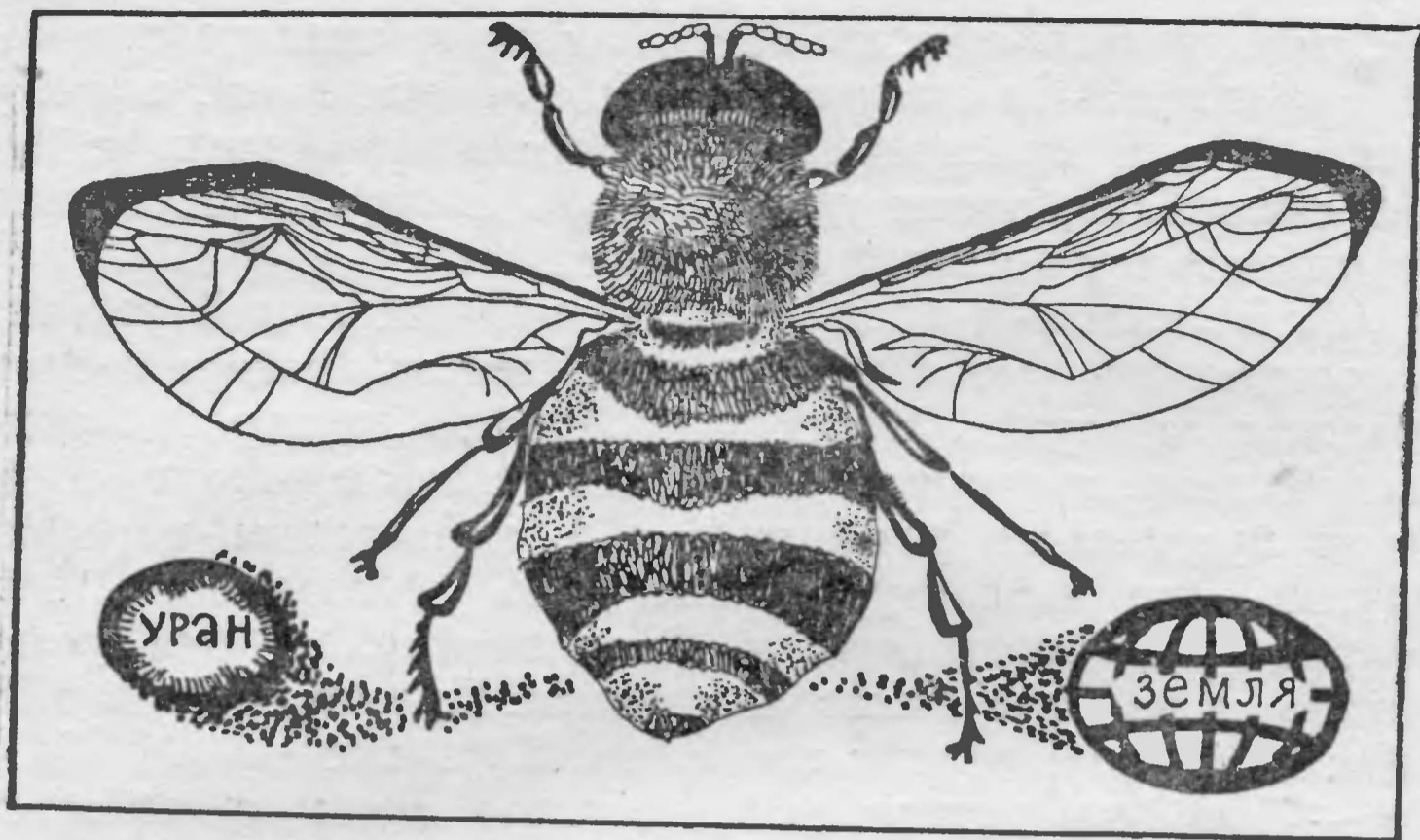


Рис. 54. Потомство мухи за одно лето можно было бы вытянуть в линию от Земли до Урана.

пом. Вскоре полчища кроликов наводнили всю Австралию, нанося страшный вред сельскому хозяйству и превратившись в подлинное бедствие. На борьбу с этим бичом сельского хозяйства брошены были огромные средства, и только благодаря энергичным мерам удалось справиться с бедой. Приблизительно то же самое повторилось позднее с кроликами в Калифорнии.

Третья поучительная история произошла на острове Ямайке. Здесь водились в изобилии ядовитые змеи. Чтобы от них избавиться, решено было ввезти на остров птицу — секретаря, яростного истребителя ядовитых змей. Число змей действительно вскоре уменьшилось, зато необычайно расплодились полевые крысы, раньше поедавшиеся змеями. Крысы приносили такой ущерб плантациям сахарного тростника, что пришлось серьезно подумать об их истреблении. Известно, что врагом крыс является индийский мангуст. Решено было привести на остров 4 пары этих животных и предоставить им свободно размножаться. Мангусты хорошо приспособились к новой родине и быстро заселили весь остров. Не прошло и десяти лет, как они почти уничтожили на нем крыс. Но увы — истребив крыс, мангусты стали питаться чем попало, сделавшись всеядными животными: нападали на щенят, козлят, поро-

сят, домашних птиц и их яйца. А размножившись еще более, принялись за плодовые сады, хлебные поля, плантации. Жители приступили к уничтожению своих недавних союзников, но им удалось лишь до некоторой степени ограничить приносимый мангустами вред.

65. Бесплатный обед. Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по успеваемости, четвертые — по росту и т. д. Спор затянулся, суп успел остыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол, как кому придется, и выслушайте меня.

Все сели как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете опять по-новому и т. д., пока не перепробуете всех возможных размещений. Когда же придет черед вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда — обещаю торжественно — я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами.

Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами.

Однако, им не пришлось дожидаться этого дня. И вовсе не потому, что официант не исполнил обещания, а потому, что число всех возможных размещений за столом чересчур велико. Оно равняется ни мало, ни много — 3 628 800. Такое число дней составляет, как нетрудно сосчитать, почти 10 000 лет!

Вам, быть может, кажется невероятным, чтобы 10 человек могли размещаться таким большим числом различных способов. Проверьте расчет сами.

Раньше всего надо научиться определять число перестановок. Для простоты начнем вычисление с небольшого числа предметов — с трех. Назовем их *A*, *B* и *C*.

Мы желаем узнать, сколькими способами возможно переставлять их один на место другого. Рассуждаем так.

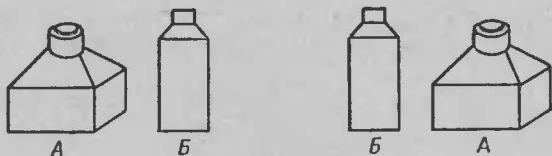


Рис. 55. Две вещи можно разместить только двумя способами.

Если отложить пока в сторону вещь *B*, то остальные две можно разместить только двумя способами.

Теперь будем присоединять вещь *B* к каждой из этих пар. Мы можем сделать это тройко: можем

- 1) поместить *B* позади пары,
- 2) » *B* впереди пары,
- 3) » *B* между обеими вещами.

Других положений для вещи *B*, кроме этих трех, очевидно, быть не может. А так как у нас две пары, *AB* и *BA*, то всех способов разместить вещи наберется

$$2 \times 3 = 6.$$

Способы эти показаны на рис. 56.

Пойдем дальше — сделаем расчет для 4 вещей.

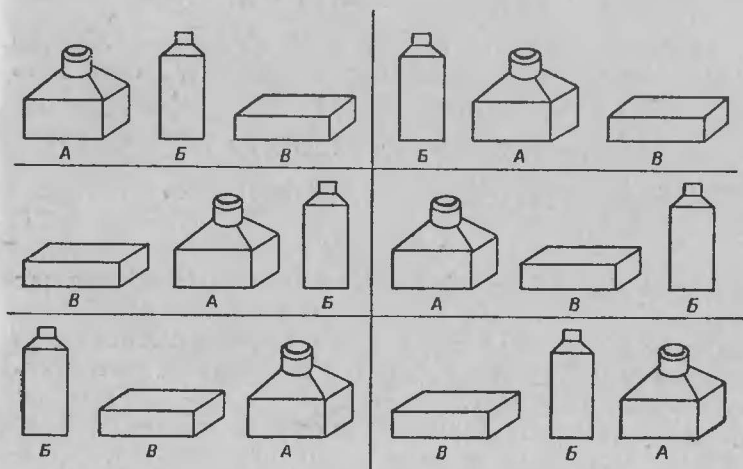


Рис. 56. Три вещи можно разместить шестью способами.

Пусть у нас 4 вещи: А, Б, В и Г. Опять отложим пока в сторону одну вещь, например Г, а с остальными тремя сделаем все возможные перестановки. Мы знаем уже, что число этих перестановок — 6. Сколькими же способами можно присоединить четвертую вещь Г к каждой из 6 троек? Очевидно, четыремя: можно

- 1) поместить Г позади тройки;
- 2) » Г впереди тройки;
- 3) » Г между 1-й и 2-й вещью;
- 4) » Г между 2-й и 3-й вещью.

Всего получим, следовательно,

$$6 \times 4 = 24 \text{ перестановки;}$$

а так как $6 = 2 \times 3$, а $2 = 1 \times 2$, то число всех перестановок можно представить в виде произведения:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Рассуждая таким же образом и в случае 5 предметов, узнаем, что для них число перестановок равно

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Для 6 предметов:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \text{ и т. д.}$$

Обратимся теперь к случаю с 10 обедающими. Число возможных здесь перестановок определится, если дать себе труд вычислить произведение

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

Тогда и получится указанное выше число

$$3\ 628\ 800.$$

Расчет был бы сложнее, если бы среди 10 обедающих было 5 девушек, и они желали бы сидеть за столом непременно так, чтобы чередоваться с юношами. Хотя число возможных перемещений здесь гораздо меньше, вычислить его несколько труднее.

Пусть сядет за стол — безразлично как — один из юношей. Остальные четверо могут разместиться, оставляя между собою пустые стулья для девушек, $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ различными способами. Так как всех стульев 10, то

первый юноша может сесть 10 способами; значит число всех возможных размещений для молодых людей $10 \times 24 = 240$.

Сколькими же способами могут сесть на пустые стулья между юношами 5 девушек? Очевидно, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ способами. Сочетая каждое из 240 положений юношей с каждым из 120 положений девушек, получаем число всех возможных размещений:

$$240 \times 120 = 28\ 800.$$

Число это во много раз меньше предыдущего и потребовало бы всего 79 лет (без малого). Доживи молодые посетители ресторана до столетнего возраста, они могли бы дожидаться бесплатного обеда, если не от самого официанта, то от его наследников.

Умея подсчитывать перестановки, мы можем определить теперь, сколько различных расположений шашек возможно в коробке игры («в 15» *). Другими словами, мы можем подсчитать число всех задач, какие способна предложить нам эта игра. Легко понять, что подсчет сводится к определению числа перестановок из 15 предметов. Мы знаем уже, что для этого нужно перемножить

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 14 \times 15.$$

Вычисление дает итог:

$$1\ 307\ 674\ 365\ 000,$$

т. е. больше триллиона.

Из этого огромного числа задач половина неразрешима. Существует, значит, свыше 600 миллиардов неразрешимых положений в этой игре. Отсюда понятна отчасти та эпидемия увлечения игрой «в 15», которая охватила людей, не подозревавших о существовании такого огромного числа неразрешимых случаев.

Заметим еще, что если бы мыслимо было каждую секунду давать шашкам новое положение, то, чтобы перепробовать все возможные расположения, потребовалось бы, при непрерывной работе круглые сутки, свыше 40 000 лет.

Заканчивая нашу беседу о числе перестановок, решим такую задачу из школьной жизни.

*) При этом свободная клетка должна всегда оставаться в правом нижнем углу.

В классе 25 учеников. Сколькими способами можно рассадить их по партам?

Путь решения этой задачи — для тех, кто усвоил себе все сказанное раньше, — весьма не сложен: нужно перемножить 25 таких чисел:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times 23 \times 24 \times 25.$$

Математика указывает способы сокращать многие вычисления, но облегчать выкладки, подобные сейчас приведенной, она не умеет. Не существует никакого иного способа выполнить точно это вычисление, как добросовестно перемножить все эти числа *). Только удачная группировка множителей позволит несколько сократить время вычисления. Результат получается огромный, из 26 цифр — число, величину которого наше воображение не в силах себе представить.

Вот оно:

$$15\ 511\ 210\ 043\ 330\ 985\ 984\ 000\ 000.$$

Из всех чисел, какие встречались нам до сих пор, — это, конечно, самое крупное, и ему больше всех прочих принадлежит право называться «числом-великаном». Число мельчайших капель во всех океанах и морях земного шара скромно по сравнению с этим исполинским числом.

66. **Переключивание монет.** В детстве старший брат показал мне, помню, занимательную игру с монетами. Поставив рядом три блюда, он положил в крайнее блюдо стопку из 5 монет: вниз рублевую, на нее — 50-копечную

*) Впрочем, приближенно это вычисление может быть выполнено сравнительно несложно. В математике часто встречается необходимость вычислить произведение всех целых чисел от 1 до некоторого числа n . Это произведение обозначают символом $n!$ и называют « n -факториал». Например, написанное выше произведение коротко обозначается как $25!$. В XVIII веке английский математик Стирлинг установил формулу, позволяющую приближенно вычислять факториалы. Эта формула имеет вид

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

где $\pi = 3,141\dots$, $e = 2,718\dots$ — некоторые числа, играющие важную роль в разных вопросах математики. Пользуясь таблицами логарифмов, по формуле Стирлинга легко получить:

$$25! \approx 1,55 \cdot 10^{25}.$$

монету, выше — 20-копеечную, далее 15-копеечную и на самый верх — 10-копеечную.

— Нужно перенести эти монеты на третье блюдо, соблюдая следующие три правила. Первое правило: за один раз перекладывать только одну монету. Второе: никогда не класть большей монеты на меньшую. Третье: можно в р е м е н н о класть монеты и на среднюю тарелку, соблюдая оба правила, но к концу игры все монеты должны очутиться на третьем блюде в первоначальном порядке. Правила, как видишь, не сложные. А теперь приступай к делу.

Я принялся перекладывать. Положил 10-копеечную монету на третье блюдо, 15-копеечную на среднее и запнулся. Куда положить 20-копеечную? Ведь она крупнее и 10-копеечной и 15-копеечной.

— Ну что же? — выручил меня брат. — Клади 10-копеечную на среднее блюдо, поверх 15-копеечной. Тогда для 20-копеечной освободится третье блюдо.

Я так и сделал. Но дальше — новое затруднение. Куда положить 50-копеечную монету? Впрочем, я скоро догадался; перенес сначала 10-копеечную на первое блюдо, 15-копеечную на третье и затем 10-копеечную тоже на третье. Теперь 50-копеечную монету можно положить на свободное среднее блюдо. Дальше, после длинного ряда перекладываний, мне удалось перенести также рублевую монету с первого блюда и, наконец, собрать всю кучку монет на третьем блюде.

— Сколько же ты проделал всех перекладываний? — спросил брат, одобряв мою работу.

— Не считал.

— Давай, сосчитаем. Интересно же знать, каким наименьшим числом ходов можно достигнуть цели. Если бы стопка состояла не из 5, а только из 2 монет — 15-копеечной и 10-копеечной, то сколько понадобилось бы ходов?

— Три: 10-копеечную на среднее блюдо, 15-копеечную — на третье и затем 10-копеечную на третье блюдо.

— Правильно. Прибавим теперь еще монету — 20-копеечную — и сосчитаем, сколькими ходами можно перенести стопку из этих монет. Поступаем так: сначала последовательно переносим меньшие две монеты на среднее блюдо. Для этого нужно, как мы уже знаем, 3 хода. Затем перекладываем 20-копеечную монету на свободное третье блюдо — 1 ход. А тогда переносим обе монеты

со среднего блюда тоже на третье — еще 3 хода. Итого всех ходов $3+1+3=7$.

— Для четырех монет число ходов позволь мне считать самому. Сначала переношу 3 меньшие монеты на среднее блюдо — 7 ходов; потом 50-копеечную на третье блюдо — 1 ход и затем снова три меньшие монеты на третье блюдо — еще 7 ходов. Итого $7+1+7=15$.

— Отлично. А для пяти монет?

— $15+1+15=31$, — сразу сообразил я.

— Ну вот ты и уловил способ вычисления. Но я покажу тебе, как можно его еще упростить. Заметь, что полученные нами числа 3, 7, 15, 31 — все представляют собой двойку, умноженную на себя один или несколько раз, но без единицы. Смотри.

И брат написал табличку:

$$\begin{aligned}3 &= 2 \times 2 - 1 \\7 &= 2 \times 2 \times 2 - 1 \\15 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 \\31 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.\end{aligned}$$

— Понимаю: сколько монет перекладывается, столько раз берется двойка множителем, а затем отнимается единица. Я мог бы теперь вычислить число ходов для любой стопки монет. Например, для 7 монет:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

— Вот ты и постиг эту старинную игру. Одно только практическое правило надо тебе еще знать: если в стопке число монет нечетное, то первую монету перекладывают на третье блюдо; если четное — то на среднее блюдо.

— Ты сказал: старинная игра. Разве не сам ты ее придумал?

— Нет, я только применил ее к монетам. Игра очень древнего происхождения и зародилась, говорят, в Индии. Существует интересная легенда, связанная с этой игрой. В городе Бенаресе будто бы имеется храм, в котором индусский бог Брама при сотворении мира установил три алмазные палочки и надел на одну из них 64 золотых кружка: самый большой внизу, а каждый следующий меньше предыдущего. Жрецы храма обязаны без устали, днем и ночью, перекладывать эти кружки с одной палочки на другую, пользуясь третьей, как вспомогательной, и



Рис. 57. «Жрецы обязаны без усталости перекладывать кружки».

соблюдая правила нашей игры; переносить за один раз только один кружок и не класть большего на меньший. Легенда говорит, что когда будут перенесены все 64 кружка, наступит конец мира.

— О, значит, мир давно уже должен был погибнуть, если верить этому преданию!

— Ты думаешь, кажется, что перенесение 64 кружков не должно отнять много времени?

— Конечно. Делая каждую секунду один ход, можно ведь в час успеть проделать 3600 перенесений.

— Ну и что же?

— А в сутки — около ста тысяч. В десять дней — миллион ходов. Миллионом же ходов можно, я уверен, перенести хоть тысячу кружков.

— Ошибаешься. Чтобы перенести всего 64 кружка, нужно уже круглым счетом 500 миллиардов лет!

— Но почему это? Ведь число ходов равно только произведению 64 двоек без единицы, а это составляет... погоди, я сейчас перемножу!

— Прекрасно. А пока будешь умножать, я успею сходить по своим делам.

И брат ушел, оставив меня погруженным в выкладки. Я нашел сначала произведение 16 двоек, затем умножил этот результат — 65 536 — сам на себя, а то, что получилось, — снова на себя. Потом не забыл отнять единицу.

У меня получилось такое число:

18 446 744 073 709 551 615 *).

Брат, значит, был прав...

Вам, вероятно, интересно было бы знать, какими числами в действительности определяется возраст мира. Ученые располагают на этот счет некоторыми, — конечно, лишь приблизительными — данными:

Солнце существует	5 000 000 000 000 лет.
Земной шар	3 000 000 000 » .
Жизнь на Земле	1 000 000 000 » .
Человек	не менее 500 000 » .

67. Пари. В столовой дома отдыха зашла за обедом речь о том, как вычисляется вероятность событий. Молодой математик, оказавшийся среди обедающих, вынул монету и сказал:

— Кидаю на стол монету, не глядя. Какова вероятность, что она упадет гербом вверх?

— Объясните сначала, что значит «вероятность», — раздался голоса. — Не всем ясно.

— О, это очень просто! Монета может лечь на стол двояко (рис. 58): вот так — гербом вверх и вот так — гербом вниз.

Всех случаев здесь возможно только два. Из них для интересующего нас события благоприятен лишь один случай. Теперь находим отношение

$$\frac{\text{числа благоприятных случаев}}{\text{к числу возможных случаев}} = \frac{1}{2}.$$

Дробь $\frac{1}{2}$ и выражает «вероятность» того, что монета упадет гербом вверх.

— С монетой-то просто, — вмешался кто-то. — А вы рассмотрите случай посложней, с игральной костью, например.

— Давайте, рассмотрим, — согласился математик. — У нас игральная кость, кубик с цифрами на гранях (рис. 59). Какова вероятность, что брошенный кубик упадет определенной цифрой вверх, скажем — вскрыется

*) Читателю уже знакомо это число: оно определяет награду, затребованную изобретателем шахматной игры.

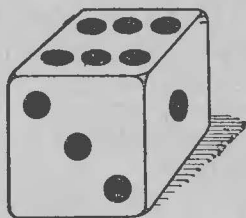


Рис. 58. «Мопета может лечь на стол
двойкою».

Рис. 59. Игральная
кость.

шестеркой? Сколько здесь всех возможных случаев? Кубик может лечь на любую из своих шести граней; значит, возможно всего 6 случаев. Из них благоприятен нам только один: когда вверху шестерка. Итак, вероятность получится от деления 1 на 6. Короче сказать, она выражается дробью $\frac{1}{6}$.

— Неужели можно вычислить вероятность во всех случаях? — спросила одна из отдыхающих. — Возьмите такой пример. Я загадала, что первый прохожий, которого мы увидим из окна столовой, будет мужчина. Какова вероятность, что я отгадала?

— Вероятность, очевидно, равна половине, если только мы условимся и годовалого мальчика считать за мужчину. Число мужчин на свете равно числу женщин.

— А какова вероятность, что первые двое прохожих окажутся оба мужчины? — спросил один из отдыхающих.

— Этот расчет немногим сложнее. Перечислим, какие здесь вообще возможны случаи. Во-первых, возможно, что оба прохожих будут мужчины. Во-вторых, что сначала покажется мужчина, за ним женщина. В-третьих, наоборот: что раньше появится женщина, потом мужчина. И, наконец, четвертый случай: оба прохожих — женщины. Итак, число всех возможных случаев — 4. Из них благоприятен, очевидно, только один случай — первый. Получаем для вероятности дробь $\frac{1}{4}$. Вот ваша задача и решена.

— Понятно. Но можно поставить вопрос и о трех мужчинах: какова вероятность, что первые трое прохожих все окажутся мужчинами?

— Что же, вычислим и это. Начнем опять с подсчета возможных случаев. Для двоих прохожих число всех случаев равно, мы уже знаем, четырем. С присоединением третьего прохожего число возможных случаев увеличивается вдвое, потому что к каждой из 4 перечисленных группировок двух прохожих может присоединиться либо мужчина, либо женщина. Итого, всех случаев возможно здесь $4 \times 2 = 8$. А искомая вероятность, очевидно, равна $\frac{1}{8}$, потому что благоприятен событию только 1 случай. Здесь легко подметить правило подсчета: в случае двух прохожих мы имели вероятность $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; в случае трех $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; в случае четырех вероятность равна произведению четырех половинок и т. д. Вероятность все уменьшается, как видите.

— Чему же она равна, например, для десятка прохожих?

— То есть какова вероятность, что первые десять прохожих все подряд окажутся мужчинами? Вычислим, как велико произведение десяти половинок. Это $\frac{1}{1024}$, менее одной тысячной доли. Значит, если вы бьетесь о заклад, что это случится, и ставите 1 рубль, то я могу поставить 1000 рублей за то, что этого не произойдет.

— Выгодное пари! — заявил чей-то голос. — Я бы охотно поставил рубль, чтобы получить возможность выиграть целую тысячу.

— Но имеется тысяча шансов против вашего одного, учтите и это.

— Ничего не значит. Я бы рискнул рублем против тысячи даже и за то, что сотня прохожих окажутся все подряд мужчинами.

— А вы представляете себе, как мала вероятность такого события? — спросил математик.

— Одна миллионная или что-нибудь в этом роде?

— Неизмеримо меньше! Миллионная доля получится уже для 20 прохожих. Для сотни прохожих будем иметь... Дайте-ка, я прикину на бумажке. Биллионная... Триллионная... Квадриллионная... Ого! Единица с тридцатью нулями!

— Только всего?

— Вам мало 30 пулей? В океане нет и тысячной доли такого числа мельчайших капелек.

— Внушительное число, что и говорить! Сколько же вы поставите против моего рубля?

— Ха-ха!... Все! Все, что у меня есть.

— Все — это слишком много. Ставьте на кон ваш велосипед. Ведь не поставите?

— Почему же нет? Пожалуйста! Пусть велосипед, если желаете. Я несколько не рискую.

— И я не рискую. Не велика сумма рубль. Зато могу выиграть велосипед, а вы почти ничего.

— Да поймите же, что вы наверняка проиграете! Велосипед никогда вам не достанется, а рубль ваш можно сказать уже в моем кармане.

— Что вы делаете! — удерживал математика приятель. — Из-за рубля рискуете велосипедом. Безумие!

— Напротив, — ответил математик, — безумие ставить хотя бы один рубль при таких условиях. Верный ведь проигрыш! Уже лучше прямо выбросить рубль.

— Но один-то шанс все же имеется?

— Одна капля в целом океане. В десяти океанах! Вот ваш шанс. А за меня десять океанов против одной капельки. Мой выигрыш так же верен, как дважды два — четыре.

— Увлекаетесь, молодой человек, — раздался спокойный голос старика, все время молча слушавшего спор. — Увлекаетесь...

— Как? И вы, профессор, рассуждаете по-обывательски?

— Подумали ли вы о том, что не все случаи здесь равновозможны? Расчет вероятности правилен лишь для каких событий? Для равновозможных, не так ли? А в рассматриваемом примере... Впрочем, — сказал старик, прислушиваясь, — сама действительность, кажется, сейчас разъяснит вам вашу ошибку. Слышна военная музыка, не правда ли?

— При чем тут музыка?.. — начал было молодой математик и осекся. На лице его выразился испуг. Он сорвался с места, бросился к окну и высунул голову.

— Так и есть! — донесся его унылый возглас. — Проиграно пари! Прощай мой велосипед...

Через минуту всем стало ясно, в чем дело. Мимо окон проходил батальон солдат.

68. Числовые великаны вокруг и внутри нас. Нет надобности приискивать исключительные положения, чтобы встретиться с числовыми великанами. Они присутствуют всюду вокруг и даже внутри нас самих — надо лишь уметь рассмотреть их. Небо над головой, песок под ногами, воздух вокруг нас, кровь в нашем теле — все скрывает в себе невидимых великанов из мира чисел.

Числовые исполины небесных пространств для большинства людей не являются неожиданными. Хорошо известно, что зайдет ли речь о числе звезд вселенной, об их расстояниях от нас и между собою, об их размерах, весе, возрасте — во всех случаях мы неизменно встречаемся с числами, подавляющими воображение своей огромностью. Недаром выражение «астрономическое число» сделалось крылатым. Многие, однако, не знают, что даже и те небесные тела, которые астрономы часто называют «маленькими», оказываются настоящими великанами, если применить к ним привычную земную мерку. Существуют в нашей солнечной системе планеты, которые, ввиду их незначительных размеров, получили у астрономов наименование «малых». Среди них имеются и такие, поперечник которых равен нескольким километрам. В глазах астронома, привыкшего к исполинским масштабам, они так малы, что, говоря о них, он пренебрежительно называет их «крошечными». Но они представляют собой «крошечные» тела только рядом с другими небесными светилами, еще более огромными: на обычную же человеческую мерку они далеко не миниатюрны. Возьмем такую «крошечную» планету с диаметром 3 км. По правилам геометрии легко рассчитать, что поверхность такого тела включает 28 кв. км, или 28 000 000 кв. м. На 1 кв. м может поместиться стоя человек 7. Как видите, на 28 миллионах кв. м найдется место для 196 миллионов человек.

Песок, попираемый нами, также вводит нас в мир числовых исполинов. Недаром сложилось издавна выражение: «бесчисленны, как песок морской». Впрочем, древние недооценивали многочисленность песка, считая ее одинаковой с многочисленностью звезд. Встарину не было телескопов, а простым глазом мы видим на небе всего около 3500 звезд (в одном полушарии). Песок на морском берегу в миллионы раз многочисленнее, чем звезды, доступные невооруженному зрению.

Величайший числовой гигант скрывается в том воздухе, которым мы дышим. Каждый кубический сантиметр воздуха, каждый наперсток заключает в себе 27 квинтиллионов (т. е. 27 с 18 нулями) мельчайших частиц, называемых «молекулами».

Невозможно даже представить себе, как велико это число. Если бы на свете было столько людей, для них буквально недостало бы места на нашей планете. В самом деле: поверхность земного шара, считая все его материк и океаны, — равна 500 миллионам кв. км. Раздробив в квадратные метры, получим

500 000 000 000 000 кв. м.

Поделим 27 квинтиллионов на это число, и мы получим 54 000. Это означает, что на каждый квадратный метр земной поверхности приходилось бы более 50 тысяч человек!

Было упомянуто раньше, что числовые великаны скрываются и внутри человеческого тела. Покажем это на примере нашей крови. Если каплю ее рассмотреть под микроскопом, то окажется, что в ней плавают огромное множество чрезвычайно мелких телец красного цвета, которые и придают крови ее окраску. Каждое такое «красное кровяное тельце» имеет форму крошечной круглой подушечки, посредине вдавленной (рис. 60). Все они у человека примерно одинаковых размеров и имеют в поперечнике около 0,007 мм, а толщину — 0,002 мм. Зато число их огромно. В крошечной капельке крови, объемом 1 куб. мм, их заключается 5 миллионов. Сколько же их всего в нашем теле? В теле человека примерно в 14 раз меньше литров крови, чем килограммов в его весе. Если вы весите 40 кг, то крови в вашем теле около 3 литров, или 3 000 000 куб. мм. Так как каждый куб. мм заключает 5 миллионов красных телец, то общее число их в вашей крови:

$$5\ 000\ 000 \times 3\ 000\ 000 = 15\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

15 триллионов кровяных телец! Какую длину займет эта армия кружочков, если выложить ее в ряд один к

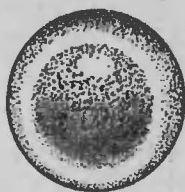


Рис. 60.

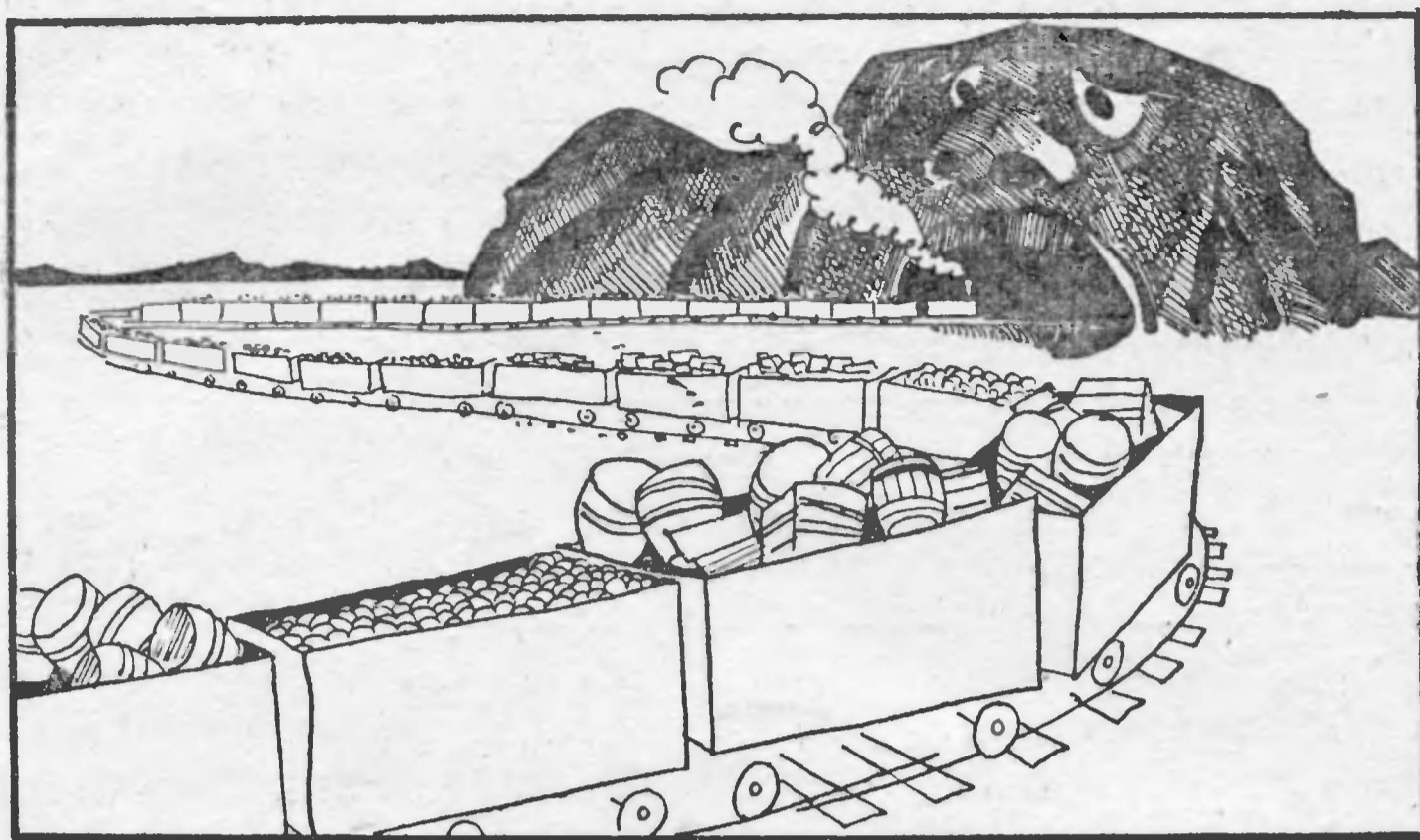


Рис. 61. Сколько съедает человек в течение жизни.

другому? Нетрудно рассчитать, что длина такого ряда была бы 105 000 км. Более чем на сто тысяч километров растянулась бы нить из красных телец вашей крови. Ею можно было бы обмотать земной шар по экватору:

$$100\ 000 : 40\ 000 = 2,5 \text{ раза,}$$

а нитью из кровяных шариков в з р о с л о г о человека — три раза.

Объясним, какое значение для нашего организма имеет такое измельчение кровяных телец. Назначение этих телец — разносить кислород по всему телу. Они захватывают кислород, когда кровь проходит через легкие, и вновь выделяют его, когда кровяной поток заносит их в ткани нашего тела, в его самые удаленные от легких уголки. Сильное измельчение этих телец способствует выполнению ими этого назначения, потому что чем они мельче, при огромной численности, тем больше их поверхность, а кровяное тельце может поглощать и выделять кислород только со своей поверхности. Расчет показывает, что общая поверхность их во много раз превосходит поверхность человеческого тела и равна 1200 кв. м. Такую площадь имеет большой огород в 40 м длины и 30 м ширины. Теперь вы понимаете, до какой степени важно для жизни организма то, что кровяные тельца

сильно раздроблены и так многочисленны: они могут захватывать и выделять кислород на поверхности, которая в тысячу раз больше поверхности нашего тела.

Числовым великаном по справедливости следует назвать и тот внушительный итог, который получился бы, если бы вы подсчитали, сколько всякого рода пищи поглощает человек за 70 лет средней жизни. Целый железнодорожный поезд понадобился бы для перевозки тех тонн воды, хлеба, мяса, дичи, рыбы, картофеля и других овощей, тысяч яиц, тысяч литров молока и т. д., которые человек успевает поглотить в течение своей жизни. Рис. 61 дает наглядное представление об этом неожиданно большом итоге, более чем в тысячу раз превышающем по весу человеческое тело. При виде его не веришь, что человек может справиться с таким исполином, буквально проглатывая — правда, не разом — груз длинного товарного поезда.

Без мерной линейки

69. Измерение пути шагами. Мерная линейка или лента не всегда оказывается под руками, и полезно уметь обходиться как-нибудь без них, производя хотя бы приблизительные измерения.

Мерить более или менее длинные расстояния, например во время экскурсий, проще всего шагами. Для этого нужно знать длину своего шага и уметь шаги считать. Конечно, они не всегда одинаковы: мы можем делать мелкие шаги, можем при желании шагать и широко. Но все же при обычной ходьбе мы делаем шаги приблизительно одной длины, и если знать среднюю их длину, то можно без большой ошибки измерять расстояния шагами.

Чтобы узнать длину своего среднего шага, надо измерить длину многих шагов вместе и вычислить отсюда длину одного. При этом, разумеется, нельзя уже обойтись без мерной ленты или шнура.

Вытяните ленту на ровном месте и отмерьте расстояние в 20 м. Прочертите эту линию на земле и уберите ленту. Теперь пройдите по линии обычным шагом и сосчитайте число сделанных шагов. Возможно, что шаг не уложится целое число раз на отмеренной длине. Тогда, если остаток короче половины длины шага, его можно просто откинуть; если же длиннее полушага, остаток считают за целый шаг. Разделив общую длину 20 м на число шагов, получим среднюю длину одного шага. Это число надо запомнить, чтобы, когда придется, пользоваться им для промеров.

Чтобы при счете шагов не сбиться, можно — особенно на длинных расстояниях — вести счет следующим образом. Считают шаги только до 10; досчитав до этого числа, загибают один палец левой руки. Когда все пальцы левой руки загнуты, т. е. пройдено 50 шагов, загибают один

палец на правой руке. Так можно вести счет до 250, после чего начинают сызнова, запоминая, сколько раз были загнуты все пальцы правой руки. Если, например, пройдя некоторое расстояние, вы загнули все пальцы правой руки два раза и к концу пути у вас окажутся загнутыми на правой руке 3 пальца, а на левой 4, то вами сделано было шагов

$$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690.$$

Сюда нужно прибавить еще те несколько шагов, которые сделаны после того, как был загнут в последний раз палец левой руки.

Отметим попутно следующее старое правило: длина среднего шага взрослого человека равна половине расстояния его глаз от ступней.

Другое старинное практическое правило относится к скорости ходьбы: человек проходит в час столько километров, сколько шагов делает он в 3 сек. Легко показать, что правило это верно лишь для определенной длины шага и притом для довольно большого шага. В самом деле: пусть длина шага x м, а число шагов в 3 сек. равно n . Тогда в 3 сек. пешеход делает nx м, а в час (3600 сек.) — $1200 nx$ м, или $1,2 nx$ км. Чтобы путь этот равнялся числу шагов, делаемых в 3 сек., должно существовать равенство: $1,2nx = n$ или $1,2x = 1$, откуда

$$x = 0,83 \text{ м.}$$

Если верно предыдущее правило о зависимости длины шага от роста человека, то второе правило, сейчас рассматриваемое, оправдывается только для людей среднего роста — около 175 см.

70. Живой масштаб. Для обмера предметов средней величины, не имея под рукой метровой линейки или ленты, можно поступать так. Надо натянуть веревочку или палку от конца протянутой в сторону руки до противоположного плеча — это и есть у взрослого мужчины приблизительная длина метра. Другой способ получить примерную длину метра состоит в том, чтобы отложить по прямой линии 6 «четвертей», т. е. 6 расстояний между концами большого и указательного пальцев, расставленных как можно шире (рис. 62, а).

Последнее указание вводит нас в искусство мерить «голыми руками»: для этого необходимо лишь предвари-

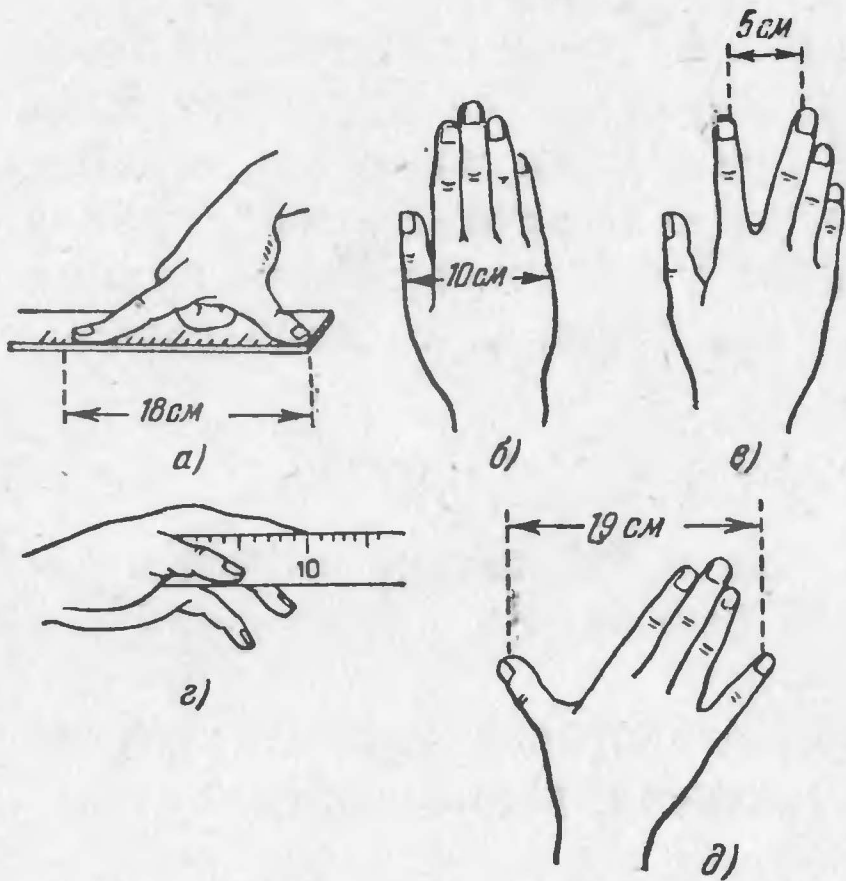


Рис. 62. Что надо измерить на своей руке, чтобы обходиться потом без мерной ленты.

нутых возможно шире (рис. 62, в). Далее, полезно знать длину своего указательного пальца, считая от основания большого пальца, как указано на рис. 62, г. И, наконец, измерьте расстояние концов большого пальца и мизинца, когда они широко расставлены, как на рис. 62, д.

Пользуясь этим «живым масштабом», вы можете производить приблизительные измерения мелких предметов.

71. Измерение при помощи монет. Хорошую службу также могут сослужить наши медные (бронзовые) монеты современной чеканки. Не многим известно, что поперечник копеечной монеты в точности равен $1\frac{1}{2}$ см, а пятака — $2\frac{1}{2}$ см, так что положенные рядом обе монеты дают 4 см (рис. 63). Значит, если у вас имеется при себе несколько медных монет, то вы сможете довольно точно наметить следующие длины:

Копейка	$1\frac{1}{2}$ см.
Пятак	$2\frac{1}{2}$ » .
Две копеечные монеты	3 » .
Пятак и копейка	4 » .
Два пятака	5 » .
и т. д.	

тельно измерить кисть своей руки и твердо запомнить результаты промеров.

Что же надо измерить в кисти своей руки? Прежде всего ширину ладони, как показано на нашем рис. 62, б. У взрослого человека она равна примерно 10 см; у вас она, быть может, меньше, и вы должны знать на сколько именно меньше. Затем нужно измерить, как велико у нас расстояние между концами среднего и указательного пальцев, раздвинутых возможно шире (рис. 62, в). Далее, полезно



Рис. 63. Пятак и копейка, положенные рядом, составляют 4 см.



Рис. 64. Трехкопеечная и двухкопеечная монеты, положенные рядом, составляют 4 см.

Отняв от ширины пятака ширину копеечной монеты, получите ровно 1 см.

Если пятака и копейки при вас не окажется, а будут только 2-копеечная и 3-копеечная монеты, то и они могут до известной степени выручить вас, если запомните твердо, что положенные рядом обе монеты дают 4 см (рис. 64). Согнув 4-сантиметровую бумажную полоску пополам и затем еще раз пополам, получите масштаб из 4 см *).

Вы видите, что при известной подготовке и находчивости вы и без мерной линейки можете производить годные для практики измерения.

К этому полезно будет прибавить еще, что наши медные (бронзовые) монеты могут служить при необходимости не только масштабом, но и удобным разновесом для отвешивания грузов. Новые, не потертые медные монеты современной чеканки весят столько граммов, сколько обозначено на них копеек: копеечная монета — 1 г, 2-копеечная — 2 г и т. д. Вес монет, бывших в употреблении, незначительно отстает от этих норм. Так как в обиходе часто не бывает под рукой именно мелких разновесок в 1—10 г, то знание только что указанных соотношений может весьма пригодиться.

*) Поперечник 15-копеечной монеты приблизительно равен 2 см, но только приблизительно: истинный диаметр этой монеты 19,56 мм. Между тем указанные выше размеры медных монет современного чекана верны в точности. У кого есть штангенциркуль, тот легко может в этом убедиться.

Г еометрические ГОЛОВОЛОМКИ

Для разрешения собранных в этой главе головоломок не требуется знания полного курса геометрии. С ними в силах справиться и тот, кто знаком лишь со скромным кругом начальных геометрических сведений. Две дюжины предлагаемых здесь задач помогут читателю удостовериться, действительно ли владеет он теми геометрическими знаниями, которые считает усвоенными. Подлинное знание геометрии состоит не только в умении перечислять свойства фигур, но и в искусстве распорядиться ими на практике для решения реальных задач. Что проку в ружье для человека, не умеющего стрелять?

Пусть же читатель проверит, сколько метких попаданий окажется у него из 24 выстрелов по геометрическим мишеням.

72. Телега. Почему передняя ось телеги больше стирается и чаще загорается, чем задняя?

73. В увеличительное стекло. Угол в $1\frac{1}{2}^\circ$ рассматривают в лупу, увеличивающую в 4 раза. Какой величины покажется угол (рис. 66)?

74. Плотничий уровень. Вам знаком, конечно, плотничий уровень с газовым пузырьком (рис. 67), отходящим

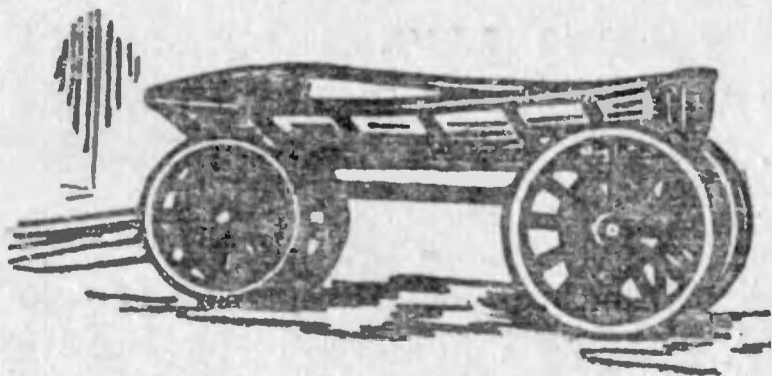


Рис. 65. Почему передняя ось больше стирается, чем задняя?

в сторону от метки, когда основание уровня имеет наклон. Чем больше этот наклон, тем больше отодвигается пузырек от средней метки. Причина движения пузырька та, что, будучи легче жидкости, в которой он находится, он всплывает вверх. Но если

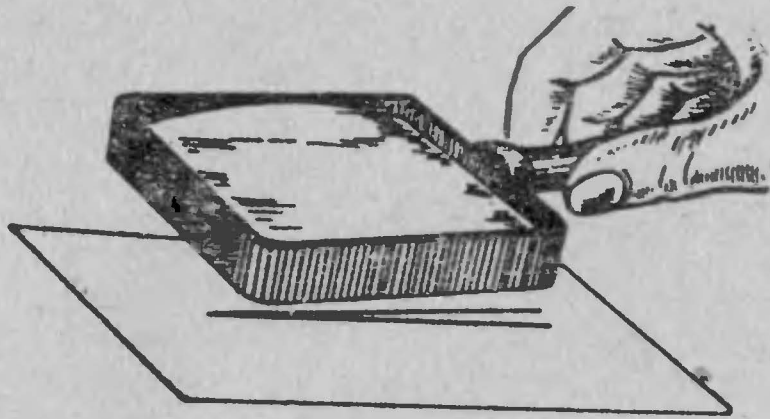


Рис. 66. Какой величины покажется угол?



Рис. 67. Плотничий уровень.

бы трубка была прямая, пузырек при малейшем наклоне отбегал бы до самого конца трубки, т. е. до наиболее высокой ее части. Такой уровень, как легко понять, был бы на практике очень неудобен. Поэтому трубка уровня берется изогнутая, как показано на рис. 67. При горизонтальном положении основания такого уровня пузырек, занимая высшую точку трубки, находится у ее середины; если же уровень наклонен, то высшей точкой трубки становится уже не ее середина, а некоторая соседняя с ней точка, и пузырек отодвигается от метки на другое место трубки.

Вопрос задачи состоит в том, чтобы определить, на сколько миллиметров отодвинется от метки пузырек, если уровень наклонен на полградуса, а радиус дуги изгиба трубки — 1 м.

75. Число граней. Вот вопрос, который, без сомнения, покажется многим слишком наивным или, напротив, чересчур хитроумным:

Сколько граней у шестигранного карандаша?

Раньше чем заглянуть в ответ, внимательно вдумайтесь в задачу.

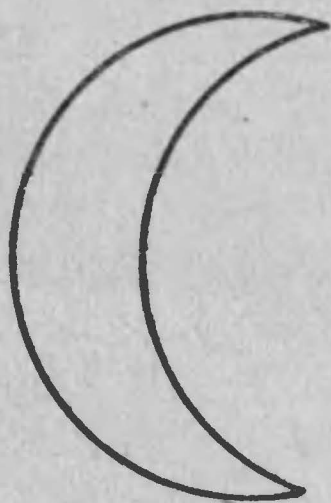


Рис. 68. Лунный серп.

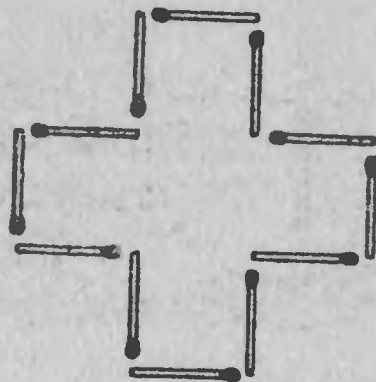


Рис. 69. Крест из 12 спичек.

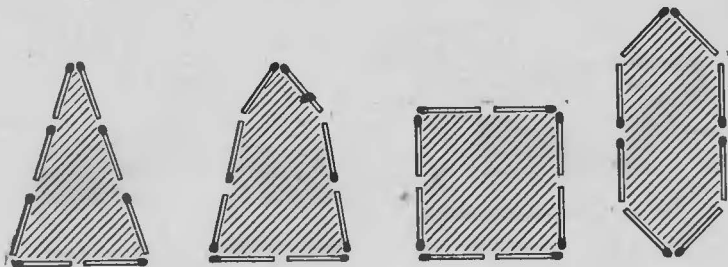


Рис. 70. Как из 8 спичек сложить фигуру наибольшей площади?

76. Лунный серп. Фигуру лунного серпа (рис. 68) требуется разделить на 6 частей, проведя всего только 2 прямые линии.

Как это сделать?

77. Из 12 спичек. Из 12 спичек можно составить фигуру креста (рис. 69), площадь которого равна 5 «спичечным» квадратам.

Измените расположение спичек так, чтобы контур фигуры охватывал площадь, равную только 4 «спичечным» квадратам.

Пользоваться при этом услугами измерительных приборов нельзя.

78. Из 8 спичек. Из 8 спичек можно составить довольно разнообразные замкнутые фигуры. Некоторые из них представлены на рис. 70; площади их, конечно, различны. Задача состоит в том, чтобы составить из 8 спичек фигуру, охватывающую наибольшую площадь.

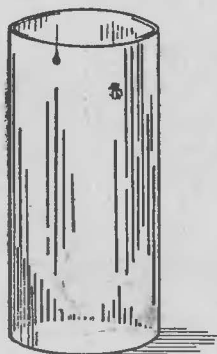


Рис. 71. Укажите мухе путь к капле меда.

79. Путь мухи. На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки виднеется капля меда в трех сантиметрах от верхнего края сосуда. А на наружной стенке, в точке, диаметрально противоположной, уселась муха (рис. 71).

Укажите мухе кратчайший путь, по которому она может добежать до медовой капли.

Высота банки 20 см; диаметр — 10 см.



Рис. 72. Найдите одну затычку к этим трем отверстиям.

Рис. 73. Существует ли одна затычка для этих отверстий?

Рис. 74. Можно ли для этих трех отверстий изготовить одну затычку?

Не полагайтесь на то, что муха сама отыщет кратчайший путь и тем облегчит вам решение задачи: для этого ей нужно было бы обладать геометрическими познаниями, слишком обширными для мушиной головы.

80. Найти затычку. Перед вами дощечка (рис. 72) с тремя отверстиями: квадратным, треугольным и круглым. Может ли существовать одна затычка такой формы, чтобы закрывать все эти отверстия?

81. Вторая затычка. Если вы справились с предыдущей задачей, то, быть может, вам удастся найти затычку и для таких отверстий, какие показаны на рис. 73?

82. Третья затычка. Наконец, еще задача в том же роде: существует ли одна затычка для трех отверстий рис. 74?

83. Продеть пятак. Запаситесь двумя монетами современного чекана: 5-копеечной и 2-копеечной. На листке бумаги сделайте кружок, в точности равный окружности 2-копеечной монеты, и аккуратно вырежьте его.

Как вы думаете: пролезет пятак через эту дыру?

Здесь нет подвоха: задача подлинно геометрическая.

84. Высота башни. В вашем городе есть достопримечательность — высокая башня, высоты которой вы, однако, не знаете. Имеется у вас и фотографический снимок башни на почтовой карточке. Как может этот снимок помочь вам узнать высоту башни?

85. Подобные фигуры. Эта задача предназначается для тех, кто знает, в чем состоит геометрическое подобие. Требуется ответить на следующие два вопроса:

1. В фигуре чертежного треугольника (рис. 75) подобны ли наружный и внутренний треугольники?

2. В фигуре рамки (рис. 76) подобны ли наружный и внутренний четырехугольники?

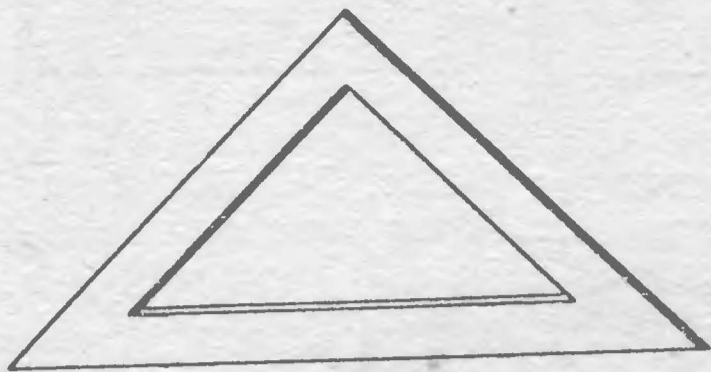


Рис. 75. Подобны ли наружный и внутренний треугольники?



Рис. 76. Подобны ли наружный и внутренний четырехугольники?

86. Тень проволоки. Как далеко в солнечный день тянется в пространстве полная тень, отбрасываемая телеграфной проволокой, диаметр которой 4 мм?

87. Кирпичик. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

88. Великан и карлик. Во сколько примерно раз великан ростом в 2 м тяжелее карлика ростом в 1 м?

89. Два арбуза. На колхозном рынке продаются два арбуза разных размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в $1\frac{1}{2}$ раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

90. Две дыни. Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая — 50 см. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

91. Вишня. Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

92. Модель башни Эйфеля. Башня Эйфеля в Париже, 300 м высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8 000 000 кг. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, весящую всего только 1 кг.

Какой она будет высоты? Выше стакана или ниже?

93. Две кастрюли. Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй.

Во сколько раз она тяжелее?

94. На морозе. На морозе стоят взрослый человек и ребенок, оба одетые одинаково.

Кому из них холоднее?

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК 72— 94

72. На первый взгляд задача эта кажется не относящейся вовсе к геометрии. Но в том-то и состоит овладение этой наукой, чтобы уметь обнаруживать геометрическую основу задачи там, где она замаскирована посторонними подробностями. Наша задача по существу безусловно геометрическая; без знания геометрии ее не решить.

Итак, почему же передняя ось телеги стирается больше задней? Всем известно, что передние колеса меньше задних. На одном и том же расстоянии малый круг оборачивается большее число раз, чем круг покрупнее: у меньшего круга и окружность меньше — оттого она укладывается в данной длине большее число раз. Теперь понятно, что при всех поездках телеги передние ее колеса делают больше оборотов, нежели задние, а большее число оборотов, конечно, сильнее стирает ось.

73. Если вы полагаете, что в луцу угол наш окажется величиною в $1\frac{1}{2} \times 4 = 6^\circ$, то дали промах. Величина угла несколько не увеличивается при рассматривании его в луцу. Правда, длина дуги, стягивающей угол, несомненно увеличивается, — но во столько же раз увеличивается и радиус этой дуги, так что величина центрального угла остается без изменения. Рис. 77 поясняет сказанное.

74. Рассмотрите рис. 78, где MAN есть первоначальное положение дуги уровня, $M'BN'$ — новое ее положение, причем хорда $M'N'$ составляет с хордой MN угол в $\frac{1}{2}^\circ$. Оба положения уровня подобраны так, что пузырек, бывший раньше в точке A , теперь остался в той же точке, но середина дуги MN переместилась в B . Требуется вычис-



Рис. 77.

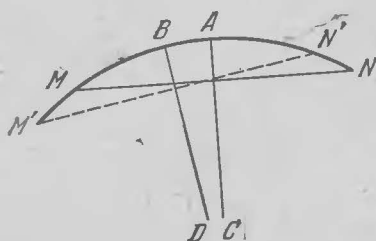


Рис. 78.

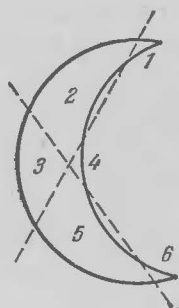


Рис. 79.

лить длину дуги AB , если радиус ее равен 1 м, а величина дуги в градусной мере $\frac{1}{2}^\circ$ (это следует из равенства острых углов с перпендикулярными сторонами).

Вычисление не сложно. Длина полной окружности радиусом в 1 м (1000 мм) равна $2 \times 3,14 \times 1000 = 6280$ мм. Так как в окружности 360° или 720 полуградусов, то длина одного полуградуса определяется делением

$$6280 : 720 = 8,7 \text{ мм.}$$

Пузырек отодвинется от метки примерно на 9 мм — почти на целый сантиметр. Легко видеть, что чем больше радиус кривизны трубки, тем уровень чувствительнее.

75. Задача вовсе не шуточная и вскрывает ошибочность обычного словоупотребления. У «шестигранного» карандаша не 6 граней, как, вероятно, полагает большинство. Всех граней у него — если он не очинен — 8; шесть боковых и еще две маленькие «торцовые» грани. Будь у него в действительности 6 граней, он имел бы совсем иную форму — бруска с четырехугольным сечением.

Привычка считать у призм только боковые грани, забывая об основаниях, очень распространена. Многие говорят: *трехгранная призма, четырехгранная призма* и т. д., между тем как призмы эти надо называть: *треугольная, четырехугольная* и т. д. — по форме основания. Трехгранной призмы, т. е. призмы о трех гранях, даже и не существует.

Поэтому карандаш, о котором говорится в задаче, правильно называть не шестигранным, а шестиугольным.

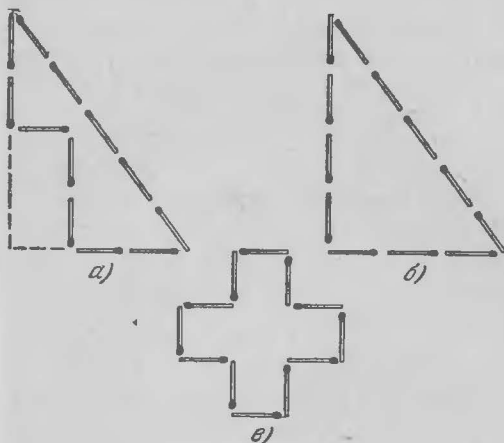


Рис. 80.

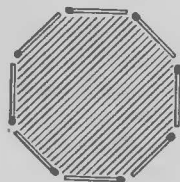


Рис. 81.

76. Сделать надо так, как показано на рис. 79. Получаются 6 частей, которые для наглядности перенумерованы.

77. Спички следует расположить, как показано на рис. 80, а; площадь этой фигуры равна учетверенной площади «спичечного» квадрата. Как в этом удостовериться? Дополним мысленно нашу фигуру до треугольника. Получится прямоугольный треугольник, основание которого равно 3, а высота 4 спичкам*). Площадь его равна половине произведения основания на высоту: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ квадратам со стороной в одну спичку (рис. 80, б). Но наша фигура имеет, очевидно, площадь, которая меньше площади треугольника на 2 «спичечных» квадрата и равна, следовательно, 4 таким квадратам.

78. Можно доказать, что среди всех фигур с контуром одной и той же длины (или, как говорят, с одинаковым периметром) наибольшую площадь имеет круг. Из спичек, конечно, не сложить круга; однако, можно составить из 8 спичек фигуру (рис. 81), всего более приближающуюся к кругу: это — правильный восьмиугольник. Правильный восьмиугольник и есть фигура, удовлетворяющая требованию нашей задачи: она имеет наибольшую площадь.

*) Читатели, знакомые с так называемой «Пифагоровой теоремой», поймут, почему мы с уверенностью можем утверждать, что получающийся здесь треугольник — прямоугольный: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

79. Для решения задачи развернем боковую поверхность цилиндрической банки в плоскую фигуру: получим прямоугольник (рис. 82), высота которого 20 см, а основание равно окружности банки, т. е. $10 \times 3\frac{1}{7} = 31\frac{1}{2}$ см (без малого). Наметим на этом прямоугольнике положение мухи и медовой капли. Муха — в точке *A*, на расстоянии 17 см от основания; капля — в точке *B*, на той же высоте и в расстоянии полуокружности банки от *A*, т. е. в $15\frac{3}{4}$ см.

Чтобы найти теперь точку, в которой муха должна переползти край банки, поступим следующим образом. Из точки *B* (рис. 83) проведем прямую под прямым углом к верхней стороне прямоугольника и продолжим ее на равное расстояние: получим точку *C*. Эту точку соединим прямой линией с *A*. Точка *D* и будет та, где муха должна переползти на другую сторону банки, а путь *ADB* окажется самым коротким.

Найдя кратчайший путь на развернутом прямоугольнике, свернем его снова в цилиндр и узнаем, как должна бежать муха, чтобы скорее добраться до капли меда (рис. 84).

Избирают ли мухи в подобных случаях такой путь — мне не известно. Возможно, что, руководясь обонянием, муха действительно пробегает по кратчайшему пути, — но мало вероятно: обоняние для этого — недостаточно четкое чувство.

80. Нужная в данном случае затычка существует. Она имеет форму, показанную на рис. 85. Легко видеть, что одна такая затычка действительно может закрыть и квадратное, и треугольное, и круглое отверстия.

81. Существует затычка и для тех дыр, которые изображены на рис. 86: круглой, квадратной и крестообразной. Она представлена в трех положениях.

82. Существует и такая затычка: вы можете видеть ее с трех сторон на рис. 87.

(Задачи, которыми мы сейчас занимались, приходится нередко разрешать чертежникам, когда по трем «проекциям» какой-нибудь машинной части они должны установить ее форму.)

83. Как ни странно, но продеть пятак через такое маленькое отверстие вполне возможно. Надо только суметь взяться за это дело. Бумажку изгибают так, что круглое отверстие вытягивается в прямую щель (рис. 88): через эту щель и проходит пятак.

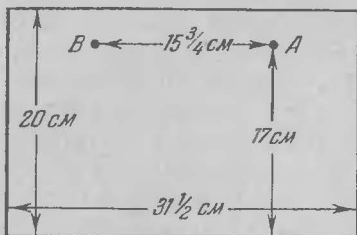


Рис. 82.

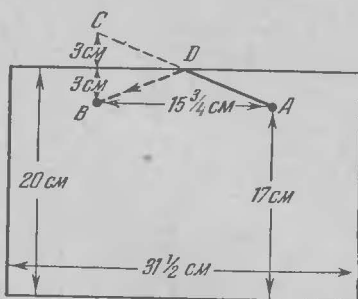


Рис. 83.

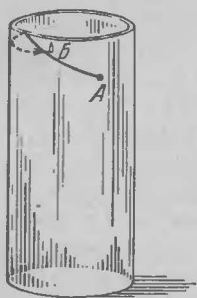


Рис. 84.



Рис. 85.



Рис. 86.



Рис. 87.

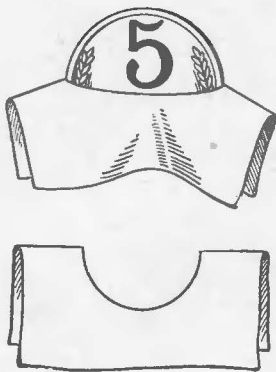


Рис. 88.

Геометрический расчет поможет понять этот на первый взгляд замысловатый трюк. Диаметр двухкопеечной монеты — 18 мм; окружность ее, как легко вычислить, равна 56 мм (с лишком). Длина прямой щели должна быть, очевидно, вдвое меньше окружности отверстия, и, следовательно, равна 28 мм. Между тем, поперечник пятака всего 25 мм; значит он может пролезть через 28-миллиметровую щель, даже принимая в расчет его толщину ($1\frac{1}{2}$ мм).

84. Чтобы по снимку определить высоту башни в натуре, нужно

прежде всего измерить возможно точнее высоту башни и длину ее основания на фотографическом изображении. Предположим, высота на снимке 95 мм, а длина основания — 19 мм. Тогда вы измеряете длину основания башни в натуре; допустим, она оказалась равной 14 м.

Сделав это, вы рассуждаете так.

Фотография башни и ее подлинные очертания геометрически подобны друг другу. Следовательно, во сколько раз изображение высоты больше изображения основания, во столько же раз высота башни в натуре больше длины ее основания. Первое отношение равно $95 : 19$, т. е. 5; отсюда заключаете, что высота башни больше длины ее основания в 5 раз и равна в натуре $14 \times 5 = 70$ м.

Итак, высота городской башни 70 м.

Надо заметить, однако, что для фотографического определения высоты башни пригоден не всякий снимок, а только такой, в котором пропорции не искажены, как это бывает у неопытных фотографов.

85. Часто на оба поставленных в задаче вопроса отвечают утвердительно. В действительности же подобны только треугольники; наружный же и внутренний четырехугольники в фигуре рамки, вообще говоря, не подобны. Для подобия треугольников достаточно равенства углов; а так как стороны внутреннего треугольника параллельны сторонам наружного, то фигуры эти подобны. Но для подобия прочих многоугольников недостаточно одного



Рис. 89.



Рис. 90.

равенства углов (или — что то же самое — одной лишь параллельности сторон): необходимо еще, чтобы стороны многоугольников были пропорциональны. Для наружного и внутреннего четырехугольника в фигуре рамки это имеет место только в случае квадратов (и вообще — ромбов). Во всех же прочих случаях стороны наружного четырехугольника не пропорциональны сторонам внутреннего, и, следовательно, фигуры неподобны. Отсутствие подобия становится очевидным для прямоугольных рамок с широкими планками, как на рис. 89. В левой рамке наружные стороны относятся друг к другу, как 2 : 1, а внутренние — как 4 : 1. В правой — наружные, как 4 : 3, внутренние, как 2 : 1.

86. Для многих будет неожиданностью, что при решении этой задачи понадобятся сведения из астрономии: о расстоянии Земли от Солнца и о величине солнечного диаметра.

Длина полной тени, отбрасываемой в пространстве проволокой, определяется геометрическим построением, показанными на рис. 90. Легко видеть, что тень во столько раз больше поперечника проволоки, во сколько раз расстояние Земли от Солнца (150 000 000 км) больше поперечника Солнца (1 400 000 км). Последнее отношение равно, круглым счетом, 115. Значит, длина полной тени, отбрасываемой в пространстве проволокой, равна

$$4 \times 115 = 460 \text{ мм} = 46 \text{ см.}$$

Незначительной длиной полной тени объясняется то, что она бывает не видна на земле или на стенах домов; те слабые полоски, которые различаются при этом — не тени, а полутени.

Другой прием решения таких задач был указан при рассмотрении головоломки 8-й.

87. Ответ, что игрушечный кирпичик весит 1 кг, т. е. всего вчетверо меньше, грубо ошибочен. Кирпичик ведь не только вчетверо к о р о ч е настоящего, но и вчетверо

уже да еще вчетверо ниже, поэтому объем и вес его меньше в $4 \times 4 \times 4 = 64$ раза. Правильный ответ, следовательно, таков:

игрушечный кирпичик весит $4000 : 64 = 62,5$ г.

88. Вы теперь уже подготовлены к правильному решению этой задачи. Так как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит наш великан весит больше карлика раз в 8.

Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 см — на целый метр выше человека среднего роста. Самый маленький карлик имел в высоту меньше 40 см, т. е. был ниже исполина-эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана-эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить $7 \times 7 \times 7 = 343$ карлика — целую толпу.

89. Объем большого арбуза превышает объем меньшего в

$$1 \frac{1}{4} \times 1 \frac{1}{4} \times 1 \frac{1}{4} = \frac{125}{64},$$

почти вдвое. Выгоднее, значит, купить крупный арбуз; он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Почему же, однако, продавцы просят за такие арбузы обычно не вдвое, а только в полтора раза больше? Объясняется это просто тем, что продавцы в большинстве случаев не сильны в геометрии. Впрочем, не сильны в ней и покупатели, зачастую отказывающиеся из-за этого от выгодных покупок. Можно смело утверждать, что крупные арбузы выгоднее покупать, чем мелкие, потому что они расцениваются всегда ниже их истинной стоимости; но большинство покупателей об этом не подозревают.

По той же причине всегда выгоднее покупать крупные яйца, нежели мелкие, — если только их не расценивают по весу.

90. Окружности относятся между собой, как диаметры. Если окружность одной дыни 60 см, другой 50 см, то отношение их диаметров $60 : 50 = \frac{6}{5}$, а отношение их объемов

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} \approx 1,73.$$

Большая дыня должна быть, если оценивать ее сообразно объему (или весу), в 1,73 раза дороже меньшей; другими словами, дороже на 73%. Просят же за нее всего на 50% больше. Ясно, что есть прямой расчет ее купить.

91. Из условия задачи следует, что диаметр вишни в 3 раза больше диаметра косточки. Значит, объем вишни больше объема косточки в $3 \times 3 \times 3$, т. е. в 27 раз; на долю косточки приходится $\frac{1}{27}$ объема вишни, а на долю сочной части — остальные $\frac{26}{27}$. И, следовательно, сочная часть вишни больше косточки по объему в 26 раз.

92. Если модель легче натуре в 8 000 000 раз и обе сделаны из одного металла, то объем модели должен быть в 8 000 000 раз меньше объема натуре. Мы уже знаем, что объемы подобных тел относятся, как кубы их высот. Следовательно, модель должна быть ниже натуре в 200 раз, потому что

$$200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000.$$

Высота подлинной башни 300 м. Отсюда высота модели должна быть равна

$$300 : 200 = 1 \frac{1}{2} \text{ м.}$$

Модель будет почти в рост человека.

93. Обе кастрюли — тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире по обоим направлениям. Но раз она вдвое выше и шире, то поверхность ее больше в 2×2 , т. е. в 4 раза, потому что поверхности подобных тел относятся, как квадраты линейных размеров. При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности. Отсюда имеем ответ на вопрос задачи: большая кастрюля вчетверо тяжелее меньшей.

94. Эта задача, на первый взгляд вовсе не математическая, решается в сущности тем же геометрическим рассуждением, какое применено было в предыдущей задаче.

Прежде чем приступить к ее решению, рассмотрим сходную с ней, но несколько более простую задачу.

Два котла (или два самовара), большой и малый, одинакового материала и формы наполнены кипятком. Какой остынет скорее?

Вещи остывают главным образом с поверхности: следовательно, остынет скорее тот котел, в котором на каждую единицу объема приходится большая поверхность. Если один котел в n раз выше и шире другого, то поверхность его больше в n^2 раз, а объем — n^3 ; на единицу поверхности в большом котле приходится в n раз больший объем. Следовательно, меньший котел должен остыть раньше.

По той же причине и ребенок, стоящий на морозе, должен зябнуть больше, чем одинаково одетый взрослый: количество тепла, возникающего в каждом куб. см тела, у обоих приблизительно одинаково, но остывающая поверхность тела, приходящаяся на каждый куб. см, у ребенка больше, чем у взрослого.

В этом нужно видеть также причину того, что пальцы рук или нос зябнут сильнее и отмораживаются чаще, чем другие части тела, поверхность которых не столь велика по сравнению с их объемом.

Сюда же, наконец, относится и следующая задача:

Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Так как нагревание происходит с поверхности и распространяется на весь объем тела, то следует сравнить поверхность и объем лучины (например, квадратного сечения) с поверхностью и объемом полена той же длины (и тоже квадратного сечения), чтобы определить, какой величины поверхность приходится на каждый куб. см древесины в обоих случаях. Если толщина полена в 10 раз больше толщины лучины, то боковая поверхность полена больше поверхности лучины тоже в 10 раз, объем же его больше объема лучины в 100 раз. Следовательно, на каждую единицу поверхности в лучине приходится вдесятеро меньший объем, чем в полене: одинаковое количество тепла нагревает в лучине вдесятеро меньше вещества, — отсюда и более раннее воспламенение лучины, чем полена, от одного и того же источника тепла. (Ввиду дурной теплопроводности дерева указанные соотношения следует рассматривать лишь как грубо приближительные; они характеризуют лишь общий ход процесса, а не количественную сторону.)

Геометрия дождя и снега

95. Дождемер. Принято считать Ленинград очень дождливым городом, гораздо более дождливым, чем, например, Москва. Однако ученые говорят другое: они утверждают, что в Москве дожди приносят за год больше воды, чем в Ленинграде. Откуда они это знают? Можно разве измерить, сколько воды приносит дождь?

Это кажется трудной задачей, а между тем вы можете и сами научиться производить такой учет дождя. Не думайте, что для этого понадобится собрать всю воду, которая излилась на землю дождем. Достаточно измерить только толщину того слоя воды, который образовался бы на земле, если бы выпавшая вода не растекалась и не впитывалась в почву. А это совсем не так трудно сделать. Ведь когда идет дождь, то падает он на всю местность равномерно: не бывает, чтобы на одну грядку он принес больше воды, чем на соседнюю. Стоит лишь поэтому измерить толщину слоя дождевой воды на одной какой-нибудь площадке, и мы будем знать его толщину на всей площади, политой дождем.

Теперь вы, вероятно, догадались, как надо поступить, чтобы измерить толщину слоя воды, выпавшей с дождем. Нужно устроить хотя бы один небольшой участок, где бы дождевая вода не впитывалась в землю и не растекалась. Для этого годится любой открытый сосуд, например ведро. Если у вас имеется ведро с отвесными стенками (чтобы просвет его вверху и внизу был одинаков), то поставьте его в дождь на открытое место *). Когда дождь кончится, измерьте высоту воды, накопившейся в ведре, — и вы будете иметь все, что вам требуется для подсчетов.

*) Ставить надо повыше, чтобы в ведро не попали брызги воды, разбрасываемые дождем при ударе о землю.

Займемся подробнее нашим самодельным «дождемером». Как измерить высоту уровня воды в ведре? Вставить в него измерительную линейку? Но это удобно только в том случае, когда в ведре много воды. Если же слой ее, как обычно и бывает, не толще 2—3 см или даже миллиметров, то измерить толщину водяного слоя таким способом сколько-нибудь точно, конечно, не удастся. А здесь важен каждый миллиметр, даже каждая десятая его доля. Как же быть?

Лучше всего перелить воду в более узкий стеклянный сосуд. В таком сосуде вода будет стоять выше, а сквозь прозрачные стенки легко видеть высоту уровня. Вы понимаете, что измеренная в узком сосуде высота воды не есть толщина того водяного слоя, который нам нужно измерить. Но легко перевести одно измерение в другое. Пусть диаметр доньшка узкого сосуда ровно в десять раз меньше диаметра дна нашего ведра-дождемера. Площадь доньшка будет тогда меньше, чем площадь дна ведра, в 10×10 , т. е. в 100 раз. Понятно, что вода, перелитая из ведра, должна в стеклянном сосуде стоять в 100 раз выше. Значит, если в ведре толщина слоя дождевой воды была 2 мм, то в узком сосуде та же вода установится на уровне 200 мм, т. е. 20 см.

Вы видите из этого расчета, что стеклянный сосуд по сравнению с ведром-дождемером не должен быть очень узок — иначе его пришлось бы брать чересчур высоким. Вполне достаточно, если стеклянный сосуд уже ведра раз в 5; тогда площадь его дна в 25 раз меньше площади дна ведра, и уровень перелитой воды поднимается во столько же раз. Каждому миллиметру толщины водяного слоя в ведре будет отвечать 25 мм высоты воды в узком сосуде. Хорошо поэтому наклеить на наружную стенку стеклянного сосуда бумажную полоску и на ней нанести через каждые 25 мм деления, обозначив их цифрами 1, 2, 3 и т. д. Тогда, глядя на высоту воды в узком сосуде, вы без всяких пересчетов будете прямо знать толщину водяного слоя в ведре-дождемере. Если поперечник узкого сосуда меньше поперечника ведра не в 5, а, скажем, в 4 раза, то деления надо наносить на стеклянной стенке через каждые 16 мм и т. п.

Переливать воду в узкий измерительный сосуд из ведра через край очень неудобно. Лучше пробить в стенке ведра маленькое круглое отверстие и вставить в него

стеклянную трубочку с пробочкой; через нее переливать воду гораздо удобнее.

Итак, у вас имеется уже снаряжение для измерения толщины слоя дождевой воды. Конечно, ведро и самодельный измерительный сосуд не так аккуратно учитывают дождевую воду, как настоящий дождемер и настоящий измерительный стаканчик, которыми пользуются на метеорологических станциях. Все же ваши простейшие дешевые приборы помогут вам сделать много поучительных расчетов.

К этим расчетам мы сейчас и приступим.

96. Сколько дождя? Пусть имеется огород в 40 м длины и 24 м ширины. Шел дождь, и вы хотите узнать, сколько воды вылилось на огород. Как это рассчитать?

Начать надо, конечно, с определения толщины слоя дождевой воды: без этой цифры никаких расчетов сделать нельзя. Пусть самодельный ваш дождемер показал, что дождь налил водяной слой в 4 мм высоты. Сосчитаем, сколько куб. см воды стояло бы на каждом кв. м огорода, если бы вода не впиталась в землю. Один кв. м имеет 100 см в ширину и 100 см в длину; на нем стоит слой воды высотой в 4 мм, т. е. в 0,4 см. Значит объем такого слоя воды равен $100 \times 100 \times 0,4 = 4000$ куб. см.

Вы знаете, что 1 куб. см воды весит 1 г. Следовательно, на каждый кв. м огорода выпало дождевой воды 4000 г, т. е. 4 кг. Всего же в огороде $40 \times 24 = 960$ кв. м. Значит с дождем вылилось на него воды $4 \times 960 = 3840$ кг, без малого 4 тонны.

Для наглядности сосчитайте еще, много ли ведер воды пришлось бы вам принести на огород, чтобы дать ему поливкой столько же воды, сколько принес дождь. В обычном ведре около 12 кг воды. Следовательно, дождь пролил ведер воды $3840 : 12 = 320$.

Итак, вам пришлось бы вылить на огород более 300 ведер, чтобы заменить то орошение, которое принес дождик, длившийся каких-нибудь четверть часа.

Как выражается в числах сильный и слабый дождь? Для этого нужно определить, сколько миллиметров воды (т. е. водяного слоя) выпадает за одну минуту дождя — то, что называется «силою осадков». Если дождь был таков, что ежеминутно выпадало в среднем 2 мм, то это — ливень чрезвычайной силы. Когда же моросит осенний мелкий дождичек, то 1 мм воды накапливается за целый час или даже за еще больший срок.

Как видите, измерить, сколько воды выпадает с дождем, не только возможно, но даже и не очень сложно. Более того: вы могли бы, если бы захотели, определить даже, сколько приблизительно отдельных капель выпадает при дожде *). В самом деле: при обыкновенном дожде отдельные капли весят в среднем столько, что их идет 12 штук на грамм. Значит, на каждый кв. м огорода выпало при том дожде, о котором раньше говорилось, $4000 \times 12 = 48\ 000$ капель.

Нетрудно, далее, вычислить, сколько капель дождя выпало и на весь огород. Но расчет числа капель только любопытен; пользы из него извлечь нельзя. Упомянули мы о нем для того лишь, чтобы показать, какие невероятные на первый взгляд расчеты можно выполнять, если уметь за них приняться.

97. Сколько снега? Мы научились измерять количество воды, приносимое дождем. А как измерить воду, приносимую градом? Совершенно таким же способом. Градины попадают в ваш дождемер и там тают; образовавшуюся от града воду вы измеряете — и получаете то, что вам нужно.

Иначе измеряют воду, приносимую снегом. Здесь дождемер дал бы очень неточные показания, потому что снег, попадающий в ведро, частью выдувается оттуда ветром. Но при учете снеговой воды можно обойтись и без всякого дождемера: измеряют непосредственно толщину слоя снега, покрывающего двор, огород, поле при помощи деревянной планки (рейки). А чтобы узнать, какой толщины в о д я н о й слой получится от таяния этого снега, надо сделать опыт: наполнить ведро снегом той же рыхлости и, дав ему растаять, заметить, какой высоты получился слой воды. Таким образом, вы определите, сколько миллиметров высоты водяного слоя получается из каждого сантиметра слоя снега. Зная это, вам нетрудно уже будет переводить толщину снежного слоя в толщину водяного.

Если будете ежедневно без пропусков измерять количество дождевой воды в течение теплого времени года и прибавите к этому еще воду, запасенную за зиму в виде снега, то узнаете, сколько всего воды выпадает за год в вашей местности. Это очень важный итог, измеряющий количество осадков в данном пункте. («Осадками» назы-

*) Дождь всегда выпадает каплями, — даже тогда, когда нам кажется, что он идет сплошными струями.

ваются вся вообще выпадающая вода, падает ли она в виде дождя, града, снега и т. п.)

Вот сколько осадков выпадает в среднем ежегодно в разных городах нашего Союза:

Ленинград	47 см	Астрахань	14 см
Вологда	45 »	Кутаиси	179 »
Архангельск	41 »	Баку	24 »
Москва	55 »	Свердловск	36 »
Кострома	49 »	Тобольск	43 »
Казань	44 »	Семипалатинск	21 »
Куйбышев	39 »	Алма-Ата	51 »
Чкалов	43 »	Ташкент	31 »
Одесса	40 »	Енисейск	39 »
		Иркутск	44 »

Из перечисленных мест больше всех получает с неба воды Кутаиси (179 см), а меньше всех Астрахань (14 см), в 13 раз меньше, чем Кутаиси. Но на земном шаре есть места, где выпадает воды гораздо больше, чем в Кутаиси. Например, одно место в Индии буквально затопляется дождевой водой; ее выпадает там в год 1260 см, т. е. 12¹/₂ м! Случилось раз, что здесь за одни сутки выпало больше 100 см воды. Существуют, наоборот, и такие местности, где выпадает осадков еще гораздо меньше, чем в Астрахани: так, в одной области Южной Америки, в Чили, не набирается за целый год и 1 см осадков.

Район, где выпадает меньше 25 см осадков в год, является засушливым. Здесь нельзя вести зернового хозяйства без искусственного орошения.

Если вы не живете ни в одном из тех городов, которые перечислены в нашей табличке, то вам придется самим взяться за измерение количества осадков в вашей местности. Терпеливо измеряя круглый год, сколько воды приносит каждый дождь или град и сколько воды запасено в снеге, вы получите представление о том, какое место по влажности занимает ваш город среди других городов Советского Союза.

Нетрудно понять, что, измерив, сколько воды выпадает ежегодно в разных местах земного шара, можно из этих цифр узнать, какой слой воды в среднем выпадает за год на всю Землю вообще. Оказывается, что на суше (на океанах наблюдения не ведутся) среднее количество осадков за год равно 78 см. Считают, что над океаном проливается примерно столько же воды, сколько и на равный участок суши. Нетрудно вычислить, сколько воды прино-

сится на всю нашу планету ежегодно дождем, градом, снегом и т. п. Но для этого нужно знать величину поверхности земного шара. Если вам неоткуда получить эту величину, вы можете вычислить ее сами следующим образом.

Вам известно, что метр составляет почти в точности 40-миллионную долю окружности земного шара. Другими словами, окружность Земли равна 40 000 000 м, т. е. 40 000 км. Поперечник всякого круга примерно в $3\frac{1}{7}$ раза меньше его окружности. Зная это, найдем поперечник нашей планеты:

$$40\,000 : 3\frac{1}{7} \approx 12\,700 \text{ км.}$$

Правило же вычисления поверхности всякого шара таково: надо умножить поперечник на самого себя и на $3\frac{1}{7}$

$$12\,700 \times 12\,700 \times 3\frac{1}{7} \approx 509\,000\,000 \text{ кв. км.}$$

(Начиная с четвертой цифры результата, мы пишем нули, потому что надежны только первые его три цифры.)

Итак, вся поверхность земного шара равна 509 миллионам кв. км.

Возвратимся теперь к нашей задаче. Вычислим, сколько воды выпадает на каждый кв. км земной поверхности. На 1 кв. м или на 10 000 кв. см выпадает

$$78 \times 10\,000 = 780\,000 \text{ куб. см.}$$

В квадратном километре $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$ кв. м. Следовательно, на него выпадает воды:

$$780\,000\,000\,000 \text{ куб. см, или } 780\,000 \text{ куб. м.}$$

На всю же земную поверхность выпадает

$$780\,000 \times 509\,000\,000 = 397\,000\,000\,000\,000 \text{ куб. м.}$$

Чтобы превратить это число куб. м в куб. км, нужно его разделить на $1000 \times 1000 \times 1000$, т. е. на миллиард. Получим 397 000 куб. км.

Итак, ежегодно из атмосферы изливается на поверхность нашей планеты около 400 000 куб. км воды.

На этом закончим нашу беседу о геометрии дождя и снега. Более подробно обо всем здесь рассказанном можно прочитать в книгах по метеорологии.

Математика

и сказание о потопе

98. Сказание о потопе. Среди баснословных преданий, собранных в библии, имеется сказание о том, как некогда весь мир был затоплен дождем выше самых высоких гор. По словам библии, бог однажды «раскаялся, что создал человека на земле», и сказал:

— Истреблю с лица земли (т. е. с поверхности земного шара) человеков*), которых я сотворил: от человеков до скотов, гадов и птиц небесных истреблю (всех).

Единственный человек, которого бог хотел при этом пощадить, был праведник Ной. Поэтому бог предупредил его о готовящейся гибели мира и велел построить просторный корабль (по библейскому выражению «ковчег») следующих размеров: «длина ковчега — 300 локтей, ширина**) его 50 локтей, а высота его 30 локтей». В ковчеге было три этажа. На этом корабле должны были спастись не один Ной со своим семейством и семьями своих взрослых детей, но и все породы наземных животных. Бог велел Ною взять в ковчег по одной паре всех видов таких животных вместе с запасом пищи для них на долгий срок.

Средством для истребления всего живого на суше бог избрал наводнение от дождя. Вода должна уничтожить всех людей и все виды наземных животных. После этого от Ноя и от спасенных им животных должны появиться новый человеческий род и новый мир животных.

«Через семь дней,— говорится дальше в библии,— воды потопа пришли на землю... И лился на землю дождь

*) Такие выражения, как «человеков» вместо «людей» и др., теперь уже не употребляются; это — старинные обороты речи, встречающиеся в русском переводе библии.

**) Опять старинный оборот речи: ширина вместо ширина.

40 дней и 40 ночей... И умножилась вода и подняла ковчег, и он взвился над водою... И усилилась вода на земле чрезвычайно, так что покрылись все высокие горы, какие есть под всем небом; на 15 локтей поднялась над ними вода... Истребилось всякое существо, которое было на поверхности всей земли. Остался только Ной и что было с ним в ковчеге». Вода стояла на земле — повествует библейское сказание — еще 110 суток; после этого она исчезла, и Ной со всеми спасенными животными покинул ковчег, чтобы вновь населить опустошенную Землю.

По поводу этого сказания поставим два вопроса:

1. Возможен ли был такой ливень, который покрыл весь земной шар выше самых высоких гор?

2. Мог ли Ноев ковчег вместить все виды наземных животных?

99. Мог ли быть потоп? Тот и другой вопросы разрешаются при участии математики.

Откуда могла взяться вода, выпавшая с дождем потопа? Конечно, только из атмосферы. Куда же девалась она потом? Целый мировой океан воды не мог ведь всосаться в почву; покинуть нашу планету он, разумеется, тоже не мог. Единственное место, куда вся эта вода могла деться, — земная атмосфера: воды потопа могли только испариться и перейти в воздушную оболочку земли. Там вода эта должна находиться еще и сейчас. Выходит, что если бы весь водяной пар, содержащийся теперь в атмосфере, сгустился в воду, которая излилась бы на землю, то был бы снова всемирный потоп; вода покрыла бы самые высокие горы. Проверим, так ли это.

Справимся в книге по метеорологии, сколько влаги содержится в земной атмосфере. Мы узнаем, что столб воздуха, опирающийся на один квадратный метр, содержит водяного пара в среднем около 16 кг и никогда не может содержать больше 25 кг. Рассчитаем же, какой толщины получился бы водяной слой, если бы весь этот пар осел на землю дождем. 25 кг, т. е. 25 000 г, воды занимают объем в 25 000 куб. см. Таков был бы объем слоя, площадь которого — 1 кв. м, т. е. 100 × 100, или 10 000 кв. см. Разделив объем на площадь основания, получим толщину слоя

$$25\ 000 : 10\ 000 = 2,5\ \text{см.}$$

Выше 2,5 см потоп подняться не мог, потому что больше в атмосфере нет воды *). Да и такая высота воды была бы лишь в том случае, если бы выпадающий дождь совсем не всасывался в землю.

Сделанный нами расчет показывает, какова могла бы быть высота воды при потопе, если бы такое бедствие действительно произошло: 2,5 см. Отсюда до вершины величайшей горы Эвереста, возвышающейся на 9 км, еще очень далеко. Высота потопа преувеличена библейским сказанием ни мало, ни много — в 360 000 раз!

Итак, если бы всемирный дождевой «потоп» даже состоялся, то это был бы вовсе не потоп, а самый слабый дождик, потому что за 40 суток непрерывного падения он дал бы осадков всего 25 мм — меньше полумиллиметра в сутки. Мелкий осенний дождь, идущий сутки, дает воды в 20 раз больше.

100. Возможен ли Ноев ковчег? Теперь рассмотрим второй вопрос: могли ли в Ноевом ковчеге разместиться все виды наземных животных?

Вычислим «жилую площадь» ковчега. В нем по библейскому сказанию было три этажа. Размер каждого — 300 локтей в длину и 50 локтей в ширину. «Локоть» у древних народов западной Азии был единицей меры, равнявшейся примерно 45 см, или 0,45 м. Значит, в наших мерах величина каждого этажа в ковчеге была такова:

$$\text{Длина: } 300 \times 0,45 = 135 \text{ м.}$$

$$\text{Ширина: } 50 \times 0,45 = 22,5 \text{ м.}$$

Площадь пола: $135 \times 22,5 \approx 3040$ кв. м.

Общая «жилплощадь» всех трех этажей Ноева ковчега, следовательно, равнялась:

$$3040 \times 3 = 9120 \text{ кв. м.}$$

Достаточно ли такой площади для размещения хотя бы только всех видов млекопитающих животных земного шара? Число различных видов наземных млеко-

*) Во многих местностях на земном шаре выпадает за один раз больше 2,5 см осадков; они получаются не только от того воздуха, который стоит над этой местностью, но и от воздуха соседних местностей, приносимого ветром. «Всемирный» же потоп, по библии, происходил одновременно на всей земной поверхности, и одна местность не могла заимствовать влагу от другой.

питающих равно около 3500. Ноею приходилось отводить место не только для самого животного, но и для запаса корма для него на 150 суток, пока длился потоп. А хищное животное требовало места и для себя и для тех животных, которыми оно питалось, и еще для корма этих животных. В ковчеге же приходилось в среднем на каждую пару спасаемых животных всего лишь

$$9120 : 3500 = 2,6 \text{ кв. м.}$$

Такая «жилая норма» явно не достаточна, особенно если принять в расчет, что некоторую площадь занимала также многочисленная семья Ноя и что, кроме того, необходимо было оставить проход между клетками.

Но ведь помимо млекопитающих Ноев ковчег должен был дать приют еще многим другим видам наземных животных, не столь крупным, зато гораздо более разнообразным. Число их, примерно, таково:

Птиц	13 000
Пресмыкающихся	3 500
Земноводных	1 400
Паукообразных	16 000
Насекомых	360 000

Если одним только млекопитающим было бы тесно в ковчеге, то для этих животных и вовсе не хватило бы места. Чтобы вместить все виды наземных животных, Ноев ковчег должен был быть во много раз больше. А между тем при тех размерах, которые указаны в Библии, ковчег являлся уже очень крупным судном: его «водоизмещение», как говорят моряки, было 20 000 тонн. Совершенно неправдоподобно, чтобы в те отдаленные времена, когда техника судостроения была еще в младенческом состоянии, люди могли соорудить корабль подобных размеров. И все же он был недостаточно велик для того, чтобы исполнить назначение, приписываемое ему библейским сказанием. Ведь это должен был быть целый зоологический сад с запасом корма на 5 месяцев!

Словом, библейское сказание о всемирном потопе настолько не вяжется с простыми математическими расчетами, что трудно найти в нем даже частицу чего-либо правдоподобного. Повод к нему подало, вероятно, какое-нибудь местное наводнение; все же остальное — вымысел богатого восточного воображения.

Тридцать разных задач

Я надеюсь, что знакомство с этой книжкой не прошло для читателя бесследно, что оно не только развлекло его, но и принесло известную пользу, развив его сметливость, находчивость, научив более умело распоряжаться своими знаниями. Читатель, вероятно, и сам желал бы теперь испытать на чем-нибудь свою сообразительность. Для этой цели и предназначаются те три десятка разнородных задач, которые собраны здесь, в последней главе нашей книжки.

101. Цепь. Кузнецу принесли 5 обрывков цепи, по 3 звена в каждом обрывке, и заказали соединить их в одну цепь.

Прежде чем приняться за дело, кузнец стал думать, сколько колец понадобится для этого раскрыть и вновь заковать. Он решил, что придется раскрыть и снова заковать ч е т ы р е кольца.

Нельзя ли, однако, выполнить работу, раскрыв и заковав меньше колец?

102. Пауки и жуки. Мальчик собрал в коробку пауков и жуков — всего 8 штук. Если пересчитать, сколько всех ног в коробке, то окажется 54 ноги.

Сколько же в коробке пауков и сколько жуков?

103. Плащ, шляпа и галоши. Некто купил плащ, шляпу и галоши и заплатил за все 20 руб. Плащ стоит на 9 руб. больше, чем шляпа, а шляпа и плащ вместе на 16 руб. больше, чем галоши. Сколько стоит каждая вещь в отдельности?

Задачу требуется решить устным счетом, без уравнений.

104. Куриные и утиные яйца. Корзины содержат яйца; в одних корзинах куриные яйца, в других — утиные. Число их 5, 6, 12, 14, 23 и 29. «Если я продам вот эту



Рис. 91. Пять обрывков цепи.

корзину, — размышляет продавец, — то у меня останется куриных яиц ровно вдвое больше, чем утиных.»

Какую корзину имел в виду продавец?

105. Перелет. Самолет покрывает расстояние от города A до города B в 1 ч. 20 м. Однако обратный перелет он совершает в 80 мин. Как вы это объясните?

106. Денежные подарки. Один отец дал своему сыну 150 руб., а другой своему — 100 руб. Оказалось, однако, что оба сына вместе увеличили свои капиталы только на 150 рублей. Чем это объяснить?

107. Две шашки. На пустую шашечную доску надо поместить две шашки разного цвета. Сколько различных положений могут они занимать на доске?

108. Двумя цифрами. Какое наименьшее целое положительное число можете вы написать двумя цифрами?

109. Единица. Выразите 1, употребив все десять цифр.

110. Пятью девятками. Выразите 10 пятью девятками. Укажите, по крайней мере, два способа.

111. Десятью цифрами. Выразите 100, употребив все десять цифр. Сколькими способами можете вы это сделать? Существует не меньше четырех способов.

112. Четырьмя способами. Четырьмя различными способами выразите 100 пятью одинаковыми цифрами.

113. Четырьмя единицами. Какое самое большое число можете вы написать четырьмя единицами?

114. Загадочное деление. В следующем примере деления все цифры заменены звездочками, кроме четырех четверок. Поставьте вместо звездочек те цифры, которые были заменены.

$$\begin{array}{r}
 \text{*****}4 \mid \text{***} \\
 \text{---} \quad \text{***} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{**}4\text{*} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{****} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{****} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{*}4\text{*} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{****} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{****} \quad \mid \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{****} \quad \mid \text{---}
 \end{array}$$

Задача эта имеет несколько различных решений.

115. Еще случай деления. Сделайте то же с другим примером, в котором уделело только семь семерок:

$$\begin{array}{r} \text{**7*****} \text{****7*} \\ \text{-----} \\ \text{*****} \text{****7**} \\ \text{-----} \\ \text{*****7*} \\ \text{-----} \\ \text{*****} \\ \text{-----} \\ \text{*7****} \\ \text{-----} \\ \text{*7****} \\ \text{-----} \\ \text{*****} \\ \text{-----} \\ \text{***7**} \\ \text{-----} \\ \text{*****} \\ \text{-----} \\ \text{*****} \\ \text{-----} \\ \text{*****} \end{array}$$

116. Что получится? Сообразите в уме, на какую длину вытянется полоска, составленная из всех миллиметровых квадратиков одного квадратного метра, приложенных друг к другу вплотную.

117. В том же роде. Сообразите в уме, на сколько километров возвышался бы столб, составленный из всех миллиметровых кубиков одного кубометра, положенных один на другой.

118. Самолет. Самолет с размахом крыльев 12 м был сфотографирован во время полета снизу, когда он пролетал отвесно над аппаратом. Глубина камеры 12 см, размер изображения 8 мм.

На какой высоте летел самолет в момент фотографирования?

119. Миллион изделий. Изделие весит 89,4 г. Сообразите в уме, сколько тонн весит миллион таких изделий.

120. Число путей. На рис. 92 вы видите лесную дачу, разделенную просеками на квадратные кварталы. Пунктирной линией обозначен путь по просекам от точки А до точки В. Это, конечно, не единственный путь между указанными точками по просекам. Сколько можете вы насчитать различных путей одинаковой длины?

121. Циферблат. Этот циферблат (рис. 93) надо разрезать на 6 частей любой формы, — так, однако, чтобы сумма чисел, имеющих на каждом участке, была одна и та же.

Задача имеет целью испытать не столько вашу находчивость, сколько быстроту соображения.

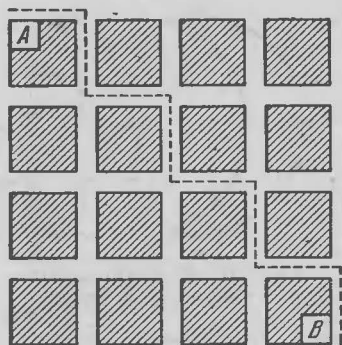


Рис. 92. Лесная дача разделена просеками.

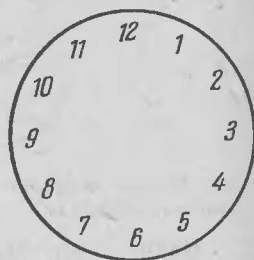


Рис. 93. Этот циферблат надо разрезать на 6 частей.

122. Восьмиконечная звезда. Числа от 1 до 16 надо расставить в точках пересечения линий фигуры, изображенной на рис. 94, так, чтобы сумма чисел на стороне каждого квадрата была 34, и сумма их на вершинах каждого квадрата также составляла 34.

123. Числовое колесо. Цифры от 1 до 9 надо разместить в фигуре на рис. 95 так, чтобы одна цифра была в центре круга, прочие — у концов каждого диаметра, и чтобы сумма трех цифр каждого ряда составляла 15.

124. Трехногий стол. Существует мнение, что стол о трех ногах никогда не качается, даже если ножки его и неравной длины. Верно ли это?

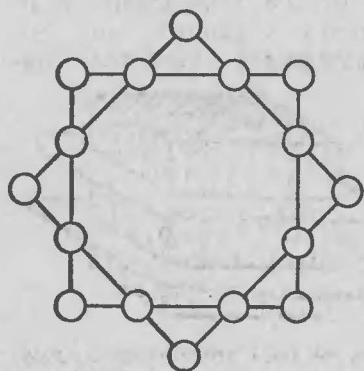


Рис. 94. Восьмиконечная звезда.

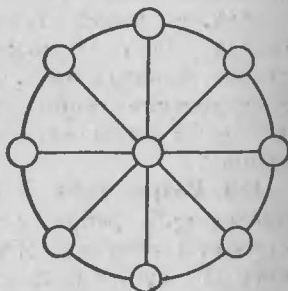


Рис. 95. Числовое колесо.

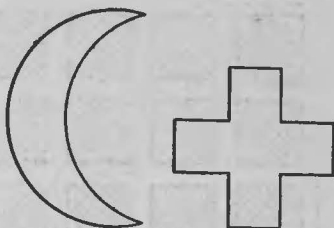
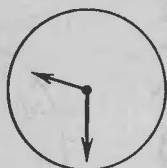
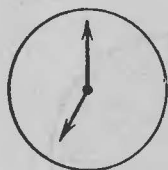


Рис. 96. Какой величины углы между стрелками?

Рис. 97. Как «превратить» полумесяц в крест.

125. Какие углы? Какие углы составляют между собой стрелки часов на рис. 96? Ответ надо дать по соображению, не пользуясь транспортиром.

126. По экватору. Если бы мы могли обойти земной шар по экватору, то макушка нашей головы описала бы более длинный путь, чем каждая точка наших ступней. Как велика эта разница?

127. В шесть рядов. Вам известен, вероятно, шуточный рассказ о том, как девять лошадей расставлены были по десяти стойлам и в каждом стойле оказалась одна лошадь. Задача, которая сейчас будет предложена, по внешности сходна с этой знаменитой шуткой, но имеет не воображаемое, а вполне реальное решение. Она состоит в следующем:

Расставить 24 человека в 6 рядов так, чтобы каждый ряд состоял из 5 человек.

128. Крест и полумесяц. На рис. 97 изображена фигура полумесяца (строго говоря, это не полумесяц, т. к. полумесяц имеет форму полукруга, а лунный серп), составленная двумя дугами окружностей. Требуется нарисовать знак Красного креста, площадь которого геометрически точно равнялась бы площади полумесяца.

129. Разрез куба. У вас имеется куб, ребро которого равно 3 см. Его объем равен 27 куб. см, и этот куб может быть разрезан на 27 маленьких кубиков, ребро каждого из которых

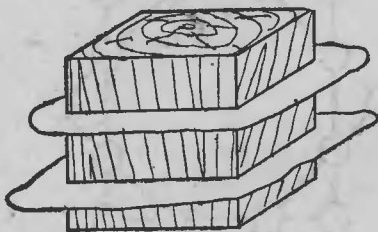


Рис. 98. Надо провести две плоскости, параллельные одной грани...

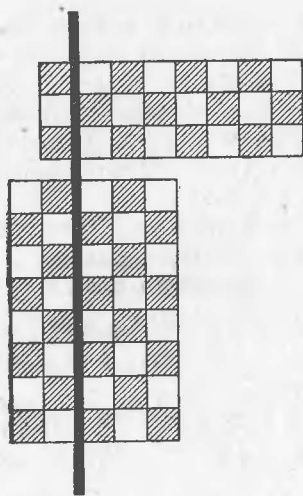


Рис. 99. Перед проведением очередного разреза образовавшиеся части можно перекладывать.

равно 1 см. Это очень легко сделать, разрезав куб шестью плоскостями: надо провести две плоскости, параллельные одной грани, две, параллельные другой грани, и две, параллельные третьей. Вообразите, однако, что после каждого разреза вам разрешено перемещать части в пространстве: отрезав какую-либо часть, вы можете наложить ее на другие так, чтобы следующая разрезающая плоскость пересекала их все. Не сможете ли вы, пользуясь этой дополнительной возможностью, уменьшить число разрезающих плоскостей, рассекающих куб на 27 маленьких кубиков?

130. Еще разрез. Следующая задача похожа на предыдущую, но несколько в ином роде.

Обычную шахматную доску, состоящую из 64 квадратиков (8×8), требуется разрезать на отдельные квадратики. При этом разрешается производить разрезы только по прямым линиям. Однако после каждого разреза можно перекладывать образовавшиеся части, чтобы следующий прямолинейный разрез мог рассечь не одну, а несколько частей. Сколько прямолинейных разрезов вам потребуется, чтобы разрезать всю доску на отдельные квадратики?

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК 101—130

101. Можно выполнить требуемую работу, раскрыв только три звена. Для этого надо освободить звенья одного обрывка и соединить ими концы остальных четырех обрывков.

102. Чтобы решить эту задачу, нужно прежде всего припомнить из естественной истории, сколько ног у жуков и сколько у пауков: у жука 6 ног, у паука — 8.

Зная это, предположим, что в коробке были одни только жуки, числом 8 штук. Тогда всех ног было

бы $6 \times 8 = 48$, на 6 меньше, чем указано в задаче. Заменим теперь одного жука пауком. От этого число ног увеличится на 2, потому что у паука не 6 ног, а 8.

Ясно, что если мы сделаем три такие замены, мы доведем общее число ног в коробке до требуемых 54. Но тогда из 8 жуков останется только 5, остальные будут пауки.

Итак, в коробке было 5 жуков и 3 паука.

Проверим: у 5 жуков 30 ног, у 3 пауков 24 ноги, а всего $30 + 24 = 54$, как и требует условие задачи.

Можно решить задачу и иначе. А именно: можно предположить, что в коробке были только пауки, 8 штук. Тогда всех ног оказалось бы $8 \times 8 = 64$, — на 10 больше, чем указано в условии. Заменяв одного паука жуком, мы уменьшим число ног на 2. Нужно сделать 5 таких замен, чтобы свести число ног к требуемым 54. Иначе говоря, из 8 пауков надо оставить только 3, а остальных заменить жуками.

103. Если бы вместо плаща, шляпы и галош куплено было только две пары галош, то пришлось бы заплатить не 20 руб., а на столько меньше, на сколько галоши дешевле плаща с шляпой, т. е. на 16 руб. Мы узнаем, следовательно, что две пары галош стоят $20 - 16 = 4$ руб., отсюда стоимость одной пары — 2 руб.

Теперь стало известно, что плащ и шляпа вместе стоят $20 - 2 = 18$ руб., причем плащ дороже шляпы на 9 руб. Рассуждаем, как прежде: вместо плаща с шляпой, купим две шляпы. Мы заплатим не 18 руб., а меньше на 9 руб. Значит, две шляпы стоят $18 - 9 = 9$ руб., откуда стоимость одной шляпы — 4 руб. 50 коп.

Итак, вот стоимость вещей: галоши — 2 руб., шляпа — 4 руб. 50 коп., плащ — 13 руб. 50 коп.

104. Продавец имел в виду корзину с 29 яйцами. Куриные яйца были в корзинах с обозначениями 23, 12 и 5; утиные — в корзинах с числами 14 и 6.

Проверим. Всего куриных яиц оставалось:

$$23 + 12 + 5 = 40.$$

Утиных

$$14 + 6 = 20.$$

Куриных вдвое больше, чем утиных, как и требует условие задачи.

105. В этой задаче нечего объяснять: самолет совершает перелет в обоих направлениях в одинаковое время, потому что $80 \text{ мин.} = 1 \text{ ч. } 20 \text{ м.}$

Задача рассчитана на невнимательного читателя, который может подумать, что между $1 \text{ ч. } 20 \text{ м.}$ и 80 мин. есть разница. Как ни странно, но людей, попадающихся на этот крючок, оказывается немало, притом среди привыкших делать расчеты их больше, чем среди малоопытных вычислителей. Причина кроется в привычке к десятичной системе мер и денежных единиц. Видя обозначение: « $1 \text{ ч. } 20 \text{ м.}$ » и рядом с ним « 80 мин. », мы невольно оцениваем различие между ними, как разницу между $1 \text{ р. } 20 \text{ к.}$ и 80 коп. На эту психологическую ошибку и рассчитана задача.

106. Разгадка недоумения в том, что один из отцов приходился другому сыном. Всех было не четверо, а трое: дед, сын и внук. Дед дал сыну 150 руб. , а тот передал из них 100 руб. внуку (т. е. своему сыну), увеличив собственные капиталы, следовательно, всего на 50 руб.

107. Первую шашку можно поместить на любое из 64 полей доски, т. е. 64 способами. После того как первая поставлена, вторую шашку можно поместить на какое-либо из прочих 63 полей. Значит к каждому из 64 положений первой шашки можно присоединить 63 положения второй шашки. Отсюда общее число различных положений двух шашек на доске

$$64 \times 63 = 4032.$$

108. Наименьшее целое число, какое можно написать двумя цифрами, не 10 , как думают, вероятно, иные читатели, а единица, выраженная таким образом:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ и т. д. до } \frac{9}{9}.$$

Знакомые с алгеброй прибавят к этим выражениям еще и ряд других обозначений:

$$1^0, 2^0, 3^0, 4^0 \text{ и т. д. до } 9^0,$$

потому, что всякое число в нулевой степени равно единице *).

*) Но неправильны были бы решения $\frac{0}{0}$ или 0^0 ; эти выражения вообще не имеют смысла.

109. Надо представить единицу как сумму двух дробей

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

Знающие алгебру могут дать еще и другие ответы:

$$123456789^0; 234567^{9-8-1}$$

и т. п., так как число в нулевой степени равно единице.

110. Два способа таковы:

$$9\frac{99}{99} = 10,$$

$$\frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10.$$

Кто знает алгебру, тот может прибавить еще несколько решений, например:

$$\left(9\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10,$$

$$9 + 99^{9-9} = 10.$$

111. Вот 4 решения:

$$70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6} = 100;$$

$$80\frac{27}{54} + 19\frac{3}{6} = 100;$$

$$87 + 9\frac{4}{5} + 3\frac{12}{60} = 100;$$

$$50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100.$$

112. Число 100 можно выразить пятью одинаковыми цифрами, употребив в дело единицы, тройки и — всего проще — пятерки

$$111 - 11 = 100;$$

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100;$$

$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100;$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

113. На вопрос задачи часто отвечают: 1111. Однако можно написать число во много раз больше — именно 11

в одиннадцатой степени: 11^{11} . Если у вас есть терпение довести вычисление до конца (с помощью логарифмов можно выполнять такие расчеты гораздо скорее), вы убедитесь, что число это больше 280 миллиардов. Следовательно, оно превышает число 1111 в 250 миллионов раз.

114. Заданный пример деления может соответствовать четырем различным случаям, а именно:

$$1\ 337\ 174 : 943 = 1418;$$

$$1\ 343\ 784 : 949 = 1416;$$

$$1\ 200\ 474 : 846 = 1419;$$

$$1\ 202\ 464 : 848 = 1418.$$

115. Этот пример отвечает только одному случаю деления:

$$7\ 375\ 428\ 413 : 125\ 473 = 58\ 781.$$

Обе последние, весьма нелегкие задачи были впервые опубликованы в американских изданиях: «Математическая газета», 1920 г. и «Школьный мир», 1906 г.

116. В квадратном метре тысяча тысяч квадратных миллиметров. Каждая тысяча приложенных друг к другу миллиметровых квадратиков составляет 1 м; тысяча тысяч их составляет 1000 м, т. е. 1 км: полоска вытянется на целый километр.

117. Ответ поражает неожиданностью: столб возвышался бы на... 1000 км.

Сделаем устный расчет. В кубометре содержится кубических миллиметров тысяча \times тысячу \times тысячу. Каждая тысяча миллиметровых кубиков, поставленных один на другой, даст столб в 1000 м = 1 км. А так как у нас кубиков еще в тысячу раз больше, то и составит 1000 км.

118. Из рис. 100 видно, что (вследствие равенства углов 1 и 2) линейные размеры предмета так относятся к соответствующим размерам изображения, как расстояние предмета от объектива относится к глубине камеры. В нашем случае, обозначив высоту самолета над землей в метрах через x , имеем пропорцию:

$$12\ 000 : 8 = x : 0,12,$$

откуда $x = 180$ м.

119. Надо умножить 89,4 г на миллион, т. е. на тысячу тысяч.

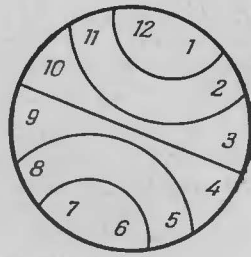


Рис. 101.



Рис. 100.

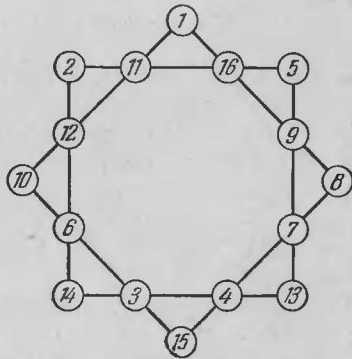


Рис. 102.

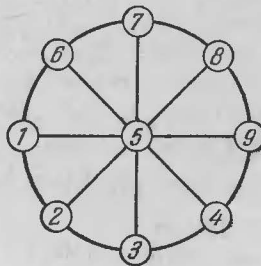


Рис. 103.

Умножаем в два приема: $89,4 \text{ г} \times 1000 = 89,4 \text{ кг}$, потому что килограмм в тысячу раз больше грамма. Далее: $89,4 \text{ кг} \times 1000 = 89,4 \text{ тонны}$, потому что тонна в тысячу раз больше килограмма.

Итак, искомый вес — 89,4 тонны.

120. Всех путей по просекам от A до B можно насчитать 70. (Систематическое решение этой задачи возможно с помощью теории соединений, рассматриваемой в курсах алгебры.)

121. Так как сумма всех чисел, обозначенная на циферблате, равна 78, то числа каждого из шести участков должны составлять вместе $78 : 6$, т. е. 13. Это облегчает отыскание решения, которое показано на рис. 101.

122—123. Решения показаны на прилагаемых рис. 102 и 103.

124. Трехногий стол всегда может касаться пола концами своих трех ножек, потому что через каждые три точки пространства может проходить плоскость и притом только одна; в этом причина того, что трехногий стол не качается. Как видите, она чисто геометрическая, а не физическая.

Вот почему так удобно пользоваться треногами для землемерных инструментов и фотографических аппаратов. Четвертая нога не сделала бы подставку устойчивее; напротив, пришлось бы тогда всякий раз заботиться о том, чтобы подставка не качалась.

125. На вопрос задачи легко ответить, если сообразить, какое время показывают стрелки. Стрелки в левом кружке (рис. 96) показывают, очевидно, 7 час. Значит, между концами этих стрелок заключена дуга в $\frac{5}{12}$ полной окружности.

В градусной мере это составляет

$$360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ.$$

Стрелки в правом кружке показывают, как нетрудно сообразить, 9 ч. 30 м. Дуга между их концами содержит $3\frac{1}{2}$ двенадцатых доли полной окружности или $\frac{7}{24}$.

В градусной мере это составляет

$$360^\circ \times \frac{7}{24} = 105^\circ.$$

126. Принимая рост человека в 175 см и обозначив радиус Земли через R , имеем:

$$2 \times 3,14 \times (R + 175) - 2 \times 3,14 \times R = 2 \times 3,14 \times 175 = 1100 \text{ см,}$$

т. е. около 11 м. Поразительно здесь то, что результат совершенно не зависит от радиуса шара и, следовательно, одинаков на исполинском Солнце и маленьком шарике.

127. Требованию задачи легко удовлетворить, если расставить людей в форме шестиугольника, как показано на рис. 104.

128. Читатели, слышавшие о неразрешимости задачи квадратуры круга, сочтут, вероятно, и предлагаемую задачу неразрешимой строго геометрически. Раз нельзя превратить в равновеликий квадрат полный круг, то — думают многие — нельзя превратить в прямоугольную фигуру и луночку, составленную двумя дугами окружности.

Между тем, задача, безусловно, может быть решена геометрическим построением, если воспользоваться одним любопытным следствием общеизвестной Пифагоровой теоремы. Следствие, которое я имею в виду, гласит, что сумма площадей полукругов, построенных на катетах, равна полукругу, построенному на гипотенузе (рис. 105). Перекинув большой полукруг на другую сторону (рис. 106), видим, что обе заштрихованные луночки вместе равновелики треугольнику*). Если треугольник взять равнобедренный, то каждая луночка в отдельности будет равновелика половине этого треугольника (рис. 107).

Отсюда следует, что можно геометрически точно построить равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна площади серпа.

А так как равнобедренный прямоугольный треугольник превращается в равновеликий квадрат (рис. 108), то и серп наш возможно чисто геометрическим построением заменить равновеликим квадратом.

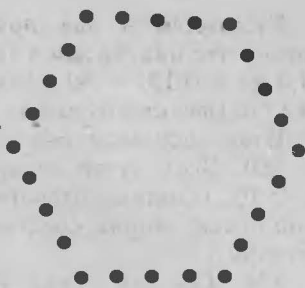


Рис. 104.

*) Положение это известно в геометрии под названием «теоремы о гиппократовых луночках».

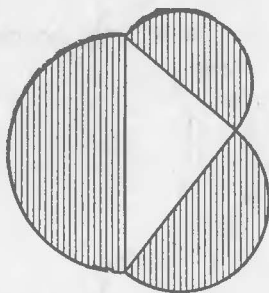


Рис. 105.

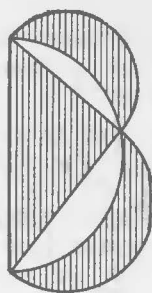


Рис. 106.

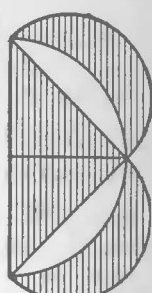


Рис. 107.



Рис. 108.

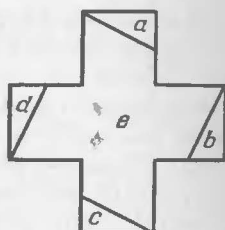
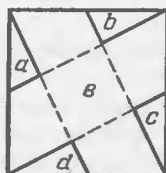


Рис. 109.

Остается только превратить этот квадрат в равновеликую фигуру Красного креста (составленную, как известно, из пяти примкнутых друг к другу равных квадратов).

Существует несколько способов выполнения такого построения; два из них показаны на рис. 109 и 110; оба построения начинают с того, что соединяют вершины квадрата с серединами противоположных сторон.

Важное замечание: превратить в равновеликий крест можно только такую фигуру серпа, которая составлена из двух дуг окружностей: наружного полукруга и внутренней четверти окружности соответственно большего радиуса *).

Итак, вот ход построения креста, равновеликого серпу. Концы *A* и *B* серпа (рис. 111) соединяют прямой;

*) Тот лунный серп, который мы видим на небе, имеет несколько иную форму: его наружная дуга — полуокружность, внутренняя же — п о л у э л л и п с. Художники часто пзображают лунный серп неверно, составляя его из дуг окружностей.

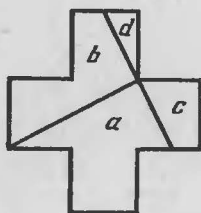


Рис. 110.

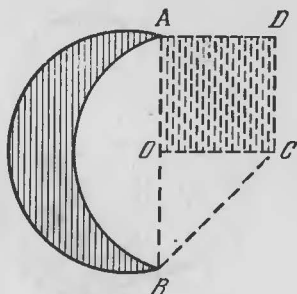


Рис. 111.

в середине O этой прямой восставляют перпендикуляр и откладывают $OC = OA$. Равнобедренный треугольник OAC дополняют до квадрата $OADC$, который превращают в крест одним из способов, указанных на рис. 109 и 110.

129. Указанная дополнительная возможность не облегчает задачу: все равно требуется шесть разрезающих плоскостей. В самом деле, в н у т р е н н и й кубик из числа тех 27, на которые надо разрезать большой куб, имеет шесть граней, и никакая разрезающая плоскость не может открыть сразу двух граней этого внутреннего кубика, как бы мы ни переставляли части.

130. Сначала посмотрим, каково может быть наименьшее число разрезов. Если мы провели один разрез, то доска распадается на две части. Следующим разрезом, если он рассечет о б е из них, мы получим 4 части. Если мы расположим их так, что третий разрез пересечет их все, то число частей снова удвоится, и после третьего разреза мы получим 8 частей. После четвертого разреза мы получим самое большее 16 частей (если разрез пересечет все получившиеся ранее части), после пятого — 32 части. Значит после пяти разрезов мы никак еще не сможем получить 64 отдельных квадратика. И лишь после шестого разреза, когда число частей опять удвоится, мы можем рассчитывать получить 64 отдельных квадратика. Значит менее чем шестью разрезами обойтись невозможно.

Но теперь надо еще показать, что шесть разрезов можно в действительности осуществить так, чтобы каждый раз число частей удваивалось и в результате получилось

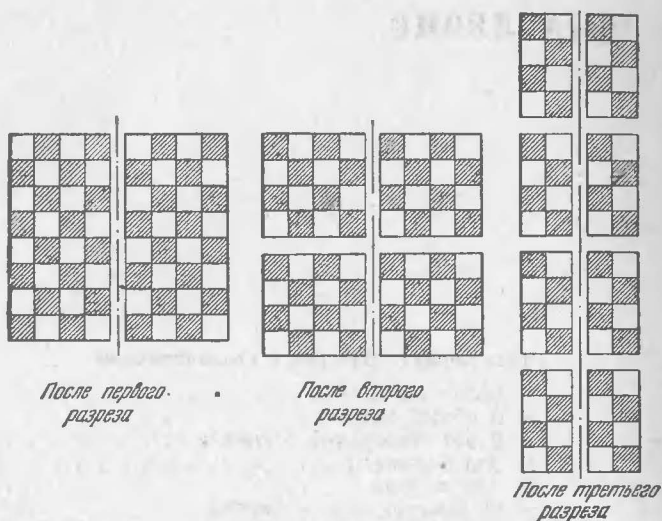


Рис. 112.

$2^6 = 64$ отдельных квадратика. Это уже нетрудно сделать: надо только следить, чтобы после каждого разреза все части оказывались равными и чтобы каждый очередной разрез разбивал каждую из частей пополам. На рис. 112 показаны первые три разреза.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава первая. Завтрак с головоломками

1. Белка на поляне	3
2. В общей кухне	5
3. Работа школьных кружков	6
4. Кто больше?	6
5. Дед и внук	7
6. Железнодорожные билеты	7
7. Полет вертолета	8
8. Тень	8
9. Задача со спичками	9
10. Коварный пенъ	9
11. Задача о декабре	10
12. Арифметический фокус	10
Решения головоломок 1—12	11
13. Зачеркнутая цифра	19
14. Отгадать число, ничего не спрашивая	20
15. Кто что взял?	21

Глава вторая. Математика в играх

Домино	24
16. Цепь из 28 костей	24
17. Начало и конец цепи	24
18. Фокус с домино	24
19. Рамка	24
20. Семь квадратов	24
21. Магические квадраты из домино	25
22. Прогрессия из домино	26
Игра в 15, или такен	26
23. Первая задача Лойда	32
24. Вторая задача Лойда	32
25. Третья задача Лойда	32
Крокет	32
26. Пройти ворота или крокировать?	32
27. Шар и столбик	33
28. Пройти ворота или заколоться?	33
29. Пройти мышеловку или крокировать?	33
30. Непроходимая мышеловка	33
Решения головоломок 16—30	33

Глава третья. Еще дюжина головоломок

31. Веребочка	41
32. Носки и перчатки	41
33. Долговечность волоса	42
34. Заработная плата	42
35. Лыжный пробег	42
36. Двое рабочих	42
37. Переписка доклада	42
38. Две зубчатки	42
39. Сколько лет?	43
40. Семья Ивановых	43
41. Приготовление раствора	43
42. Покупки	44
Решения головоломок 31—42	44

Глава четвертая. Умеете ли вы считать?

43. Умеете ли вы считать?	50
44. Зачем считать деревья в лесу?	52

Глава пятая. Числовые головоломки

45. За пять рублей — сто	55
46. Тысяча	55
47. Двадцать четыре	56
48. Тридцать	56
49. Недостающие цифры	56
50. Какие числа?	56
51. Что делили?	56
52. Деление на 11	56
53. Странные случаи умножения	57
54. Числовой треугольник	57
55. Еще числовой треугольник	57
56. Магическая звезда	57
Решения головоломок 45—56	58

Глава шестая. Зашифрованная переписка

57. Решетка	63
58. Как запомнить решетку?	67

Глава седьмая. Рассказы о числах-великанах

59. Выгодная сделка	71
60. Городские слухи	76
61. Лавина дешевых велосипедов	79
62. Награда	82
63. Легенда о шахматной доске	87
64. Быстрое размножение	91
65. Бесплатный обед	96
66. Перекладывание монет	100
67. Пари	104
68. Числовые великаны вокруг и внутри нас	108

Глава восьмая. Без мерной линейки

69. Измерение пути шагами	112
70. Живой масштаб	113
71. Измерение при помощи монет	114

Глава девятая. Геометрические головоломки

72. Телега	116
73. В увеличительное стекло	116
74. Плотничный уровень	116
75. Число граней	117
76. Лунный серп	118
77. Из 12 спичек	118
78. Из 8 спичек	118
79. Путь мухи	118
80. Найти затычку	119
81. Вторая затычка	119
82. Третья затычка	119
83. Продеть пятак	119
84. Высота башни	119
85. Подобные фигуры	119
86. Тень проволоки	120
87. Кирпичик	120
88. Великан и карлик	120
89. Два арбуза	120
90. Две дыни	120
91. Вишня	120
92. Модель башни Эйфеля	120
93. Две кастрюли	120
94. На морозе	121
Решения головоломок 72—94	121

Глава десятая. Геометрия дождя и снега

95. Дождемер	131
96. Сколько дождя?	133
97. Сколько снега?	134

Глава одиннадцатая. Математика и сказание о потопе

98. Сказание о потопе	137
99. Мог ли быть потоп?	138
100. Возможен ли Ноев ковчег?	139

Глава двенадцатая. Тридцать разных задач

101. Цепь	141
102. Пауки и жуки	141
103. Плащ, шляпа и галоши	141
104. Куриные и утиные яйца	141
105. Перелет	142
106. Денежные подарки	142
107. Две шашки	142
108. Двамя цифрами	142
109. Единица	142

110. Пятью девятками	142
111. Десятью цифрами	142
112. Четырьмя способами	142
113. Четырьмя единицами	142
114. Загадочное деление	142
115. Еще случай деления	143
116. Что получится?	143
117. В том же роде	143
118. Самолет	143
119. Миллион изделий	143
120. Число путей	143
121. Циферблат	143
122. Восьмиконечная звезда	144
123. Числовое колесо	144
124. Трехногий стол	144
125. Какие углы?	145
126. По экватору	145
127. В шесть рядов	145
128. Крест и полумесяц	145
129. Разрез куба	145
130. Еще разрез	146
Решения головоломок 101—130	146