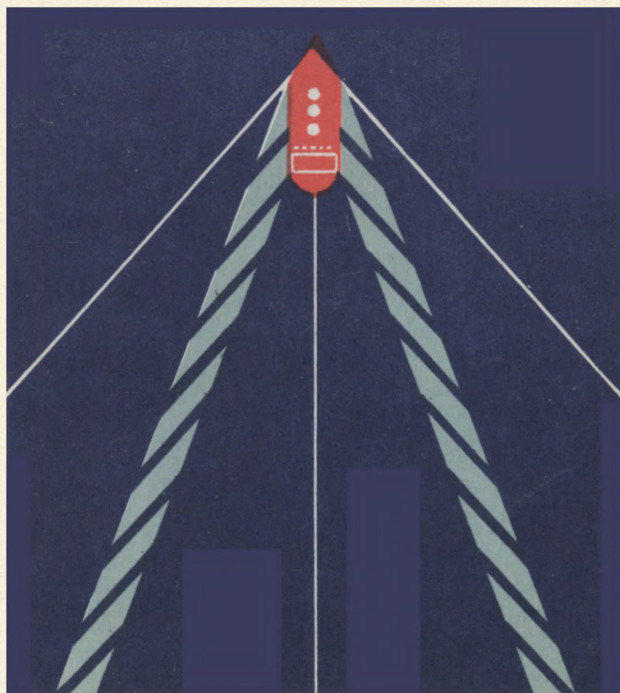




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •  
выпуск 5

И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ  
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

# ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ



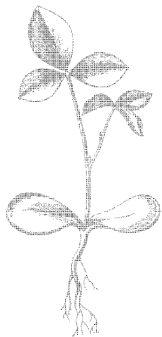


БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •  
выпуск 5

---

И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ  
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

# ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1980

22.3

С 48

УДК 530.1

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик **И. К. Кикоин** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), кандидат физ.-мат. наук

**И. Ш. Слободецкий** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, академик **В. М. Глушков**, академик **П. Л. Капица**, профессор **С. П. Капица**, член-корреспондент АН СССР **Ю. А. Осипьян**, член-корреспондент АН СССР **В. Ф. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, кандидат хим. наук **М. Л. Смолянский**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**, член-корреспондент АН СССР **И. С. Шкловский**.

**Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г.**

С 48 Задачи по физике. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 176 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 5) — 30 коп.

Сборник задач, для решения которых вполне достаточно знаний, не выходящих за рамки школьной программы. Это, однако, не простые задачи. Они требуют ясного понимания основных законов физики, умения применять эти законы и наконец просто сообразительности. Решение таких задач часто представляет собой маленькое самостоятельное исследование.

Большинство задач в сборнике касается различных реальных явлений природы. Все задачи снабжены решениями.

Для школьников, преподавателей, студентов.

С  $\frac{20400-110}{053(02)-80}$

135-80. 1704000000

ББК 22.3

53

С  $\frac{20400-110}{053(02)-80}$

135-80. 1704000000

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1980

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Каждый школьник знает, что нельзя изучить физику, не решая задач. Простые задачи разбирают на уроке, более сложные задаются на дом, еще более сложные, как говорят «нестандартные» задачи решают на олимпиадах. Большинство людей считает решение задач делом необходимым, но довольно скучным. В немалой степени это связано с тем, что в задачах, как правило, речь идет о идеализированных телах и системах, упрощенных до такой степени, что трудно поверить в то, что эти задачи имеют хотя бы какое-то отношение к реальному миру и что их решение может помочь в объяснении тех или иных интересных явлений, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни. В действительности же решение почти любой задачи может много дать не только для изучения законов, изложенных в учебнике, и в привитии навыков пользования этими законами, но и помочь понять то, что происходит в окружающем нас мире. Нужно только увидеть связь между упрощенной ситуацией, о которой идет речь в задаче, и реальными явлениями. Именно это мы и хотели показать читателям книги. Для сборника мы постарались отобрать те задачи, которые непосредственно связаны с реальными объектами и явлениями, или те, решение которых позволяло обсудить интересные вопросы современной физики и техники. По этой причине решения задач в ряде случаев представляют собой небольшие научно-популярные статьи. Так, например, задача о струе послужила поводом для рассказа о кумулятивных явлениях и т. д.

Пользуясь случаем, мы хотели бы выразить благодарность своим друзьям В. Е. Белонучкину, Ю. М. Бруку, И. Ф. Гинзбургу, С. М. Козелу, Г. Л. Коткину, А. Л. Стасенко, вместе с которыми много раз составляли задачи для олимпиад и обсуждали их решения. Мы благодарны также Ю. В. Пухначеву и Ю. П. Попову, сделавшим для книги шуточные рисунки.

*Авторы*



В июле 1980 г., когда эта книга готовилась к печати, трагически погиб в автомобильной катастрофе один из ее авторов — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института физики высоких давлений АН СССР Иосиф Шаевич Слободецкий.

И. Ш. Слободецкий был одним из инициаторов создания журнала «Квант». Будучи членом редакционной коллегии журнала, он вел активную организационную и научную работу в отделе физики, был бессменным руководителем раздела «Задачник «Кванта»» по физике.

Огромный вклад внес И. Ш. Слободецкий в создание серии «Библиотечка «Квант»». С самого начала работы редакционной коллегии этой серии он являлся ее ученым секретарем.

Глубокая профессиональная эрудиция физика-теоретика, искреннее стремление сделать как можно больше полезного людям, редкий дар общения, необыкновенная самоотдача — все эти качества Иосифа Шаевича Слободецкого вызывали неизменную любовь и уважение к нему друзей и коллег по работе.

**Редакционная коллегия**

## ЗАДАЧИ

«Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы, но потому, что они вещи не входят в круг наших понятий.»

К. Прутков. «Плоды раздумий»

### МЕХАНИКА

1. В киноаппарате и кинопроекторе проходит 16 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 м. Изображения колес делают 4 оборота в секунду. Какова скорость автомобиля?

2. Если смотреть на свет сквозь две наложенные друг на друга гребенки с разной частотой зубьев, то светлые участки будут чередоваться с темными. С какой скоростью будут перемещаться светлые места, если одну из гребенок двигать со скоростью 1 см/с? Неподвижная гребенка имеет 5 зубьев на сантиметр, а движущаяся — 6.

3. На рис. 1 показана часть траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту. В точке А

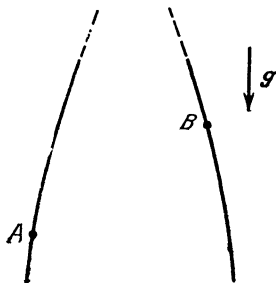


Рис. 1.

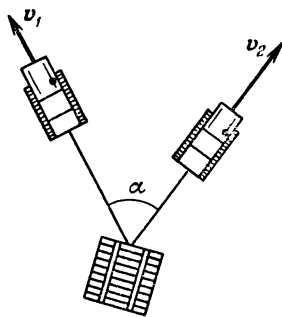


Рис. 2.

скорость тела была равна 20 м/с. Используя рисунок, найти, сколько времени тело двигалось из точки А в точку В.

4. Тяжелый ящик перемещают с помощью двух тракторов, движущихся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ ,

составляющими угол  $\alpha$ . Как направлена и чему равна скорость ящика в тот момент, когда канаты параллельны векторам  $v_1$  и  $v_2$  (рис. 2)?

5. Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее катера?

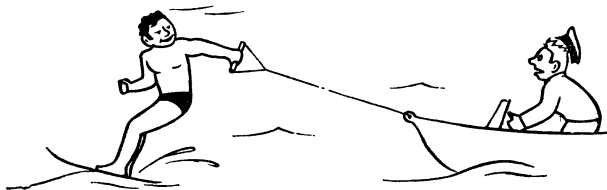


Рис. 3.

6. Тяжелый диск радиуса  $R$  скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены (рис. 4). Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна  $\omega$ , а угол между нитями  $\alpha$ . Какова в этот момент скорость центра диска?

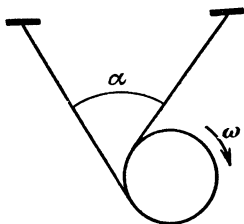


Рис. 4.

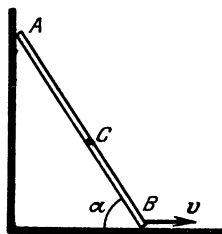


Рис. 5.

7. Концы  $A$  и  $B$  стержня  $AB$  скользят по сторонам прямого угла (рис. 5). Как зависит от угла  $\alpha$  ускорение середины стержня (точки  $C$ ), если конец  $B$  движется с постоянной скоростью  $v$ ? Длина стержня равна  $l$ .

8. Тринадцать одинаковых шестеренок, оси которых закреплены, сцеплены друг с другом, образуя кольцо. На какой наибольший угол можно повернуть одну из шестеренок, если каждую из них при неподвижной соседней можно повернуть за счет неточного сцепления на угол  $\alpha$ ?

9. Спутник пролетает над Новосибирском в 12.00, а над Москвой в 15.00. Где он будет в 18.00, в 19.30? Время всюду московское.

10. Каким было бы число дней в году, если бы Земля вращалась вокруг собственной оси или обращалась вокруг Солнца в противоположную сторону?

11. Студент, институт которого находится рядом со станцией кольцевой линии метрополитена, живет у станции метро, также находящейся на кольцевой линии, но в противоположном конце города, так что ему безразлично, в какую сторону ехать. Поэтому он всегда садится в тот поезд, который подойдет первым. Количество поездов, идущих как в одну, так и в другую сторону, одинаково. Студент, однако, заметил, что он чаще ездит на поезде, идущем по часовой стрелке. Чем это можно объяснить?

12. Из двух портов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно  $l$ , одновременно выходят два катера, один из которых плывет со скоростью  $v_1$ , а другой — со скоростью  $v_2$ . Направление движения первого катера составляет угол  $\alpha$ , а второго — угол  $\beta$  с линией  $AB$  (рис. 6). Каким будет наименьшее расстояние между катерами?

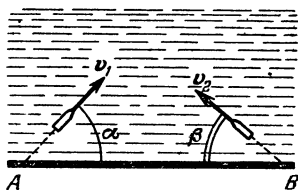


Рис. 6.

13. За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью  $v_1$ , гонится собака, скорость которой  $v_2$  постоянна по абсолютной величине и направлена все время на лису. В момент, когда скорости  $v_1$  и  $v_2$  оказались взаимно перпендикулярными, расстояние между лисой и собакой было равно  $l$ .

Каково было ускорение собаки в этот момент?

14. Космонавты, находясь вблизи одной из звезд некоторого звездного скопления, видят, что все другие звезды скопления удаляются от них со скоростями, пропорциональными расстояниям до этих звезд. Какую картину движения звезд увидят космонавты, оказавшись вблизи какой-нибудь другой из звезд этого скопления?

15. Имеется однородный шнур со взрывчатым веществом. Скорость распространения взрывной волны



по воздуху  $c$ , а скорость горения шнура  $v$  ( $v < c$ ). Найти форму линии, по которой нужно расположить шнур, чтобы волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно?

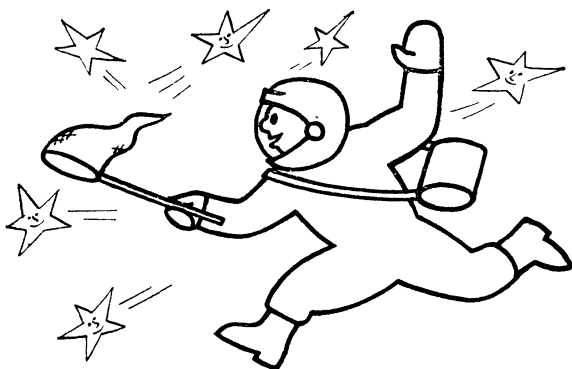


Рис. 7.

16. В стеклянную цилиндрическую пробирку, расположенную вертикально, вдвинут снизу ерш для мытья пробирок. Что произойдет с ершом, если трубку слегка покачивать в вертикальной плоскости?

17. Человек, чтобы не поскользнуться на обледенелой горке, сбегает с нее. Почему это целесообразно?

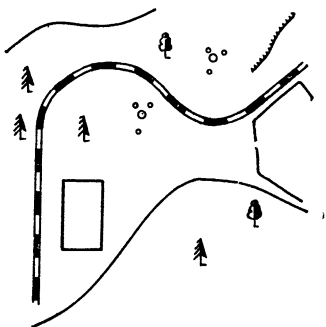


Рис. 8.



Рис. 9.

18. Железная дорога идет так, как показано на рис. 8. Какой участок пути подвергается наибольшему разрушению при движении поездов?

19. Шарик массы  $m$  прикреплен к стержню длины  $l$ . Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси (рис. 9). Нарисуйте примерный график зависимости угла  $\alpha$ , образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости  $\omega$  вращения оси.

20. Почему конькобежцы размахивают руками при беге?

21. В какую сторону наклоняются при повороте пароход, самолет, подводная лодка? Почему?

22. Гантелька длины  $l$  стоит в углу, образованном гладкими плоскостями (рис. 10). Нижний шарик гантельки смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найти

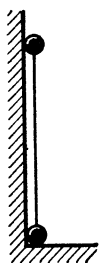


Рис. 10.

скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

23. Для измерения ускорения используется изогнутая по дуге окружности трубка, заполнен-



Рис. 11.

ная водой, в которой имеется пузырек воздуха (рис. 11). Как связано положение пузырька с ускорением трубки?

24. Знаменитый американский физик Роберт Вуд построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд со ртутью. В каких пределах можно было изменять фокусное расстояние получившегося ртутного зеркала телескопа при изменении угловой скорости  $\omega$  вращения сосуда в пределах  $2 \div 4$  рад/с.

25. График зависимости силы сухого трения от скорости изображен на рис. 12. Используя этот график, объясните, почему звучит скрипичная струна, когда по ней равномерно ведут смычком.

26. Почему при резком торможении автомобиль теряет управление (машину «заносит»)?

27. Почему легче проткнуть шилом дыру, если шило вращается? Почему нужно вращать гвоздь, чтобы вытащить его из стены?

28. Очень тонкую нить, собранную в клубок, начинают вытягивать вверх за один конец с постоянной скоростью  $v$ . Масса единицы длины нити равна  $\mu$ . С какой силой приходится тянуть за нить в тот момент, когда длина вытянутого конца  $l$ ?

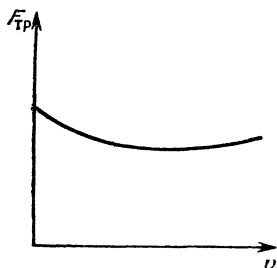


Рис. 12.



Рис. 13.

29. Две одинаковые тележки, на которых находятся два одинаковых дворника, движутся по инерции с одинаковыми скоростями параллельно друг другу. В некоторый момент времени на тележки начинает падать снег равномерным потоком. Дворник,

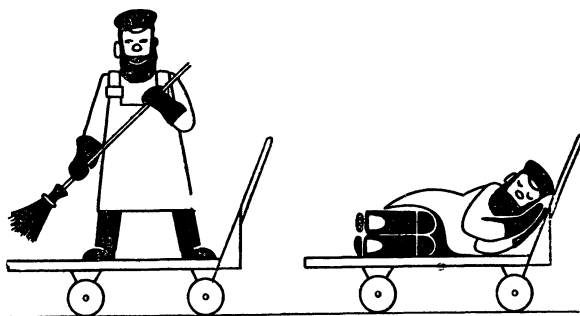


Рис. 14.

стоящий на одной из тележек, сбрасывает снег все время вбок, а на второй тележке дворник спит. Какая из тележек быстрее пройдет одно и то же расстояние?

30. Для межзвездных путешествий ракета должна достигать скорости, сравнимой со скоростью света. Оценить возможность использования для такой ракеты химического двигателя, действующего на реак-

ции окисления водорода, если теплотворная способность водорода равна  $1,1 \cdot 10^8$  Дж/кг.

Какой должна быть масса топлива для достижения ракетой с массой  $m = 20$  т скорости 0,01 скорости света?

31. Плоская бесконечная струя толщины  $d_0$  падает под углом  $\alpha$  на плоскость (рис. 15). Скорость струи равна  $v$ , ее плотность  $\rho$ . На какие струи распадается струя?

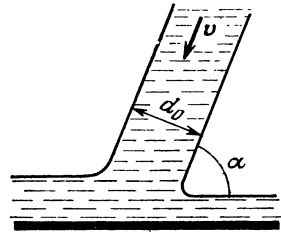


Рис. 15.

32. По водопроводной трубе течет вода со скоростью  $v = 10$  м/с. Докажите, что если резко (мгновенно) закрыть кран, давление на кран станет равным 150 атм. (Из-за этого нельзя, например, даже при аварии слишком быстро перекрыть поток воды в водосливе.)

33. Труба радиуса  $r$  заполнена веществом плотности  $\rho_0$ . Невесомый поршень, на который действует постоянная сила  $F$ , вдвигаясь в трубу, уплотняет это вещество (рис. 16). Уплотнение происходит скачком, то есть в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью  $s$  поверхность, справа от которой плотность вещества  $\rho_0$ , а слева больше чем  $\rho_0$ . В начальный момент поверхность совпадает с плоскостью поршня. Найти скачок  $\Delta\rho$  плотности вещества.

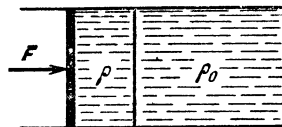


Рис. 16.

34. Землетрясения вызывают иногда появление громадных отдельных волн — цунами, распространяющихся на огромные расстояния. Длина таких волн во много раз превышает глубину океана, а высота достигает нескольких десятков метров. При таких волнах в движение приходит вся вода под волной вплоть до океанского дна. Аналогичной волной является приливная волна. Найти скорость цунами, полагая среднюю глубину океана  $h_0 = 5$  км.

35. Отклоните стул, стоящий на достаточно гладком полу, на небольшой угол и отпустите. Объясните наблюдаемое движение стула.

36. Почему пуля, вылетевшая из ружья, не может отворить дверь, но пробивает в ней отверстие, в то время как давлением пальца дверь отворить легко, но проделать отверстие невозможно?

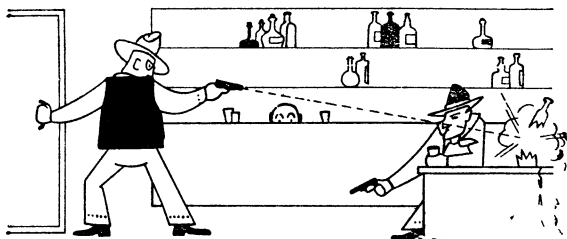


Рис. 17.

Почему пуля пробивает в пустом тонкостенном стакане лишь два маленьких отверстия, в то время как стакан, наполненный водой, разбивается при падении в него пули вдрызг?

37. Насос подает объем  $V$  воды в час на высоту  $H$  по трубе диаметром  $d$ . Какой величины должна быть мощность насоса? Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать объем  $V$  воды в час на высоту  $H$ ?

38. Модель вертолета, изготовленная в  $1/10$  натуральной величины, удерживается в воздухе при помощи мотора мощностью 30 Вт. Оцените, какой должна быть мощность двигателя вертолета, сделанного из тех же материалов, что и модель.

39. Найти коэффициент полезного действия водометного двигателя реактивного катера, если площадь входного отверстия двигателя  $S = 0,9 \text{ м}^2$ , а выходного —  $s = 0,02 \text{ м}^2$ .

40. Автомобиль массы  $m = 600 \text{ кг}$  трогается с места. Двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью  $N = 50 \text{ кВт}$ , коэффициент трения скольжения колес о дорогу  $\mu = 0,6$ . Оценить, за какое минимальное время автомобиль наберет скорость 100 км/час. Сопротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

41. Астронавты «Скайлэба» с помощью специального радиолокационного высотомера обнаружили, что

поверхность океана в районе «Бермудского треугольника» ниже нормального уровня на 25 метров (см., например, журнал «Наука и жизнь», 1976, № 9). Предполагая, что этот «прогиб» можно объяснить налившим под дном океана шаровой полости, заполненной водой, оценить радиус этой полости. Глубина океана  $H = 6$  км.

42. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте  $h = 760$  км над поверхностью Земли. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли  $H = 40\,000$  км и минимальным расстоянием от поверхности  $h = 760$  км. На сколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической орбите?

43. Два спутника,  $A$  и  $B$ , движутся по одной и той же круговой орбите на небольшом расстоянии друг от друга. Необходимо осуществить стыковку спутников. Удастся ли это сделать, если, включив двигатель, сообщить спутнику  $B$  импульс в направлении к спутнику  $A$ ?

44. Шар массы  $m$  налетает на покоящийся шар массы  $M$ . Найти, как зависит от отношения масс шаров энергия, которую теряет налетающий шар при упругом центральном столкновении.

45. Кубик, скользящий без трения по гладкому горизонтальному полу, ударяется одной из своих боковых граней о вертикальную стенку. Коэффициент трения кубика о стенку равен  $\mu$ . Под каким углом к стенке отскочит кубик, если до столкновения с ней он двигался по направлению, составляющему со стенкой угол  $\alpha$ ?

46. Почему футболистам было бы тяжело играть слабо накачанным или «перекачанным» мячом?

47. Атом, движущийся со скоростью  $v$  ( $v \ll c$ ), испускает фотон под малым углом  $\alpha$  к направлению своего движения. Доказать, что если частота излучения покоящегося атома равна  $\nu_0$ , а частота излучения движущегося атома равна  $\nu$ , то для видимого света  $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \approx \frac{v}{c} \cos \alpha$ . Скорость света равна  $c$ .

48. Почему обычно  $\gamma$ -кванты, излученные ядрами радиоактивного вещества, не могут поглотиться подобными же ядрами?

Известно, что внутренняя энергия ядра может иметь только определенные значения.

49. Машина, служащая для укатки дороги (каток), опирается на цилиндрические шины-катки. Спереди пять катков, а сзади семь. Как сделать так, чтобы давление всех шин-катков на грунт было одинаковым вне зависимости от профиля дороги и накачки шин?

50. На цилиндрический столб намотан один виток каната. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда за один из его концов тянут с силой  $F$ , за второй конец каната нужно тянуть с силой  $f$ . Как изменится сила  $f$ , если на столб будет намотано  $n$  витков каната ( $f$  не зависит от толщины каната)?

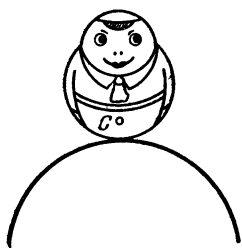


Рис. 18.

51. На верхнюю точку закрепленного шара радиуса  $R$  поставлен ванька-встанька (рис. 18). Нижняя поверхность игрушки — полушар радиуса  $r$ ; центр тяжести игрушки (точка  $C$ ) расположен на половине радиуса полушара. Упадет ли ванька-встанька с шара? Проскальзывания нет.

52. Концы пружины в нерастянутом состоянии закреплены. Как обработать пружину так, чтобы она стремилась сократиться?

53. К двум точкам прикреплены цепочка длины  $l$  и концы двух стержней, сумма длин которых тоже равна  $l$ , а свободные концы шарнирно связаны. Чей центр тяжести находится ниже — цепочки или стержней?

54. Какой стакан более устойчив — пустой или с сахаром?

55. Почему трещина в лопающихся трубах, когда в них зимой замерзает вода, всегда идет вдоль, а не поперек трубы?

56. Почему половую щетку значительно легче удерживать на пальце, чем палку той же длины?

57. Почему можно управлять движением велосипеда при езде «без рук»?

58. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие сверху воду

(рис. 20). Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найти массу колокола, если радиус его равен  $R$ , а плотность воды  $\rho$ .

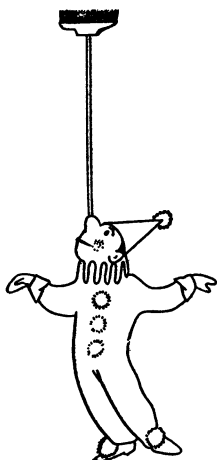


Рис. 19.

59. Сообщающиеся сосуды, один из которых суживается, а другой расширяется кверху, заполнены водой (рис. 21). Как будет меняться количество воды в сосудах при нагревании одного из них?

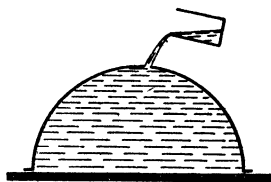


Рис. 20.

60. Два одинаковых открытых сосуда соединены двумя одинаковыми трубками и доверху заполнены водой. Трубки закрыты кранами  $K_1$  и  $K_2$  (рис. 22).

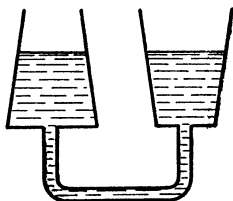


Рис. 21.

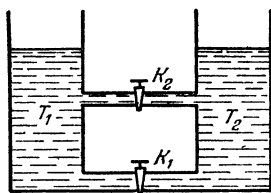


Рис. 22.

Температура воды в сосудах поддерживается постоянной, причем  $T_1 > T_2 > 4^\circ\text{C}$ . Что будет происходить с водой в сосудах, если сначала открыть кран  $K_1$ , а затем (при открытом кране  $K_1$ ) открыть кран  $K_2$ ?

61. Три открытые бочки наполнены до половины водой и установлены на разной высоте (рис. 23). Из каждой бочки проведены вверх трубки, соединяю-



щия вместе. Трубки тоже заполнены водой. Куда будет перетекать вода по трубкам, если одновременно открыть краны  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$ ?

62. Вода переливается через край плотины (рис. 24). Во время паводка водосброс (объем воды,

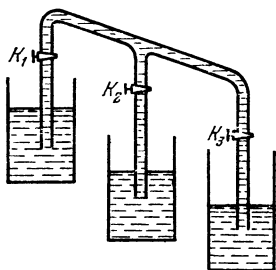


Рис. 23.

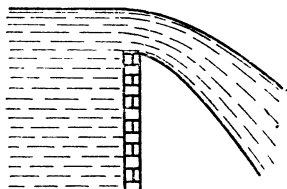


Рис. 24.

который проходит в секунду) увеличивается втрое. Во сколько раз возрастает при этом уровень воды над плотиной?

63. Многие из вас замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.

64. Под открытым водопроводным краном стоит наполняющаяся водой ванночка. В ванночку под струю воды помещают легкий шарик. Останется ли шарик под струей?



◦ ЯНУС ДВУАКИИ ◦

Рис. 25.

65. Почему почти одним и тем же движением губ, выдыхая воздух, можно согреть руки и остудить чай?

66. Почему «кочуют» песчаные дюны?

67. При испытании реактивного снаряда, установленного в хвосте самолета для защиты его от нападения сзади, был обнаружен удивительный факт. При пуске снаряда он разворачивался и догонял самолет. Как можно объяснить это явление?

68. Почему реки, текущие даже по совершенно плоской однородной почве, изгибаются?

Для простоты рассмотрите реку, текущую вдоль экватора.

69. В воде покоится лодка. Человек, находящийся на ней, переходит с кормы на нос. Как будет двигаться лодка, если сила сопротивления при ее движении пропорциональна ее скорости.

## ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

70. На монете начерчена мелом прямая линия. Останется ли она прямой, если монету нагреть?

71. Свинцовый лист, покрывавший южную часть крыши Бристольского собора, сполз вниз по крыше на 50 см в течение двух лет. Сползание листа началось сразу же после того, как им была покрыта крыша. Попытка остановить сползание листа вколачиванием гвоздей в стропила не удалась, потому что сползающий лист вырывал гвозди. Крыша была не крутая, и свинцовый лист мог бы оставаться на ней, не скользя под действием силы тяжести вниз. Почему же сполз лист?

Попробуйте оценить, на сколько сползает за 10 дней свинцовый лист, если максимальная и минимальная температуры равны соответственно  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  и  $T_2 = 10^\circ\text{C}$ , длина листа при  $T_2 = 10^\circ\text{C}$  равна  $l_0 = 1$  м, угол наклона крыши  $\varphi = 30^\circ$ , коэффициент трения листа о стропила  $\mu = 0,7$ . Коэффициент линейного расширения свинца  $\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ .

72. Запах пахучих веществ распространяется обычно по комнате благодаря конвекции. Однако в совершенно спокойной атмосфере возможна и диффузия, связанная с беспорядочным движением молекул. За счет диффузии происходят многие процессы в жидкостях, кристаллах и газах. Как быстро происходит диффузия? Скажем, если запах пахучего вещества распространился на 1 м за 3,5 минуты, то за какое время он распространился на 10 м?

Как диффузия зависит от температуры?

73. Полость колбы литрового термоса заполнена гелием, давление  $p$  которого при комнатной температуре равно  $10^{-5}$  атм ( $1 \text{ Н/м}^2$ ). При этом давлении

длина свободного пробега молекул газа велика по сравнению с расстоянием между стенками колбы. Оценить время, за которое чай, которым наполнен такой термос, остынет от  $90^{\circ}\text{C}$  до  $80^{\circ}\text{C}$ .

74. Спутник Земли радиуса  $r = 2$  м наполнен смесью кислорода и азота, причем масса азота составляет 75% массы всего газа. Микрометеорит пробивает в нем отверстие площадью  $S = 1$  см<sup>2</sup>. За какое время давление в спутнике уменьшится на 5%, если температура в спутнике комнатная?

75. Найти скорость испарения с единицы поверхности воды в вакууме при температуре  $20^{\circ}\text{C}$ . Давление насыщенных паров при этой температуре равно 2,3 кПа.

76. Было обнаружено, что в запаянной  $U$ -образной трубке уровни воды в обоих коленах трубки остаются на одинаковой высоте и при наклоне трубки. Что находится в коленах трубки над поверхностью воды?

77. В закрытом сосуде имеется несколько капель жидкости разной величины. Что произойдет с ними через достаточно продолжительное время?

78. Под стеклянным колпаком, из которого выкачан воздух, находится кювета с водой. В ней вертикально установлена капиллярная трубка. Известно, что давление насыщенных паров над вогнутой поверхностью жидкости несколько меньше, чем над плоской поверхностью. Поэтому можно предположить, что жидкость в трубке будет испаряться и конденсироваться на поверхности воды в кювете. Образовавшийся поток пара можно использовать для приведения в движение вертушки. Все ли верно в приведенном рассуждении?

79. Хватит ли мощности гидроэлектростанции, чтобы испарить воду, проходящую через ее турбины?

80. Почему пар обжигает сильнее воды той же температуры?

81. Электрическим кипятильником мощностью  $W = 500$  Вт нагревают воду в кастрюле. За две минуты температура воды увеличивалась от  $85^{\circ}\text{C}$  до  $90^{\circ}\text{C}$ . Затем кипятильник выключили и за одну минуту температура воды упала на один градус. Сколько воды находится в кастрюле? Удельная теплоемкость воды равна  $4,19 \cdot 10^3$  Дж/кг  $\cdot$  К.

82. Волейбольный мяч массой 200 г и объемом 8 л накачан до избыточного давления 0,2 атм. Мяч был подброшен на высоту 20 м и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оцените максимальную температуру воздуха в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха 300 К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме  $c_V = 0,7$  кДж/кг·К.

83. Влажный воздух, который переносится ветром, дующим с побережья Тихого океана через вершину Кордильер, адиабатно расширяется, поднимаясь вверх, и охлаждается. При этом пары, находящиеся в



Рис. 26.

воздухе, выпадают в виде осадков. Оцените, на сколько отличаются температуры у подножья по обе стороны Кордильер, если влажность у побережья  $\varphi = 60\%$ , а температура  $T_1 = 25^\circ\text{C}$ . При такой температуре давление насыщенных водяных паров  $p_n = 3,4$  кПа.

84. Почему, когда, купаясь в жаркий день, вы входите в воду, вода кажется холоднее воздуха, а когда выходите, то наоборот?

85. Почему тонкая медная проволока плавится в пламени газовой печи, в то время как медный гвоздь даже не раскаляется докрасна?

86. Почему опытные хозяйки предпочитают жарить на чугунных, а не на алюминиевых сковородах?

87. Почему металлические предметы, находящиеся в комнате, на ощупь кажутся холоднее, чем деревянные?

88. Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго, а «стряхнуть» его можно практически сразу же после измерения температуры?

89. Каждый квадратный метр поверхности тела, нагретого до температуры  $T$ , излучает за единицу

времени энергию  $W = \sigma T^4$ , где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ . На каком расстоянии  $R$  от Солнца расплавится железный космический корабль, если плотность потока солнечного излучения (мощность, проходящая через единицу площади) на орбите Земли  $E_0 = 1400 \text{ Вт/м}^2$ ? Температуру плавления железа принять равной  $T = 1535 \text{ К}$ , расстояние от Земли до Солнца  $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$ .

90. На брусок льда надета проволочная петля, к нижней части которой подвешен груз. Проволока начинает сравнительно быстро разрезать лед, так как он плавится под проволокой и вновь смерзается над ней. Это явление происходит от того, что при повышении давления температура плавления льда понижается и лед под проволокой оказывается при температуре выше, чем температура плавления льда при повышенном давлении. Однако, если петлю сделать из капроновой нити того же диаметра, то лед практически не режется. Почему?

91. Оцените максимальную толщину ледника.

92. При неправильной регулировке двигателя внутреннего сгорания иногда вместо сравнительно медленного сгорания горючей смеси начинается так называемая детонация, при которой смесь сгорает быстро, со взрывом. Почему при этом падает к. п. д. двигателя?

93. Для отопления здания используется теплота, которая отдается воздуху при работе теплового двигателя. Этот двигатель приводит в действие холодильную машину, которая отнимает теплоту от грунтовых вод и отдает ее воздуху в комнате. Определить теоретический к. п. д. такого цикла отопления, если температура в котле теплового двигателя  $T_1 = 210^\circ \text{С}$ , температура воды в батарее  $T_2 = 60^\circ \text{С}$ , а температура грунтовых вод  $T_3 = 10^\circ \text{С}$ .

94. Почему брезентовая палатка хорошо защищает от дождя, но если во время дождя к потолку палатки дотронуться рукой, потолок начинает «протекать»?

95. Два мыльных пузыря радиусов  $r_1$  и  $r_2$  сливаются в один пузырь радиуса  $r_3$ . Найти атмосферное давление, если поверхностное натяжение мыльной пленки равно  $\sigma$ .

96. Сложенные вместе смоченные оконные стекла практически невозможно отделить друг от друга, если попытаться оторвать одно стекло от другого. Почему?

97. На поверхности воды плавают две спички, которые предварительно до половины были опущены в парафин. Оказалось, что как чистые, так и покрытые парафином концы спичек притягиваются между собой, а «разноименные» концы отталкиваются. Почему?

98. В сосуд с водой опускают Г-образный стеклянный капилляр радиуса  $r$  (рис. 27). Температурный

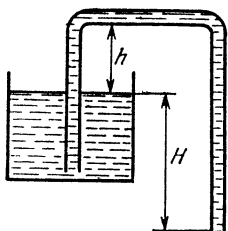


Рис. 27.

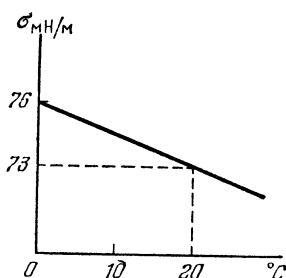


Рис. 28.

ход коэффициента поверхностного натяжения показан на рис. 28.

В каком диапазоне значений температуры вода вытечет из сосуда?

99. В условиях невесомости жидкость, помещенная в стеклянный цилиндрический сосуд с радиусом основания  $R_1$ , приняла форму, показанную на рис. 29, а. Свободная поверхность жидкости имела форму сферы с радиусом  $R_0$ . Та же жидкость, помещенная в стеклянный сосуд радиуса  $R_2$  на Земле, приняла форму, показанную на рис. 29, б. Свободная поверхность жидкости была плоской. Определить высоту уровня жидкости в сферическом сосуде. Какую форму будет иметь жидкость в сферическом сосуде, если радиус сосуда больше или меньше  $R_2$ ?

100. Говоря о хорошо обтекаемом теле, имеют в виду, что оно имеет каплевидную форму (рис. 30).

Но «каплевидна» ли такая форма? Мгновенные фотографии падающих капель \*) (рис. 31) показывают,

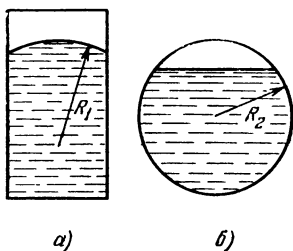


Рис. 29.

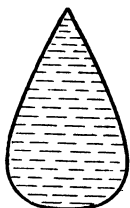


Рис. 30.

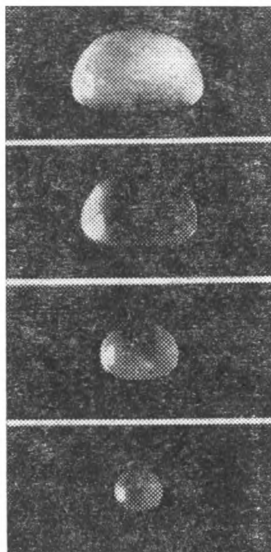


Рис. 31.

что маленькие капли сферичны, а большие похожи на сдобную булочку. Почему капля принимает такую форму? Оцените максимальный размер капель.

### ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

101. Внутри гладкой сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы для того, чтобы шарик удерживался в ее верхней точке? Диаметр сферы равен  $d$ , заряд шарика  $q$ , его масса  $m$ .

102. Подсчитать среднюю плотность  $\rho$  электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна  $100 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ , а на высоте  $h = 1,5 \text{ км}$  эта напряженность падает до  $25 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$ .

\*) Фотографии взяты из журнала «Scientific American», v. 190, 1974.

**103.** При какой разности потенциалов между электродами зажигается неоновая лампочка, если энергия ионизации неона  $W = 21,5$  эВ, а среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами газа  $l = 0,4$  мкм? Электроды имеют вид больших пластинок, расположенных на расстоянии  $d = 3$  мм друг от друга.

**104.** Найдите заряд заземленного металлического шара радиуса  $r$ , если на расстоянии  $l$  от его центра находится точечный заряд  $q$ .

**105.** В однородном заряженном шаре имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии  $a$  от центра шара. Найти напряженность электрического поля в различных точках полости, если плотность заряда равна  $\sigma$ .

**106.** Какую наибольшую разность потенциалов можно получить, имея батарейку с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и два одинаковых конденсатора?

**107.** Между каждой парой из  $n$  данных точек включен конденсатор емкостью  $C$ . Чему будет равна емкость между двумя произвольными точками?

**108.** Шар, изговленный из твердого диэлектрика, поместили в однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$ . При этом диэлектрик оказался полностью поляризованным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, найти напряженность электрического поля в центре шара и в точках на расстоянии  $r$  от центра шара ( $r$  меньше радиуса шара).

Молекулы диэлектрика можно представить как гантели длины  $l$  с зарядами  $+q$  и  $-q$  на концах. Число молекул в единице объема равно  $n$ .

**109.** Имеется равномерно заряженный отрезок  $AB$ . Как направлена напряженность электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке  $C$ : по медиане треугольника  $ABC$ , по его биссектрисе, по высоте, ни по одной из этих линий?

**110.** Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится точечный заряд  $q$ . Площадь пластин бесконечно велика, расстояние между ними равно  $d$ . Первоначально заряд находится на расстоянии  $d/3$  от левой пластины. Какой заряд пройдет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряда  $q$  в новое положение на расстоянии  $d/3$  от правой пластины?



111. Для определения небольших емкостей иногда пользуются мостиковой схемой, изображенной на рис. 32. Язычок переключателя колеблется с частотой  $\nu$ . Какова емкость  $C$ , если сопротивление переменного резистора равно  $R$ , а постоянных —  $R_1$  и  $R_2$ ? Стрелка гальванометра не отклоняется.

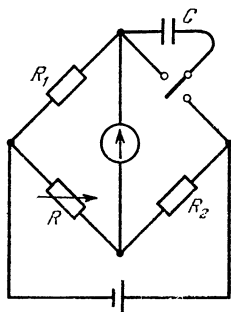


Рис. 32.

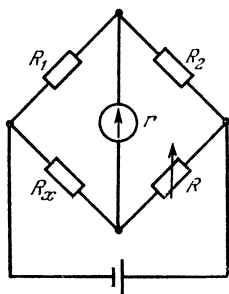


Рис. 33.

112. Схему, изображенную на рис. 33, применяют обычно для измерения неизвестного сопротивления  $R_x$ . Как, используя подобную схему, измерить сопротивление  $r$  самого гальванометра, если второго гальванометра нет?

113. В схеме (рис. 34) все вольтметры одинаковы. Э. д. с. батареи  $\mathcal{E} = 9$  В, ее внутреннее сопротивление мало. Верхний вольтметр показывает  $U_1 = 2$  В. Что показывают остальные вольтметры?

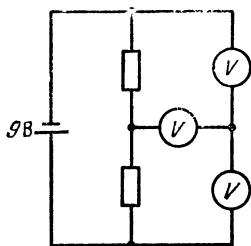


Рис. 34.

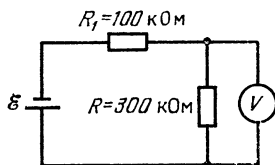


Рис. 35.

114. В схеме, изображенной на рис. 35, вольтметр измеряет напряжение на резисторе с сопротивлением  $R = 300$  кОм. Каким должно быть сопротивление

вольтметра для того, чтобы его показания отличались не более чем на 2% от действительного значения  $U_R$ ?

115. Если вольтметр подключен параллельно верхнему резистору с сопротивлением  $r_1$  (рис. 36), то он покажет 6 В, если параллельно нижнему резистору с сопротивлением  $r_2$ , то 4 В, а если его подключить к точкам А и В, то он покажет 12 В. Каковы в действительности напряжения на резисторах?

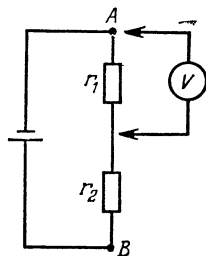


Рис. 36.

116. Как измерить величину неизвестного сопротивления, имея вольтметр и амперметр с неизвестными внутренними сопротивлениями?

117. На рис. 37 изображены схемы для измерения сопротивления резистора с помощью амперметра и вольтметра. По какой схеме выгоднее включить приборы, чтобы измерить сопротивление более точно?

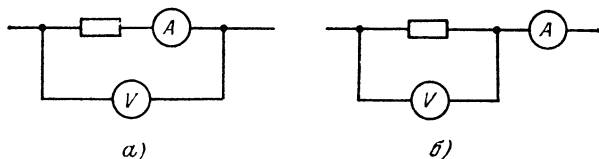


Рис. 37.

118. На рис. 38 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку включают в цепь, показанную на рис. 39. Найти мощность, выделяющуюся на лампочке.

119. На рис. 40 приведена вольт-амперная характеристика стабилотрона С. Каким будет напряжение на нагрузке в цепи, показанной на рис. 41? Как будет меняться напряжение на нагрузке при изменении напряжения  $U$  сети на  $\pm 10\%$ ?

120. На рис. 42 показана вольт-амперная характеристика дуги. Каким будет ток в цепи, если дугу подключить к источнику напряжения  $U_0 = 80$  В последовательно с резистором, сопротивление которого  $R = 500$  Ом?

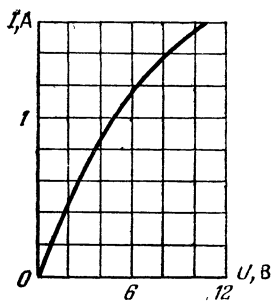


Рис. 38.

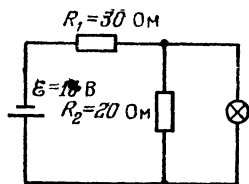


Рис. 39.

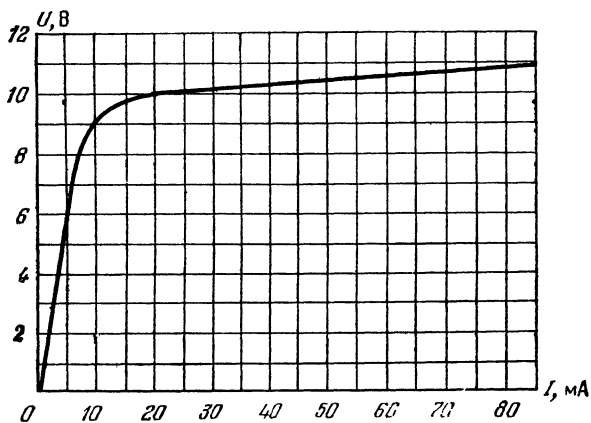


Рис. 40.

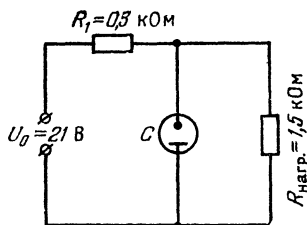


Рис. 41.

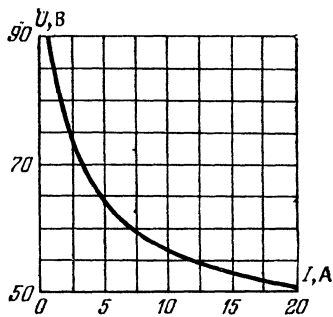


Рис. 42.

121. Можно ли две лампочки в 45 и 75 Вт, рассчитанные на 127 В, включить последовательно в сеть 220 В, если допустимо перенапряжение не более 10%? Вольт-амперная характеристика лампы мощностью 100 Вт приведена на рис. 43.

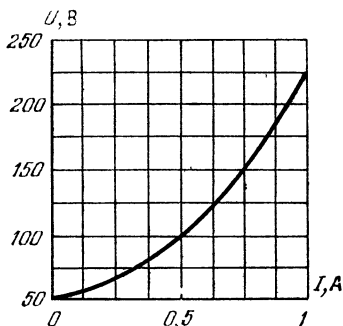


Рис. 43.

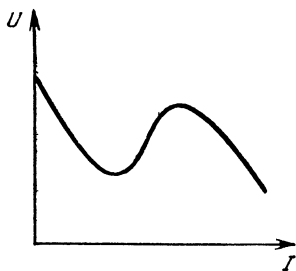


Рис. 44.

122. Источник электроэнергии имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 44 ( $U$  — напряжение на источнике,  $I$  — ток, текущий через него). Нарисовать график зависимости напряжения на резисторе, на который замкнут этот источник, от величины сопротивления этого резистора.

123. Для питания прибора напряжение на его входе нужно устанавливать как можно точнее. Для этого используются два реостата, соединенных так, как показано на рис. 45. Длины реостатов одинаковы, а сопротивление одного из них в 10 раз больше сопротивления другого. Как поступить, чтобы установить напряжение как можно точнее?

Во сколько раз точность установки напряжения будет больше, чем в том случае, когда используется лишь один реостат? Как включить реостаты, если для питания приборов нужно устанавливать поточнее не напряжение, а ток?

124. Если терморегулятор электрического утюга поставлен в положение «капрон», то утюг периодически включается на  $\tau_1 = 10$  с и выключается на

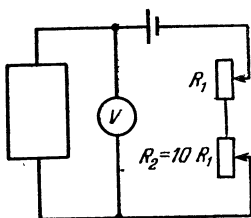


Рис. 45.

$\tau_2 = 40$  с. Поверхность утюга при этом нагревается до температуры  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ . Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то утюг периодически включается на  $\tau'_1 = 20$  с и выключается на  $\tau'_2 = 30$  с. Определить установившуюся температуру  $T_2$  поверхности утюга в этом положении терморегулятора. Найти, до какой температуры нагреется включенный утюг, если терморегулятор выйдет из строя.

Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

125. Длина нити накаливания электрической лампочки равна  $l$ , а диаметр нити  $d$ . Какими должны быть длина  $l_1$  и диаметр  $d_1$  нити лампочки, рассчитанной на то же напряжение сети с вдвое большим световым потоком, если к. п. д. обеих лампочек одинаков?

126. К середине проволоки, натянутой между двумя опорами, подвешивается груз. Почему при подключении концов проволоки к источнику напряжения груз начинает колебаться и эти колебания не затухают до тех пор, пока проволока замкнута на источник?

127. Удельная теплота сгорания водорода  $q = 119\,700$  кДж/кг. При каком минимальном напряжении на электродах может происходить электролиз воды?

128. При измерении э. д. с. старой батареи для карманного фонарика вольтметр показал 4,3 В, однако лампочка от этой батарейки не горит. Почему?

129. Для получения мощных световых импульсов через газоразрядную лампу разряжают батарею конденсаторов большой емкости, заряженную до разности потенциалов  $U$ . Почему для этой же цели обычно не используется батарея гальванических элементов с э. д. с., равной  $U$ ?

130. Почему лампочка накаливания сгорает обычно при включении?

131. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$  помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением  $\rho$ . Жидкость движется с постоянной скоростью  $v$  параллельно пластинам. Конденсатор

находится в магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной перпендикулярно к скорости жидкости и параллельно плоскости пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление  $R$ ?

132. Электронно-лучевая трубка с ускоряющим напряжением  $U$  помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной вдоль оси трубки. На экране при этом наблюдается небольшое расплывчатое пятно. Если менять величину индукции, то

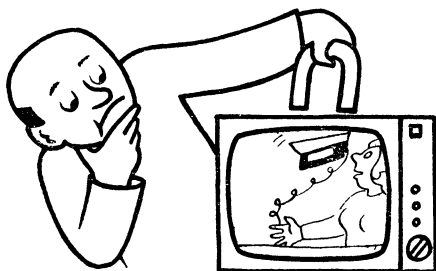


Рис. 46.

можно заметить, что при некоторых значениях  $B_0, 2B_0, 3B_0, \dots$  электронное пятно фокусируется — собирается в точку. Объясните это явление. Как с помощью такого эксперимента определить отношение заряда электрона к его массе?

133. Сверхпроводящее кольцо, по которому течет ток, изгибается в две окружности в виде восьмерки и затем складывается вдвое. Как меняется ток в кольце и магнитное поле в центре кольца?

134. В камере ускорителя по окружности радиуса  $R$  движется очень тонкий пучок протонов. Величина тока в начальный момент  $I_0$ , полное число частиц в камере  $n$ . Магнитный поток через неизменяющуюся орбиту пучка изменяется со скоростью  $\dot{\Phi}$  ( $\Phi = \dot{\Phi}t$ ). Какой станет величина тока после того, как частицы сделают один оборот? Скорость частиц остается много меньше скорости света.

135. Две катушки с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  соединены параллельно. Какими будут максимальные токи в катушках, если параллельно им подключить

конденсатор с емкостью  $C$ , предварительно заряженный до напряжения  $U$ ?

136. Две длинные однослойные сверхпроводящие катушки с числами витков  $n_1$  и  $n_2$ , длинами  $l_1$  и  $l_2$  и сечениями  $S_1$  и  $S_2$  соединены параллельно при помощи сверхпроводящих проводов. Определите, как распределится между ними ток  $I$ , подведенный от общего источника. Катушки удалены друг от друга так, что поле одной не действует на поле другой. (Тем не менее катушки и соединяющие их провода можно рассматривать как один сверхпроводящий контур.)

137. Почему трансформатор выходит из строя в том случае, если хотя бы один виток обмотки замкнется накоротко?

138. Имеются два одинаковых идеальных трансформатора с коэффициентом трансформации  $1:3$ . Первичная обмотка одного из них последовательно соединена со вторичной обмоткой второго и свободные концы этих обмоток включены в сеть переменного тока с напряжением  $100\text{ В}$ . Вторичная обмотка

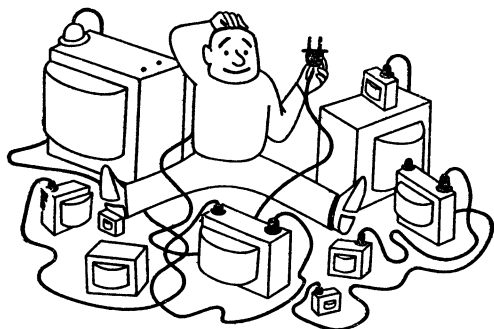


Рис. 47

первого трансформатора последовательно соединена с первичной обмоткой второго. Определить амплитуду переменного напряжения между свободными концами этих обмоток.

139. Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение  $U_0 = 220\text{ В}$ , то напряжение на вторичной обмотке будет  $U_1 = 127\text{ В}$ . Какое напряжение  $U_2$  будет при  $U_0 = 220\text{ В}$  на на-

грузке с сопротивлением  $R = 10$  Ом, подключенной ко вторичной обмотке этого трансформатора? Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора  $r_1 = 2$  Ом, а вторичной  $r_2 = 1$  Ом. Внутреннее сопротивление генератора тока принять равным нулю.

140. До какой разности потенциалов зарядится конденсатор емкостью  $C$  (рис. 48), если замкнуть ключ  $K$ ? Э. д. с. батареи равна  $\mathcal{E}$ . Внутреннее сопротивление батареи и сопротивление проводов пренебрежимо малы. Диод можно считать идеальным — в прямом направлении его сопротивление ничтожно мало, в обратном — бесконечно велико. Индуктивность  $L$  достаточно велика, так что процесс зарядки идет медленно.

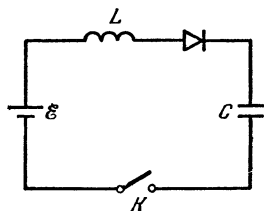


Рис. 48.

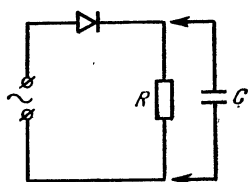


Рис. 49.

141. На рис. 49 показана простейшая схема выпрямителя. Диод считается идеальным. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая на сопротивлении  $R$ , при подсоединении параллельно ему конденсатора  $C$  такой емкости, что за период колебаний напряжения сети ( $U = 220$  В,  $\nu = 50$  Гц) заряд конденсатора практически не меняется?

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

142. К стенке, наклоненной под углом  $\alpha$  к вертикали, подвешен маятник длины  $l$  (рис. 50). Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на небольшой угол  $\beta$  от вертикального положения и отпустили. Найти период колебаний маятника, если  $\alpha < \beta$  и удар шарика о стенку — абсолютно упругий.

143. Определить период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого  $E = 300$  В/см. Полярную молекулу



можно представить в виде жесткой гантели длины  $l = 10^{-8}$  см, на концах которой находятся две материальные точки массы  $m$  ( $m = 10^{-24}$  г), несущие на себе заряды  $+q$  и  $-q$  соответственно ( $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл).

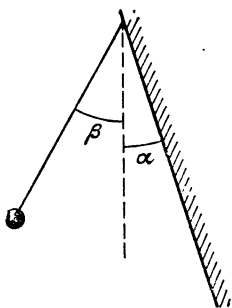


Рис. 50.

144. Модель молекулы  $\text{CO}_2$  — три шарика, соединенных пружинками и расположенных в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать колебания разных типов: а) и б) (рис. 51). Найдите отношения частот этих колебаний.

145. Колонна одинаковых грузовых автомобилей подъезжает к складу, забирает груз и движется дальше с той же скоростью. В результате продольный профиль грунтовой дороги принял вид, показанный на рис. 52. В каком направлении двигались автомобили?

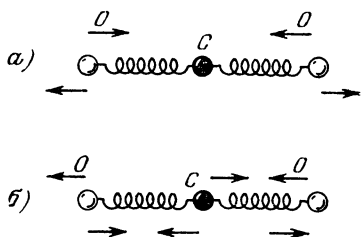


Рис. 51.

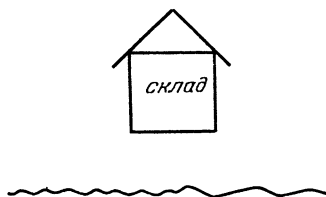


Рис. 52.

146. На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок. Мембрана совершает колебания с частотой  $\nu = 500$  Гц в вертикальной плоскости. Какова амплитуда колебаний мембраны, если песчинки подпрыгивают на высоту  $h = 3$  мм по отношению к положению равновесия мембраны?

147. Доска массы  $M$  расположена горизонтально и опирается на два вращающихся цилиндра. Расстояние между осями цилиндров  $l$ . Коэффициент трения между доской и цилиндрами  $\mu$ . Доказать, что если доску, находящуюся в положении равновесия, слегка

толкнуть в горизонтальном направлении, она будет совершать гармонические колебания, и найти период этих колебаний. Каким будет движение доски, если изменить направление вращения цилиндров на противоположное?

148. Точка подвеса математического маятника длины  $l$  совершает горизонтальные колебания такие, что ее координата меняется со временем  $t$  по закону  $x = a \cos \omega t$ . Считая колебания маятника малыми, найти амплитуду и фазу вынужденных колебаний маятника.

149. Если длину математического маятника уменьшать, когда маятник проходит положение равновесия, и увеличивать в те моменты, когда его отклонение максимально, то амплитуда колебаний маятника начнет нарастать. Почему?

150. В цилиндрический конденсатор в точке  $A$  впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с малым углом раствора  $\alpha$  (рис. 53). Все ионы в пучке имеют одинаковую энергию. Те ионы, у которых вектор скорости в точке  $A$  направлен перпендикулярно к отрезку  $OA$ , движутся по окружности радиуса  $r = OA$ , концентрической с обкладками конденсатора. Доказать, что пучок ионов будет фокусироваться в точке  $B$  такой, что  $\widehat{AOB} = \pi/\sqrt{2}$ . Определить максимальную ширину пучка.

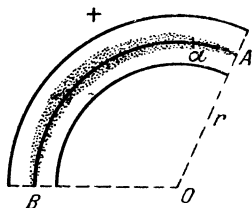


Рис. 53.

151. Читая лекции в Страсбурге в 1908 г., академик Л. И. Мандельштам поражал аудиторию следующим красивым опытом. Он брал два камертона, настроенные на близкие частоты 500 и 505 Гц, ставил их рядом друг с другом и возбуждал камертон с частотой 500 Гц. Второй камертон не отзывался на его колебания. Но стоило начать периодически закрывать ящик возбужденного резонатора рукой, как второй камертон начинал громко звучать. Объясните этот опыт.

152. При передаче телевизионного изображения на Земле за 1 секунду передается 25 кадров. Это означает, что 1 кадр передается за  $1/25$  секунды. В то

же время, как известно, передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией «Луна» длилась 25 минут. Почему так велика разница во временах передачи кадра в обоих случаях?

153. Упрощенно атом гелия можно представлять как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны  $\lambda = 0,06$  микрон. Плотность жидкого гелия  $\rho = 0,14$  г/см<sup>3</sup>.

154. На фотографии летящей пули (рис. 54) видны звуковые волны, которые возбуждаются при движении пули. (Такую фотографию удалось получить благодаря тому, что области, в которых плотность воздуха различна, по-разному преломляют световые

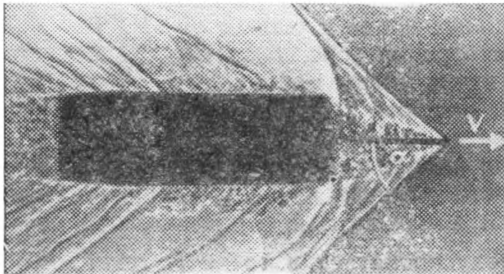


Рис. 54.

лучи.) Воспользовавшись линейкой, определить примерную скорость пули. Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.

155. Подводная лодка плывет на глубине  $h_0 = 500$  м. На каком расстоянии от лодки (вдоль поверхности океана) гидроакустик на лодке может обнаружить приближающийся корабль, если скорость звука в воде уменьшается с глубиной на  $\Delta c = 4$  м/с каждые  $\Delta h = 100$  м, а у поверхности океана она равна  $c_0 = 1500$  м/с. (Изменение скорости звука с глубиной связано с изменением температуры воды и ее плотности.)

## ОПТИКА

**156.** Перед зеркалом стоит человек, закрыв один глаз. Изображение этого глаза в зеркале он закрывает, приклеивая бумажку. Что увидит человек, если он закроет открытый глаз и откроет закрытый?

**157.** В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления  $n$ , проделано отверстие небольшого радиуса  $r$ . По оси отверстия из сосуда направляются горизонтально тонкий луч света. До какого уровня  $h$  над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч света вышел из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения?

Изменением поперечного сечения струи пренебречь, показатель преломления жидкости считать достаточно большим.

**158.** Почему возникает «лунная дорожка» на поверхности водоема в ясную лунную ночь?

**159.** Матированное стекло (одна из поверхностей стекла гладкая, другая шероховатая) прикладывают к чертежу: один раз гладкой поверхностью кверху, другой раз — книзу. В одном случае чер-

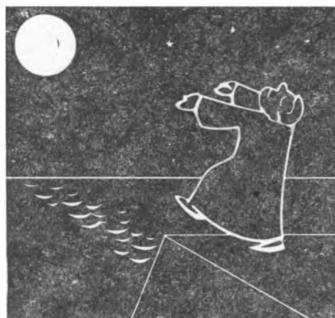


Рис. 55.

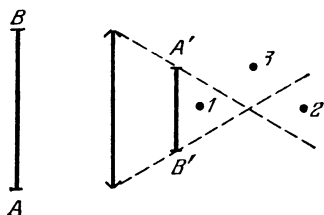


Рис. 56.

теж виден хорошо, в другом — разобрать его невозможно. Почему?

**160.** В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса  $r_1 = 5$  мкм при содержании массы вещества  $m = 0,04$  г в кубометре воздуха дальность видимости составляет  $l_1 = 50$  м. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса  $r_2 = 10$  мкм, если видимость сокращается до  $l_2 = 20$  м?

161. На рис. 56 отрезок  $A'B'$  — действительное изображение источника  $AB$ . Фотоаппарат помещают в точках 1, 2 или 3. Какие части источника полу-  
чаются на фотографиях?

Диаметр объектива фотоаппарата мал по сравнению с диаметром линзы. Фотоаппарат «наводится» на плоскость  $A'B'$ .

162. Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?

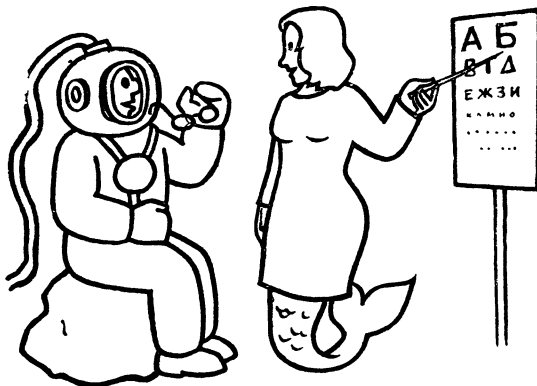


Рис. 57.

163. На рис. 58 показано положение двух точек,  $A$  и  $B$ , и их изображений  $A'$  и  $B'$ , которые получены с помощью линз. Найти построением положения линз и их фокусные расстояния.

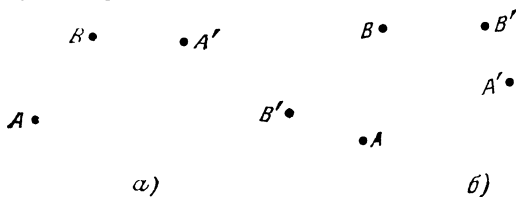


Рис. 58.

164. Почему лицо фехтовальщика в проволочной маске не видно публике, а спортсмен видит все так же хорошо, как и без маски?

165. Почему при ярком освещении те, кто пользуется не очень сильными очками, могут читать и без очков?

Почему для того чтобы сфотографировать одновременно два объекта, один из которых находится дальше другого, и получить на фотопленке резкое изображение обоих объектов, обычно уменьшают диаметр отверстия объектива (объектив диафрагмируют)?

166. Почему днем окна домов кажутся темными?

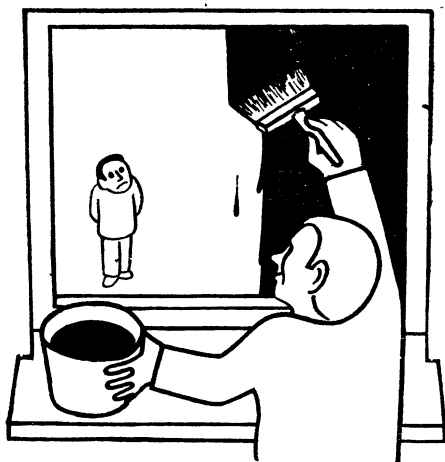


Рис. 59.

167. Почему с моста лучше видно рыбу, плавающую в реке, чем с низкого берега?

168. Определить, во сколько раз изменится освещенность изображения Солнца, полученного плоско-выпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами?

169. Для выжигания по дереву сфокусированными солнечными лучами необходимо иметь линзу с отношением диаметра  $D$  к фокусному расстоянию  $F$  большим  $0,07$  ( $D/F > 0,07$ ). Оценить, сколько горожан нужно было Архимеду выстроить на крепостной стене для того, чтобы они могли поджечь римский корабль, направив в одну точку корабля солнечные лучи с помощью плоских зеркал диаметром  $d = 1$  м, если корабль подошел на расстояние  $L = 200$  м от берега.

170. Почему лампочки обычно окружают матовым колпаком?

171. Почему в цехах с рассеянным освещением рабочим трудно работать?

172. Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высота Луны и Солнца над горизонтом одинакова. Считать, что Луна рассеивает  $\alpha = 0,1$  падающего на нее света равномерно по всей полусфере. Принять расстояние от Луны до Земли  $L = 400\,000$  км, радиус Луны  $r = 2000$  км.

173. Почему цепочка фонарей кажется одинаково яркой вдоль ее длины?

174. В полой сфере проделано отверстие, через которое проникает луч света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будут отличаться освещенности точки, диаметрально противоположной отверстию, от освещенности остальных точек сферы?

175. Жука фотографируют в двух масштабах: с расстояния  $d_1 = 3F$ , где  $F$  — фокусное расстояние объектива, и с расстояния  $d_2 = 5F$ . Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одной и той же? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше  $F$ .

176. При наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем. Объяснить, почему?

При наблюдении в телескоп освещенность изображения звезды в 10 раз меньше освещенности поверхности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп.

Во сколько раз нужно увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды стала в 10 раз больше освещенности неба?

177. Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном ( $\text{CH}_4$ ). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной в 1 см поглощает 98% энергии излучения.

Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли?

При расчете плотность метана в атмосфере принять равной  $1,4 \cdot 10^{-6}$  кг/м<sup>3</sup>.

## РЕШЕНИЯ

1. Изображения колес поворачиваются на 1 оборот за время прохождения 4 кадров в проекторе. Поэтому на каждом кадре колесо должно быть повернуто по сравнению с предыдущим на  $1/4$  оборота. Колеса на экране вращаются «вперед», если скорость движения автомобиля такова, что за время между кадрами  $\tau = 1/16$  с колеса автомобиля делают  $n$  полных и еще  $1/4$  оборота вокруг своей оси. Если же за  $\tau$  секунд колеса делают  $n$  полных и  $3/4$  оборота вокруг оси, то изображения колес на экране будут вращаться «назад». Таким образом, угловая скорость колес равна или  $\omega_1 = 32\pi(n + 1/4)\text{с}^{-1}$ , или  $\omega_2 = 32\pi(n + 3/4)\text{с}^{-1}$ . Это означает, что оси колес, а вместе с ними и автомобиль, движутся со скоростью  $v_1 = 32(n + 1/4)\pi R$  м/с (тогда изображения колес вращаются «вперед») или со скоростью  $v_2 = 32(n + 3/4)\pi R$  м/с (в этом случае изображения колес вращаются «назад»). Подставляя в эти формулы  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , мы будем получать ответы

$$v_1 = 12,6 \text{ м/с} = 45 \text{ км/ч}, \text{ или } v_1 = 223 \text{ км/ч} \dots$$

и

$$v_2 = 136 \text{ км/ч}, \text{ или } v_2 = 316 \text{ км/ч} \dots$$

При этом, поскольку скорость автомобиля вряд ли больше 140 км/ч, она равна 45 км/ч, если изображения колес вращаются «вперед», или 136 км/ч, если колеса на экране вращаются «назад».

2. Совместим какие-нибудь зубья гребенок (рис. 60). Тогда следующие зубья будут находиться на расстоянии  $1/5 - 1/6 = 1/30$  (см) друг от друга. Сместим подвижную гребенку на это расстояние. Картина светлых и темных полос сместится на период неподвижной гребенки, т. е. на  $1/5$  см.

Тогда светлые и темные места будут перемещаться со скоростью  $v = 1/5 : 1/30 = 6$  (см/с), при скорости движения гребенки 1 см/с.

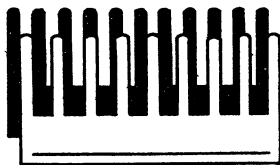


Рис. 60.



Опыт с гребенками позволяет увидеть, что происходит при сложении волн с различной длиной волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и разными скоростями распространения (фазовыми скоростями)  $u_1$  и  $u_2$ . В результате сложения синусоидальных волн получается не синусоидальная волна (рис. 61). Скорость ее распространения  $v$  — это скорость перемещения повторяющейся группы горбов и впадин. Ее называют групповой скоростью. Найдем  $v$ . В системе отсчета, движущейся со скоростью  $u_1$ , вторая волна движется со

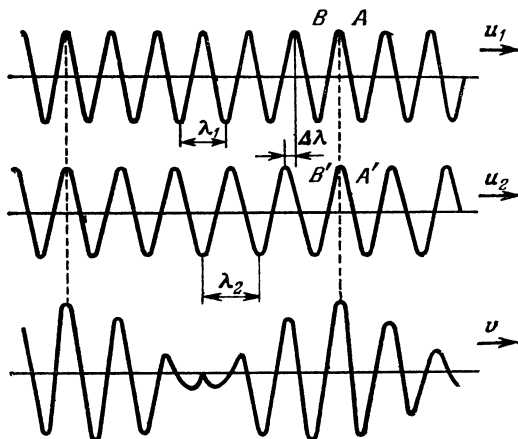


Рис. 61.

скоростью  $u_2' = u_2 - u_1$ . Если в некоторый момент совпадают горбы  $A$  и  $A'$ , то через некоторое время  $\tau$  совпадут горбы  $B$  и  $B'$ . В результате группа волн переместится влево на  $\lambda_1$ . Следовательно, она перемещается со скоростью  $\lambda_1/\tau$ . Но  $\tau = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{u_2 - u_1}$ .

Поэтому  $\frac{\lambda_1}{\tau} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (u_2 - u_1)$ . В неподвижной системе отсчета

$$v = u_1 - \frac{\lambda_1}{\tau} = u_1 - \lambda_1 \frac{\Delta u}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (1)$$

В отсутствии дисперсии (зависимость скорости распространения волн от  $\lambda$ ),  $v = u_1 = u_2$  — групповая скорость совпадает с фазовой. При дисперсии формула (1) справедлива для набора волн близких длин. Тогда  $v = u - \frac{du}{d\lambda} \lambda$ . Эта формула позволяет, например, найти скорость распространения модуляции амплитудно-модулированной волны, групповую скорость распространения волн в воде (волн в океане) и т. д.

3. Время полета  $t = \Delta v_Y/g$ , где  $\Delta v_Y$  — изменение проекции скорости  $v$  тела на вертикальную ось  $Y$ . Нетрудно найти  $\Delta v_Y$

графически, построив в произвольном масштабе вектор  $v_A$  (направленный по касательной к траектории в точке  $A$ ) и затем вектор  $v_B$ , воспользовавшись тем, что  $v_x = \text{const}$  (рис. 62). После этого нетрудно с помощью линейки найти  $\Delta v_y$  и вычислить  $t$ . В нашем случае  $\Delta v_y \approx 27$  м/с и  $t \approx 2,9$  с.

4. Скорость  $v$  ящика, конечно, не равна  $v_1 + v_2$ , так как  $v_1$  и  $v_2$  — две составляющие скорости, но из разных пар.  $v$  такова,

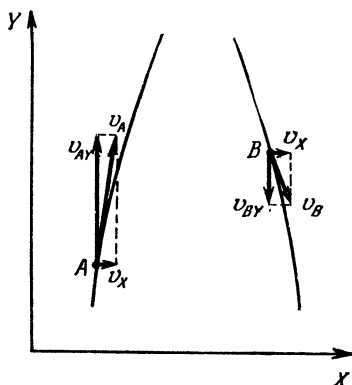


Рис. 62.

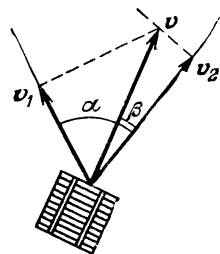


Рис. 63.

что ее проекции на направления канатов равны соответственно  $v_1$  и  $v_2$ . Поэтому конец вектора  $v$  лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам  $v_1$  и  $v_2$  (рис. 63).

Из рисунка видно, что  $v_1 = v \cos(\alpha - \beta)$  и  $v^2 = v \cos \beta$ , так что

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{v_1}{v_2} - \cos \alpha \right) = \frac{v_1}{v_2 \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$$

и

$$v = \frac{v_2}{\cos \beta} = v_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

5. Катер и спортсмен на лыжах связаны нерастяжимой веревкой. Поэтому проекции скоростей катера и спортсмена на направление веревки должны быть равны (в противном случае смещения концов веревки вдоль ее направления были бы не одинаковы и веревка разорвалась бы). Из рис. 64 видно, что это приводит к ограничению:

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta.$$

При  $\alpha > \beta$  скорость лыжника  $v_1$  будет по модулю больше скорости катера  $v_2$ . (Например, когда направление веревки совпадает с направлением скорости катера, а лыжник движется под углом.)

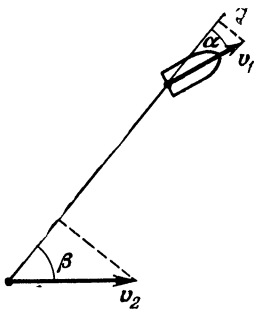


Рис. 64.

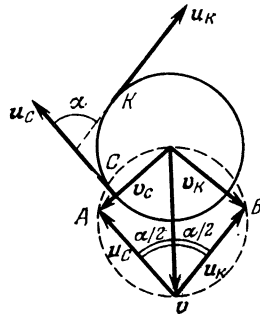


Рис. 65.

6. В системе координат, связанной с центром диска, скорости  $u_C$  и  $u_K$  точек  $C$  и  $K$  равны по абсолютной величине  $\omega R$  и направлены вдоль нитей. В системе, связанной с Землей, скорости этих точек перпендикулярны к нитям (нити нерастяжимы!). Следовательно, если  $v$  — скорость центра диска, то вектор  $v_C = u_C + v$  (рис. 65) перпендикулярен к  $u_C$ , а вектор  $v_K = u_K + v$  перпендикулярен к  $u_K$ . Это означает, что точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности с диаметром  $v$ . Из рисунка видно, что  $v$  составляет угол  $\alpha/2$  с каждой из нитей и

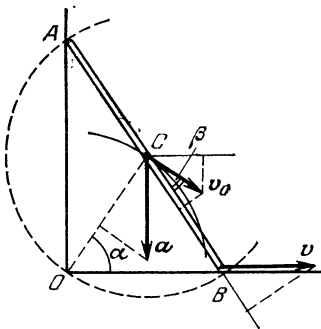


Рис. 66.

Следовательно,  $OC$  — радиус этой окружности. Это означает, что при движении стержней длина отрезка  $OC$  не меняется и точка  $C$  движется по окружности с центром в точке  $O$  и радиуса  $OC = l/2$ .

Скорость  $v_C$  точки  $C$  направлена по касательной к траектории и перпендикулярна к  $OC$ . Так как стержень нерастяжим, то проекции скоростей точек  $C$  и  $B$  на направление стержня должны быть одинаковы:

$$v \cos \alpha = v_C \cos \beta.$$

Из рис. 66 видно, что  $\beta = 2\alpha - \pi/2$ . Поэтому

$$v_C = v \frac{\cos \alpha}{\cos(2\alpha - \pi/2)} = \frac{v}{2 \sin \alpha}.$$

Проекция ускорения  $a_C$  точки  $C$  на радиус  $OC$  должна быть равна  $v_C^2/OC = v/2l \sin^2 \alpha$ . Но как направлен вектор  $a_C$ ?

Заметим, что проекция скорости  $v_C$  точки  $C$  на горизонтальную ось равна  $v_C \cos(\alpha - \beta) = v_C \cos(\pi/2 - \alpha) = v/2$ . Эта проекция не зависит от  $\alpha$  и, следовательно, постоянна. Это означает, что ускорение точки  $C$  вертикально и делит угол  $OCB$  пополам. Таким образом, имеем:

$$a_C \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{v^2}{2l \sin^2 \alpha}.$$

Отсюда

$$a_C = \frac{v^2}{2l \sin^3 \alpha}.$$

8. Перенумеруем шестеренки, обходя кольцо из них против часовой стрелки. Удерживая шестеренку 2 и шестеренку 13, шестеренку 1 можно повернуть на максимальный угол  $\alpha$ . Удерживая теперь шестеренку 3, повернем шестеренку 2 на угол  $\alpha$ . При этом шестеренка 1 повернется еще на угол  $\alpha$ , а шестеренка 13 — на угол  $\alpha$  в другую сторону. Удерживая шестеренку 4 неподвижной, повернем шестеренку 1 еще на угол  $\alpha$  (то есть всего она повернется на угол  $3\alpha$ ). При этом шестеренка 13 окажется повернутой в другую сторону на угол  $2\alpha$ , а шестеренка 12 — на угол  $\alpha$ . И так далее, вплоть до седьмой шестеренки. Поворот шестеренки 1 при этом окажется равным  $6\alpha$ . Последняя восьмая шестеренка может повернуться лишь на угол  $\alpha/2$ . Таким же будет дополнительный угол поворота первой шестеренки, которая, таким образом, повернется на угол  $6,5\alpha$ .

9. Москва и Новосибирск находятся на одной широте ( $55^\circ$  северной широты), а их долготы отличаются на  $45^\circ$ . Москва находится на  $38^\circ$ , а Новосибирск — на  $83^\circ$  восточной долготы. За 3 часа (с 12.00 до 15.00) Земля делает  $1/8$  оборота вокруг ее оси и Москва в 15.00 окажется в том же положении по отношению к Солнцу и неподвижным звездам, в каком находился Новосибирск в 12.00\*). Следовательно, спутник делает за 3 часа целое число оборотов вокруг Земли. Так как период обращения спутника не может быть меньше, чем  $T_{\min} = 2\pi/\omega_{\min}$ , а  $\omega_{\min}^2 R = g$ , то  $T_{\min} = 2\pi \sqrt{R/g} \approx 1,4$  ч. Поэтому период обращения спутника равен либо 3 часам, либо 1,5 часам. В обоих случаях в 18.00 спутник будет находиться над пунктом с координатами  $55^\circ$  северной

\*) В нашей задаче, очевидно, несущественно движение Земли до орбите вокруг Солнца.

широты и  $7^\circ$  западной долготы. В 19.00 спутник окажется над пунктом с координатами  $55^\circ$  северной широты и  $30^\circ$  западной долготы, если период его обращения 1,5 часа, и над пунктами с координатами  $55^\circ$  южной широты и  $154^\circ$  восточной долготы, если его период равен 3 часам.

10. Земля обращается вокруг Солнца и вращается вокруг собственной оси, причем ось Земли почти перпендикулярна к плоскости орбиты, а направления вращения Земли вокруг своей оси и обращения вокруг Солнца совпадают. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси (то есть не вращалась по отношению к далеким звездам), то любая точка на Земле была бы ориентирована одинаково по отношению к Солнцу через время, равное периоду обращения Земли вокруг Солнца. Следовательно, обращение вокруг Солнца за год прибавляет как бы один оборот к числу оборотов вокруг своей оси. Поэтому при изменении направления вращения Земли число дней в году изменится на два.

11. Обозначим  $t$  интервал времени между поездами, идущими в одну сторону. Если промежуток времени между отправлением поезда, идущего по часовой стрелке, и ближайшим поездом против часовой стрелки равен  $\tau$ , то между отправлением поезда, идущим против часовой стрелки, и поездом, идущим по часовой стрелке, проходит время  $t - \tau$ . Если  $\tau < t/2$ , то  $t - \tau > \tau$ . Вероятность того, что студент придет в интервал времени  $t - \tau$ ,

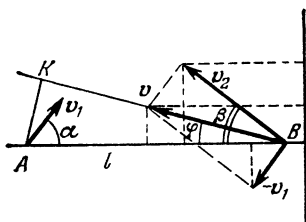


Рис. 67.

очевидно, в  $\frac{t - \tau}{\tau}$  раз больше вероятности того, что он придет в интервал времени  $\tau$ . Поэтому студент и ездит чаще по часовой стрелке.

12. В системе координат, движущейся относительно Земли со скоростью  $v_1$ , корабль  $A$  покоится, а корабль  $B$  движется со скоростью  $v = v_2 - v_1$  (рис. 67). Минимальное расстояние между кораблями равно длине перпендикуляра  $AK$ , опущенного на траекторию корабля  $B$ . Обозначим  $\varphi$  угол, образуемый вектором  $v$  с линией  $BA$ . Тогда  $AK = l \sin \varphi$ . Так как  $v = v_2 - v_1$ , то спроектировав все векторы на линию  $AB$  и на линию, перпендикулярно к  $AB$ , получим

$$v \cos \varphi = v_2 \cos \beta + v_1 \cos \alpha, \quad v \sin \varphi = v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha}{v_2 \cos \beta + v_1 \cos \alpha}.$$

Выражая  $\sin \varphi$  через  $\operatorname{tg} \varphi$ , найдем  $AK$ .

13. Так как абсолютная величина скорости собаки постоянна, а меняется только направление скорости, то ускорение собаки направлено перпендикулярно к вектору скорости. Траекторию движения собаки за малый промежуток времени  $\Delta t$  можно считать дугой окружности. Обозначим  $R$  радиус этой окружности. Тогда ускорение собаки — центростремительное, равное  $v_2^2/R$ . За время  $\Delta t$  вектор скорости собаки поворачивается на угол

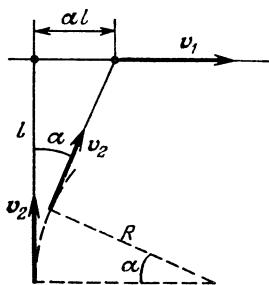


Рис. 68.

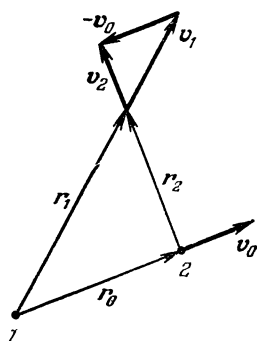


Рис. 69.

$\alpha = v_2 \Delta t / R$  (рис. 68). А лиса за это время перемещается на расстояние  $v_1 \Delta t$ . Так как вектор скорости собаки направлен все время на лису, то это расстояние равно  $\alpha l$ . Следовательно,

$$v_1 \Delta t = \alpha l = \frac{v_2 l \Delta t}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{v_2}{v_1} l \quad \text{и} \quad a = \frac{v_1 v_2}{l}.$$

14. Выделим некоторую звезду и найдем ее скорости в системах координат, связанных с первой и второй звездами, у которых находились космонавты. По условию задачи скорость в системе координат, связанной с первой звездой

$$v_1 = \alpha r_1,$$

где  $r_1$  — вектор, проведенный от первой звезды к выделенной звезде. В системе, связанной со второй звездой, на которую перелетели космонавты, скорость выделенной звезды

$$v_2 = v_1 - v_0,$$

где  $v_0 = \alpha r_0$  — скорость второй звезды относительно первой. Проведя вектор  $r_2$  от второй звезды к выделенной (рис. 69), легко увидеть, что

$$r_2 = r_1 - r_0.$$

Соответственно, скорость звезды

$$v_2 = \alpha (r_1 - r_0) = \alpha r_2.$$

Следовательно, космонавты опять увидят, что все звезды разлетаются со скоростями, пропорциональными расстоянию до них.

15. По логарифмической спирали. Это нетрудно доказать, показав, что угол, образуемый касательной к шнуру с прямой, проведенной в заданную точку, постоянен

(он равен  $\arccos \frac{c}{v}$ , где  $v$  — скорость горения шнура).

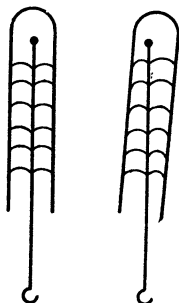


Рис. 70.

16. У ерша, вдвинутого снизу в вертикальную трубку, щетинки изогнуты, как показано на рис. 70. При наклоне трубки давление щетинок на стенку трубки с одной стороны ослабевает и при некотором наклоне щетинка начинает скользить вверх по трубке до тех пор, пока из-за изменения кривизны щетинки сила давления на стенку, а следовательно, и сила трения скольжения не возрастает настолько, что щетинка остановится. При

выпрямлении трубки обратного скольжения не произойдет, так как сила трения покоя больше силы трения скольжения. Таким образом, ерш будет шагами продвигаться вверх по трубке, «расклиниваясь» в трубке за счет сил трения покоя и проскальзывая за счет уменьшения трения при скольжении.

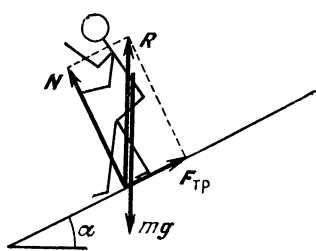


Рис. 71.

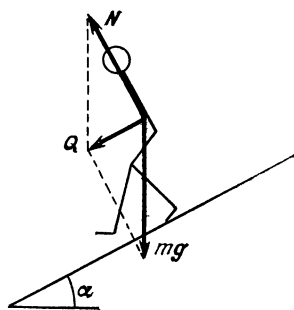


Рис. 72.

17. На человека на горке действуют две силы: сила тяжести  $mg$  и сила  $R$ , равная сумме силы трения  $F_{тр}$  и силы  $N$  — нормальной реакции горки (рис. 71). Так как момент силы тяжести относительно центра масс человека равен нулю, то человек будет

сохранять равновесие и не «переворачиваться» только в том случае, если сила  $R$  проходит через его центр масс.

Если трение подошв обуви о горку велико и человек стоит на горке, то сумма сил, действующих на человека, равна нулю, то есть сила  $R$  направлена вертикально и равна силе тяжести.

Иное дело, если трение малое. Разберем вначале предельный случай:  $F_{\text{тр}} = 0$ . Тогда человек не будет падать, если он перпендикулярен к горке (рис. 72). Только в этом случае сила  $N$  реакции горки проходит через центр масс человека. Но равнодействующая  $Q$  сил  $mg$  и  $N$  при этом не будет равна нулю. Она направлена параллельно наклонной плоскости и равна  $mg \sin \alpha$ . Поэтому человек должен спускаться с ускорением  $a = g \sin \alpha$ .

Если трение малое, но не равно нулю, то ускорение человека должно быть меньше. Записав второй закон Ньютона, мы найдем, что оно равно  $a = g \sin \alpha - F_{\text{тр}}/m$ .

18. Наибольшему разрушению подвергнется сопряжение дуг, образуемых дорогой. В этом месте центростремительное ускорение, сообщаемое вагону равнодействующей приложенных к нему сил, испытывает скачок, равный  $v^2(1/R_1 + 1/R_2)$ . Из-за зазора между щеками колес и рельсами происходит удар. Несколько менее сильный удар происходит и в местах сопряжения прямых участков дороги с дугами.

Сопряжение различных участков, а также повороты дороги из-за этого никогда не делаются с помощью дуг окружностей. Они устраиваются так, чтобы радиус кривизны менялся плавно.

19. Если шарик вращается по окружности и стержень составляет с вертикалью угол  $\alpha$ , то центростремительное ускорение шарика сообщает равнодействующая силы тяжести и силы натяжения стержня. Эта равнодействующая направлена горизонтально и равна  $mg \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 73). Запишем уравнение движения шарика:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 r \quad \text{или} \quad g \operatorname{tg} \alpha = \omega^2 l \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Это выражение справедливо, однако, только при  $\omega^2 l \geq g$ , то есть при  $\omega \geq \sqrt{g/l}$  ( $\cos \alpha$  должен быть меньше 1). При

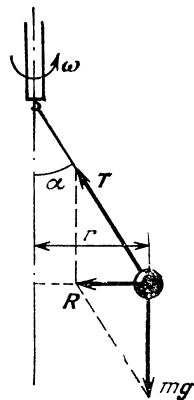


Рис. 73.



$\omega < \sqrt{g/l}$ ,  $g \operatorname{tg} \alpha > \omega^2 r$ , то есть равнодействующая силы тяжести и силы натяжения нити сообщает шарiku ускорение большее, чем ускорение при вращении по окружности. Поэтому стержень с шариком будут вращаться, оставаясь вертикальными. График зависимости  $\alpha$  от  $\omega$  показан на рис. 74.

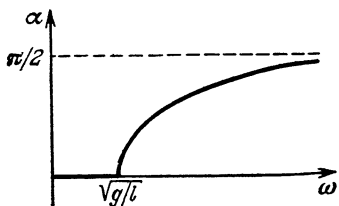


Рис. 74.

20. В то время, когда конькобежец набирает скорость, его ноги движутся в двух разных параллельных плоскостях, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Резкие движения ног вызывают появление момента сил, стремящихся повернуть корпус человека вокруг вертикальной оси.

Поэтому конькобежец в такт движению ног размахивает руками так, чтобы движение соответствующих рук и ног было противофазно. При таком движении рук возникает момент сил, противодействующих моменту сил, обусловленных движением ног и компенсирующих его.

21. На летящий самолет в плоскости, перпендикулярной к направлению его полета, действуют две силы — сила тяжести и аэродинамическая подъемная сила. Их равнодействующая при повороте самолета должна быть направлена к центру окружности, по которой движется самолет. Это возможно, если корпус самолета наклонен в сторону поворота (рис. 75).

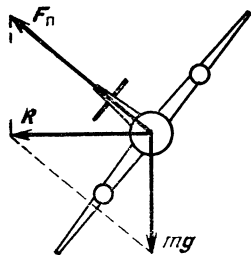


Рис. 75.

Такой наклон самолета получается благодаря тому, что при повороте киль (руля) из-за давления воздуха на киль самолет начинает поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести. Одно из крыльев самолета тогда движется быстрее другого. На это крыло действует большая аэродинамическая подъемная сила и самолет поворачивается вокруг горизонтальной оси. При этом подъемная сила, действующая на это крыло, уменьшается, а на другое крыло возрастает.

При повороте теплохода на его внешний борт действует избыточное давление, сообщающее теплоходу центростремительное ускорение. Это давление появляется благодаря тому, что при повороте руля теплоход поворачивается вокруг вертикальной оси. При этом он продолжает двигаться по инерции бортом вперед.

Точка приложения равнодействующей сил добавочного гидродинамического давления лежит на середине погруженной части теплохода. Поэтому если центр тяжести теплохода лежит ниже середины части его, находящейся в воде, то теплоход наклоняется в сторону поворота. Если центр тяжести теплохода лежит выше середины части, погруженной в воду, то теплоход при повороте наклоняется в сторону, противоположную повороту. Угол наклона теплохода определяется условием равенства нулю суммарного момента сил гидростатического давления (подъем силы), равнодействующая которых приложена к центру тяжести вытесненного объема жидкости, и сил добавочного гидродинамического давления на внешний борт теплохода.

Теплоход может плавать устойчиво даже в том случае, когда его центр тяжести лежит выше центра тяжести вытесненного объема воды, т. е. выше точки приложения «выталкивающей» силы. Для этого необходимо, чтобы благодаря форме корпуса теплохода при его наклоне центр тяжести вытесненного объема смещался в сторону наклона.

Поворот подводной лодки происходит так же, как и поворот теплохода, благодаря добавочному гидродинамическому давлению на внешний борт. Но центр тяжести подводной лодки находится ниже ее середины, так как он должен лежать ниже точки приложения равнодействующей сил гидростатического давления, находящейся примерно в середине сечения подводной лодки (иначе подводная лодка перевернулась бы). Поэтому при повороте подводная лодка наклоняется в сторону поворота.

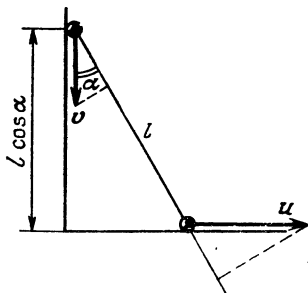


Рис. 76.

22. Пусть в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости гантелька составляет угол  $\alpha$  с вертикалью (рис. 76), скорость верхнего шарика равна  $v$ , скорость нижнего  $u$ . Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mg \Delta h = mgl(1 - \cos \alpha),$$

где  $m$  — масса каждого шарика и  $\Delta h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$ . Отсюда

$$v^2 + u^2 = 2gl(1 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Поскольку стержень жесткий, проекции  $v$  и  $u$  на стержень равны:

$$u \cos \alpha = u \sin \alpha. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим

$$u^2 = 2gl (\cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha) = 2gl (x^2 - x^3), \quad (3)$$

где  $x = \cos \alpha$ .

До момента отрыва центр масс гантели двигался с горизонтальным ускорением (это ускорение сообщалось силой реакции вертикальной стенки). Поэтому к моменту отрыва верхнего шарика от вертикальной стенки скорость  $u$  максимальна. Найдем значение  $\cos \alpha$ , при котором выражение  $y = x^2 - x^3$  (см. (3)) максимально. Так как  $y' = 2x - 3x^2 = 0$  при  $x = 2/3$ , то  $u^2$  максимально при  $\cos \alpha = 2/3$  и равно

$$u_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gl}.$$

23. Пузырек не будет перемещаться по трубке, если сила  $N$ , действующая на него со стороны жидкости, будет направлена по радиусу трубки, то есть перпендикулярно к касательной к трубке (рис. 77). Так как сила  $N$  — это архимедова выталкивающая

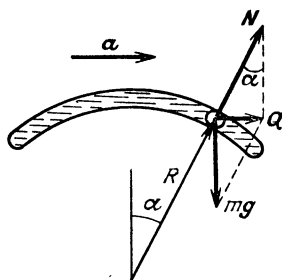


Рис. 77.

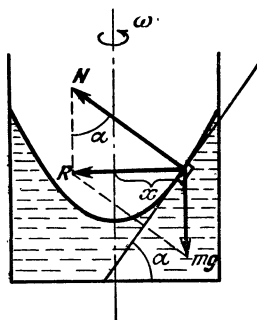


Рис. 78.

сила, то она перпендикулярна к линиям постоянного давления. Равнодействующая  $Q$  сил  $N$  и  $mg$  ( $m$  — масса пузырька) направлена горизонтально и равна  $ma$ . Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}.$$

24. Свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения. Рассмотрим на поверхности жидкости некоторый малый элемент массы  $m$ , находящийся на расстоянии  $x$  от оси вращения (рис. 78). На этот

элемент действует сила тяжести  $mg$  и сила давления  $N$  со стороны остальной жидкости. Сила  $N$  направлена перпендикулярно к свободной поверхности жидкости. Поскольку выбранный элемент жидкости движется с постоянной угловой скоростью по окружности радиуса  $x$ , то равнодействующая  $R$  сил  $N$  и  $mg$  направлена к оси вращения и равна по абсолютной величине  $m\omega^2 x$ . Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к поверхности жидкости. Из соотношения (1) следует, что поверхность жидкости имеет форму параболоида. Действительно, так как

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ , то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Отсюда

$$y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2 + C \quad (2)$$

( $C$  — константа).

Воспользовавшись свойствами параболы, нетрудно найти фокусное расстояние параболоида. Мы сделаем это несколько другим способом.

Рассмотрим малые участки поверхности, близкие к оси вращения. Такой участок поверхности можно считать частью сферы радиуса  $R$ . Найдем такое  $R$ , которое лучше всего «приближается» к параболоиду. Угол наклона касательной к сфере в точке на расстоянии  $x$  от оси вращения таков, что (рис. 79)

$$\sin \beta = \frac{x}{R}. \quad (3)$$

Для точек, близких к оси,  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (1) и (3) малы, так что

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 x}{g} \quad \text{и} \quad \beta \approx \frac{x}{R}.$$

Для «наилучшей» сферы  $\alpha = \beta$ , то есть

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{R} \quad \text{и} \quad R = \frac{g}{\omega^2}.$$

Следовательно, фокусное расстояние параболоида

$$F = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

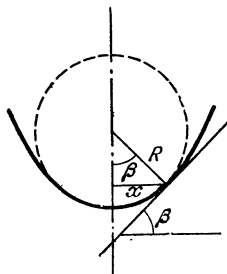


Рис. 79.

В случае зеркального телескопа Вуда получим

$$1,22 \text{ м} \leq F \leq 4,9 \text{ м.}$$

25. При движении смычка струна благодаря трению увлекается смычком и натягивается. Когда величина силы трения становится равной некоторой максимальной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Так как при этом величина силы трения резко уменьшается, то струна совершает почти свободное колебание. Затем, когда скорости струны и смычка сравняются, струна «захватывается» смычком и т. д. Колебания струны незатухающие, так как при движении струны в ту же сторону, что и смычка, сила трения, действующая на струну, совершает положительную работу, компенсируя потери энергии струной.

26. При движении автомобиля участок колеса, соприкасающийся с дорогой, неподвижен относительно нее. При резком торможении колеса скользят по дороге (юз). Обозначим  $v_1$  скорость

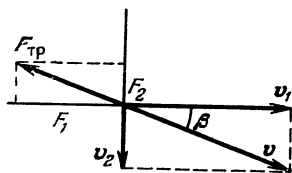


Рис. 80.

движения автомобиля и рассмотрим вопрос — какая сила  $F$  должна действовать на автомобиль, чтобы он начал двигаться вбок (машину «занесло»). Обозначим  $v_2$  скорость бокового заноса (рис. 80) и будем считать, что  $v_2 \ll v_1$ . Так как скорость  $v$  автомобиля равна сумме  $v_1 + v_2$ , а сила трения  $F_{тр}$  направлена

противоположно вектору  $v$ , то ее проекция на вектор  $v_1$  равна  $F_1 = F_{тр} \cos \beta$ , а проекция на вектор  $v_2$  равна  $F_2 = F_{тр} \sin \beta$ , где  $\beta = \text{arctg} \frac{v_2}{v_1} \approx \frac{v_2}{v_1}$ . Следовательно,

$$F_2 = F_{тр} \frac{v_2}{v_1} = kmg \frac{v_2}{v_1}$$

( $m$  — масса автомобиля,  $k$  — коэффициент трения).

Ясно, что для возникновения движения вбок (заноса) необходима сила, равная по модулю  $F_2$ . А так как эта сила пропорциональна скорости  $v_2$ , то такой занос может быть вызван сколь угодно малой силой. Она может появиться как составляющая силы тягести при неровной дороге.

27. Предположим, что мы хотели вытащить гвоздь, например с помощью плоскогубцев. Для того чтобы гвоздь двигался поступательно, на него должна действовать сила  $F$ , большая максимальной силы трения покоя  $F_{тр}$ . А чтобы гвоздь вращался, к плоскогубцам необходимо приложить силу  $F_1$  такую, чтобы ее

момент относительно оси гвоздя был больше момента силы трения:

$$F_1 R > F_{\text{тр}} r,$$

где  $R$  — радиус рукоятки плоскогубцев,  $r$  — радиус гвоздя. (Сила трения, действующая на гвоздь, по абсолютной величине такая же, как в первом случае, но направлена не вдоль оси гвоздя, а перпендикулярно ей.) Таким образом,

$$F_1 > \frac{r}{R} F_{\text{тр}}.$$

Так как  $R \geq r$ , то сила  $F_1$  по абсолютной величине может быть во много раз меньше силы  $F$ .

Нетрудно показать, что если гвоздь вращается, то вытащить его из стены можно, приложив сколь угодно малую силу  $F_2$ , параллельную оси гвоздя (см. задачу 26).

Следовательно, вытащить гвоздь из стены можно, приложив к плоскогубцам силу  $F_1 > \frac{r}{R} F_{\text{тр}}$  и сколь угодно малую силу  $F_2$ , что в сумме меньше  $F_{\text{тр}}$ .

28. Изменение импульса нити  $\Delta K$  за время  $\Delta t$  равно произведению массы нити  $\Delta m = \mu v \Delta t$ , которая пришла за это время в движение, на ее скорость  $v$ :

$$\Delta K = \mu v^2 \Delta t.$$

Это изменение равно импульсу внешних сил:

$$\Delta K = (F - mg) \Delta t = (F - \mu l g) \Delta t.$$

Подставляя выражение для  $\Delta K$ , получаем для силы  $F$ , с которой тянут нить, следующее выражение:

$$F = \mu (v^2 + gl).$$

29. При попадании на тележку массы  $M$  порции снега  $\Delta m$  ее скорость  $v$  меняется на величину  $\Delta v$ , которая находится из закона сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$Mv = (M + \Delta m) (v + \Delta v).$$

Здесь не учтен начальный импульс порции снега, так как он не имеет горизонтальной составляющей. Аналогично, сбрасывание снега в сторону не меняет импульса тележки. В результате находим

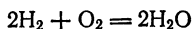
$$\Delta v = \frac{\Delta m}{M} v.$$

Отсюда следует, что замедление движения тележки тем меньше, чем больше ее масса. Поэтому тележка, с которой снег не сбрасывают, будет двигаться быстрее.

30. Для оценки будем считать, что топливо в ракете сгорает очень быстро и образующиеся газы выбрасываются одной порцией. Обозначим  $v$  скорость ракеты,  $u$  — скорость газов,  $M_0$  — массу сгоревшего топлива. Тогда  $M_0 u = m v$  и

$$M = m \frac{v}{u} = 0,01 \frac{c}{u}. \quad (1)$$

Теперь найдем  $u$ . Из уравнения химической реакции горения водорода



следует, что для сгорания двух киломолей водорода необходим киломоль кислорода. В результате получается два киломоля паров. Иными словами, при сгорании 4 кг водорода в 32 кг кислорода образуется 36 кг паров. Следовательно, масса  $\Delta M$  паров образуется при сгорании массы  $\frac{4}{36} \Delta M = \frac{1}{9} \Delta M$  водорода. При этом выделяется энергия

$$Q = \frac{1}{9} \Delta M q.$$

Конечно, только часть этой энергии превращается в кинетическую энергию газов. Но для оценки будем считать, что

$Q = \frac{1}{2} \Delta M u_{\text{пр}}^2$ , то есть

$$\frac{1}{9} \Delta M q = \frac{1}{2} \Delta M u_{\text{пр}}^2.$$

Отсюда

$$u_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2}{9} q}.$$

Это «предельная» скорость истечения газов. В нашем случае она равна  $\sqrt{\frac{2}{9} \cdot 1,1 \cdot 10^8} \text{ м/с} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ . Поэтому  $M_0 >$

$$> 0,01 \frac{c}{u_{\text{пр}}} m = 600 m.$$

Отношение  $M_0/m$  огромно, но сильно занижено. Пока масса еще не сгоревшего топлива велика по сравнению с  $m$ , реактивная сила сообщает импульс не только ракете, но и оставшемуся топливу. Поэтому наш расчет некорректен, и нужно пользоваться формулой Циолковского

$$\frac{M_0 + m}{m} = e^{v/u},$$

которая в нашем случае дает

$$M_0 = m e^{600} \approx m \cdot 10^{260} = 20 \cdot 10^{260} \text{ т!}$$

Эта цифра во много раз превышает массу Солнца  $M_c = 2 \cdot 10^{27}$  т. Химическое топливо, как показывают расчеты, не может дать скорость истечения больше 10 км/с. Оно, очевидно, для межзвездных полетов неприменимо.

Для достижения скоростей, сравнимых со скоростью света, необходимо использовать топливо, которое дает скорость истечения порядка скорости света. Идеальный случай  $u = c$  (фотонная ракета).

31. Обозначим через  $d_1$  и  $d_2$  толщины образовавшихся струй (рис. 81), а через  $v_1$  и  $v_2$  — их скорости. Так как через поперечное сечение первоначальной падающей струи за одну секунду проходит такая же масса жидкости, что и через поперечные сечения обеих образовавшихся струй и жидкость несжимаема, то

$$\rho d_0 v = \rho d_1 v_1 + \rho d_2 v_2. \quad (1)$$

Найдем, как меняется скорость частиц жидкости. Проследим за небольшой массой  $\Delta m$  жидкости, которая перемещается из основной струи в левый рукав. Такое перемещение равносильно просто переносу этой жидкости из области  $I$  в область  $II$ . Но в области  $I$  мы «извлекаем» объем жидкости  $V_1$  и силы давления совершают работу  $A_1 = p_1 V_1$ . В области  $II$  работа сил давления отрицательна и равна  $A_2 = -p_2 V_2$ . Следовательно, полная работа  $A$  внешних сил равна  $p_1 V_1 - p_2 V_2$ . Но жидкость несжимаема и, следовательно,  $V_1 = V_2$ . Кроме того, давление во всех струях тоже одинаково и равно атмосферному, так как границы у струй плоские. Поэтому  $A = 0$ . По теореме о кинетической энергии изменение кинетической энергии массы  $\Delta m$  жидкости равно  $A$ . Следовательно, кинетическая энергия частиц жидкости и их скорость остаются постоянными:  $v_1 = v_2 = v$ .

Поэтому из равенства (1) получаем

$$d_0 = d_1 + d_2. \quad (2)$$

Так как на жидкость не действуют никакие внешние горизонтальные силы, горизонтальная проекция импульса текущей жидкости должна оставаться постоянной:

$$mv \cos \alpha = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

где  $m$ ,  $m_1$  и  $m_2$  — массы жидкости, прошедшие через сечения струй за одно и то же время. Так как  $m \sim d_0$ ,  $m_1 \sim d_1$  и

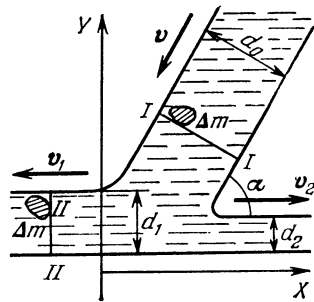


Рис. 81.



$m_2 \sim d_2$ , то

$$d_0 \cos \alpha = l_1 - d_2. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) получаем

$$d_1 = d_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad d_2 = d_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Мы говорили, что давление во всех случаях равно атмосферному. Это, однако, верно далеко от места попадания струи на плоскость, где струя плоская. В том же месте, где струя ударяет о плоскость, она искривляется и давление здесь другое.

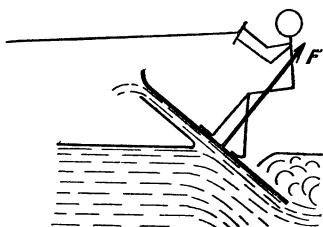


Рис. 82.

Его нетрудно найти. Так как сила  $F$ , действующая на струю со стороны плоскости, равна скорости изменения проекции импульса  $K$  струи на ось  $Y$ , перпендикулярную к плоскости, а  $\Delta K_y = K \sin \alpha$ , то

$$F = \frac{\Delta K_y}{\Delta t} = \frac{K \sin \alpha}{\Delta t}.$$

За время  $\Delta t$  на плоскость попадает объем жидкости  $V = Sv \Delta t$  с массой  $M = \rho Sv \Delta t$  и импульсом  $K = Mv = \rho Sv^2 \Delta t$ , где  $S$  — площадь сечения струи. Поэтому

$$F = \frac{\rho Sv^2 \sin \alpha \cdot \Delta t}{\Delta t} = \rho Sv^2 \sin \alpha.$$

Благодаря этой силе удерживаются, например, на поверхности воды лыжник (рис. 82) и глиссер на подводных крыльях.

Площадь  $S$  зоны повышенного давления примерно равна площади сечения струи. Поэтому

$$p \sim \frac{F}{S} = \rho v^2 \sin \alpha.$$

Давление это невелико. Например, при нормальном падении на плоскость ( $\alpha = 90^\circ$ ) струи воды, скорость которой равна, скажем, 10 м/с (такую скорость имеет, например, капля, падающая с высоты 5 м)

$$p \sim 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Эта величина равна всего лишь атмосферному давлению. В то же время не зря поговорка говорит, что капля камень точит. И действительно, при регулярном падении капель с высоты всего 1—2 м камень постепенно разрушается. В чем же здесь дело? Мы вернемся к этому вопросу в задаче 32. Здесь же рассмотрим другое интересное явление — кумулятивную струю. Она возни-

кает, например, когда поток жидкости налетает под углом на плоскость так, как показано на рис. 83. В этом случае вдоль плоскости «бьет» струя, скорость которой во много раз превышает скорость набегающего потока. Такая струя обладает огромной кинетической энергией.

Найдем скорость  $u$  кумулятивной струи при падении на плоскость потока жидкости, имеющего скорость  $v$ . Обозначим  $\alpha$  угол между фронтом потока и плоскостью (рис. 84).

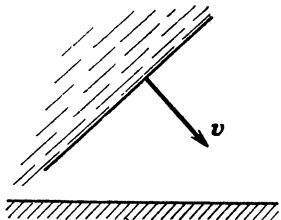


Рис. 83.

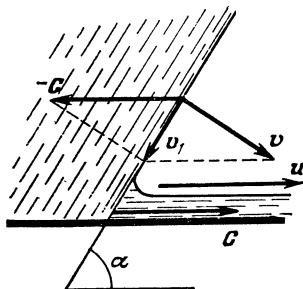


Рис. 84.

Точка пересечения фронта потока и плоскости перемещается вдоль плоскости. Обозначим  $c$  ее скорость. Если мы перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $c$ , то в ней задача сводится к предыдущей — струя движется так, что ее скорость направлена под углом  $\alpha$  к плоскости со скоростью  $v_1 = v - c$  и разбивается на две струи, движущиеся со скоростями, равными по модулю  $v_1$  «вперед» и «назад» вдоль плоскости.

Найдем  $v_1$  и  $c$ . Так как вектор  $v_1$  перпендикулярен к вектору  $v$ , то

$$c = \frac{v}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad v_1 = v \operatorname{ctg} \alpha.$$

В неподвижной системе отсчета, в которой плоскость покоится, скорость  $u$  кумулятивной струи равна  $c + v_1$ , то есть

$$u = \frac{v}{\sin \alpha} + v \operatorname{ctg} \alpha = v \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

При малых  $\alpha$  эта скорость может достигать огромной величины, во много раз превосходящей  $v$ . Например, при  $\alpha = 10^\circ$   $u \approx 11 v$ , при  $\alpha = 2^\circ$   $u \approx 57 v$  и т. д. Во много раз в кумулятивной струе может быть больше и энергия единицы объема жидкости (плотность энергии)  $\rho u^2/2$ . При  $\alpha = 10^\circ$   $\frac{\rho u^2}{\rho v^2} \approx 120$ , при  $\alpha = 2^\circ$   $\frac{\rho u^2}{\rho v^2} \approx 3200$

Возникновением кумулятивной струи объясняются необычайно высокие приливы в некоторых сужающихся заливах. Обычно на берегу океана высота прилива составляет примерно 1 м. В то же время, например, в сужающемся заливе Фанди (Канада) он достигает 15 м. Это объясняется тем, что когда приливная волна входит в залив, она распространяется под углом к берегам. Возникает кумулятивная струя, идущая вдоль берегов и попадающая в узкие части залива. Так как ее скорость в несколько раз превышает скорость приливной волны, то высота прилива оказывается значительно выше.

Кумулятивная струя возникает и при столкновении двух струй, фронты которых движутся под острым углом друг к другу (рис. 85). Такое столкновение происходит, например, в кумулятивном снаряде. Снаряд представляет собой цилиндр, заполненный взрывчатим веществом, в котором сделана выемка. Выемка

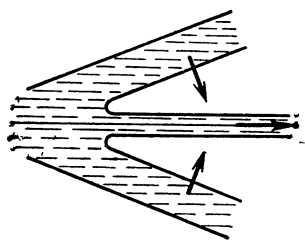


Рис. 85.

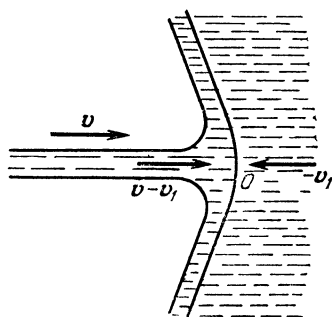


Рис. 86.

покрывается тонкой (1—2 мм) металлической облицовкой. При взрыве облицовка начинает сжиматься, двигаясь со скоростью порядка  $10^3$  м/с, и развивается огромное давление порядка  $4 \cdot 10^{13}$  Н/м<sup>2</sup>. При таком давлении металл ведет себя подобно жидкости и образуется кумулятивная струя толщиной 1,5—3 мм, скорость которой может быть больше  $10^4$  м/с. Такая струя легко пробивает слой стали (брони), толщина которой, как оказывается, равна длине кумулятивной струи.

Этот результат нетрудно получить простыми вычислениями. Так как при больших давлениях металл ведет себя как жидкость, то определим глубину проникновения струи длиной  $l$  и плотности  $\rho_0$  в жидкость плотности  $\rho$ . В жидкости образуется каверна, по стенкам которой начинает растекаться струя (рис. 86). Обозначим  $v_1$  скорость головки струи, которая приняла форму гриба со шляпкой, а  $v$  — скорость струи. В системе от-

счета, движущейся со скоростью  $v_1$ , скорость струи равна  $v - v_1$ , а скорость жидкости равна  $-v_1$ . В вершине головки струй сталкиваются две струи, идущие справа и слева. Их давления должны совпадать. А так как давление, как мы показали, пропорционально  $\rho v^2$ , то

$$\rho_0 (v - v_1)^2 = \rho v_1^2.$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{1 + \sqrt{\rho/\rho_0}}.$$

Если струя падает в жидкость той же плотности, то  $\rho = \rho_0$  и  $v = v/2$  — скорость проникновения струи равна половине скорости струи.

Струя будет проникать в жидкость, пока вся она не пройдет точку  $O$ , т.е. время  $\tau = l/(v - v_1)$ . За это время она пробьет слой жидкости толщиной

$$L = \frac{v}{2} \cdot \tau = l \frac{v}{2(v - v_1)}.$$

При  $\rho = \rho_0$   $L = l$ , то-есть струя пробьет слой жидкости толщиной в длину струи.

В случае кумулятивного снаряда длина струи равна примерной образующей конической вставки. После пробития слоя, толщина которого меньше длины струи, скорость струи равна первоначальной.

Интересное применение кумулятивной струи для сварки металлов предложил академик М. А. Лаврентьев. Если два листа металла бросить плашмя навстречу друг другу с большой скоростью, то возникает кумулятивная струя, бьющая от точки контакта металлов. Эта струя уносит с собой окислы и загрязнения, благодаря чему соединившиеся листы свариваются. Так можно обеспечить высококачественную сварку таких металлов, которые вообще не свариваются друг с другом.

Еще один, теперь уже последний, пример кумулятивной струи. При бросании тела в жидкость, например, камня в воду, в жидкости образуется воронка. Затем жидкость со всех сторон устремляется в воронку и образует кумулятивную струю, поднимающуюся в виде всплеска на довольно большую высоту, иногда выше того уровня, с которого было брошено тело.

Вот к каким интересным выводам приводит почти обычная «школьная» задача.

32. Для простоты будем считать, что кран представляет собой круглую заслонку с площадью  $S$ , равной площади сечения трубы. При закрывании такого крана частицы воды, попавшие на

васлонку, останавливаются, передавая свой импульс заслонке. В результате этого у заслонки образуется область с повышенной плотностью, в которой вода покоится. Границы этой области перемещается по трубе со скоростью звука  $c$  (с этой скоростью распространяется любое упругое возмущение в жидкости). Значит, за время  $\Delta t$  остановятся те частицы, которые находятся в объеме

$$V = Sc \Delta t.$$

Масса этого объема воды равна  $m = \rho Sc \Delta t$  ( $\rho$  — плотность воды), изменение скорости  $\Delta v$  равно  $v$ , а изменение импульса  $\Delta K$  равно  $\rho Scv \Delta t$ .

Следовательно, на воду (согласно второму закону Ньютона) действует сила

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho Scv.$$

Такая же по абсолютной величине сила действует со стороны воды на заслонку, поэтому давление на заслонку равно

$$p = \frac{F}{S} = \rho cv.$$

Подставляя численные значения  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 1500 \text{ м/с}$  и  $v = 10 \text{ м/с}$ , получим

$$p = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Это в 150 раз больше давления усановившегося потока на преграду. Понятно, почему капля долбит камень!

Явление, которое мы разбирали, называется гидравлическим ударом. Встречается оно довольно часто. Оно возникает, например, когда морская волна ударяет о мол или прибрежную скалу. Из-за него опасно упасть в воду плашмя.

33. Будем считать, что труба достаточно длинна, так что граница областей с различной плотностью находится далеко от конца цилиндра. Тогда ясно, что единственной горизонтальной силой, действующей на вещество в цилиндре, является сила  $F$ . Поэтому изменение импульса вещества в цилиндре равно импульсу этой силы.

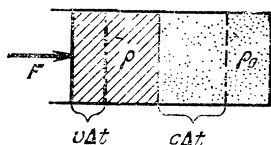


Рис. 87.

Каждая из приведенных в движение частиц вещества движется со скоростью движения границы между областями с различной плотностью. Обозначим скорость движения поршня  $v$ , а плотность сжатого вещества  $\rho$ . За время  $\Delta t$  поршень переместится на расстояние  $l = v \Delta t$  (рис. 87) и в движение придут те частицы, которые находятся в объеме  $v \Delta t \pi r^2$ , причем плотность

этих частиц равна  $\rho_0$  (остальные частицы, плотность которых равна  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ , уже движутся со скоростью  $c$ ). Так как скорость каждой из частиц равна  $c$ , то импульс, который приобретают частицы вещества за время  $\Delta t$ , равен  $v \Delta t \rho_0 \pi r^2$ . Этот импульс, как мы уже говорили, равен импульсу силы  $F$ . Следовательно,

$$F \Delta t = \pi v \rho_0 c r^2 \Delta t. \quad (1)$$

Ясно, что скорости  $c$  и  $v$  не независимы. Из условия сохранения массы следует, что масса вещества, которое находится в объеме  $\pi r^2 v \Delta t$ , при смещении поршня на расстояние  $v \Delta t$  должна распределиться по объему  $\pi r^2 c \Delta t$ , причем здесь она будет иметь плотность  $\Delta\rho$ . Поэтому

$$\pi r^2 v \rho \Delta t = \pi r^2 c \Delta\rho \Delta t.$$

Отсюда

$$c = v \frac{\rho}{\Delta\rho}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в формулу (1), получим

$$F = \pi r^2 v^2 \frac{\rho \rho_0}{\rho - \rho_0}, \quad \Delta\rho = \rho \frac{\rho_0}{\rho_0 c^2 - \rho} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\rho \frac{\rho - \rho_0}{\rho \rho_0}},$$

где  $\rho = F/\pi r^2$  — давление на поршень.

Мы рассмотрели, как распространяется импульс сжатия в упругой среде, например, в газе. Если скорость  $v$  поршня мала, то мал  $\Delta\rho$ , а  $c$  — это скорость звука в газе. В этом случае, впрочем, не происходит скачка плотности — резкого изменения  $\rho$ . Фронт импульса размывается и  $\rho$  меняется плавно. Если скорость поршня велика — больше скорости звука, то картина резко меняется. Прежде всего, в равенство (1) уже входит не скорость  $c$  звука в среде с плотностью  $\rho_0$ , а скорость  $c_1$  в среде с плотностью  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ . При больших  $\Delta\rho$  они не равны. И, как оказывается,  $c_1 > c$ . В этом случае и  $c$  уже не равно скорости звука, а совпадает со скоростью поршня. На фронте импульса развиваются очень большие давления, он резкий — со скачком плотности и давления. Такой импульс называется ударной волной. При движении ограниченного (самолета, снаряда) тела в среде со скоростью больше скорости звука впереди тела бежит ударная волна. Эта ударная волна распространяется затем в стороны со скоростью, равной скорости звука. В результате возникает картина распространения волн, которую мы увидим при решении задачи 154. По этой причине звук летящего со сверхзвуковой скоростью самолета слышен позже того, как самолет пролетит над вами и этот звук слышен как резкий хлопок (скачок давления).

34. При распространении цунами (или прилива) вода приводится в движение и приобретает импульс у переднего фронта волны и затем теряет этот импульс, когда ее обгоняет задний фронт. Обозначим  $v$  скорость волны и рассмотрим движение воды в системе координат, движущейся со скоростью  $v$ . Невозможная вода перед и за цунами движется со скоростью  $-v$ . Обозначим  $u$  скорость воды в некотором сечении  $I$  волны и  $h$  — расстояние в этом сечении до

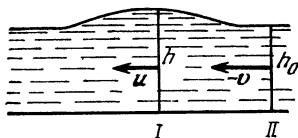


Рис. 88.

дна океана (рис. 88). За время  $\Delta t$  через сечения  $I$  и  $II$  проходят одинаковые объемы воды (вода несжимаема). Следовательно,  $h_0 v \Delta t = hu \Delta t$  и

$$u = \frac{vh_0}{h}. \quad (1)$$

Так как  $h > h_0$ , то  $u < v$  и, следовательно, импульс воды, проходящей через слой  $I-II$  за время  $\Delta t$ , уменьшается на  $\Delta m(v - u) = lh_0 v \Delta t (v - u) \rho$ , где  $\rho$  — плотность воды и  $l$  — длина некоторого выделенного фронта волны. Это изменение импульса равно импульсу внешних сил  $F_1$  и  $F_2$ , действующих на границах слоя  $I-II$ , то есть в сечениях  $I$  и  $II$ . Среднее давление в сечении  $I$  равно  $\frac{1}{2} \rho gh$ , а площадь сечения  $lh$ . Следовательно,  $F_1 = \frac{1}{2} \rho gh^2 l$ . В сечении  $II$  соответственно  $F_2 = \frac{1}{2} \rho gh_0^2 l$ . Равнодействующая этих сил равна их разности, а ее импульс  $(F_1 - F_2) \Delta t = \frac{1}{2} \rho gl (h^2 - h_0^2) \Delta t$ . Так как  $h \approx h_0$  (высота волны мала по сравнению с глубиной океана), то можно считать, что  $h + h_0 \approx 2h_0$ , так что импульс внешних сил равен  $\rho gl h_0 (h - h_0) \Delta t$  и, следовательно,

$$lh_0 (v - u) \rho v \Delta t = \rho gl (h - h_0) h_0 \Delta t$$

или

$$v (v - u) = g (h - h_0). \quad (2)$$

Подставляя сюда  $u = vh_0/h$ , получим

$$v^2 \frac{h - h_0}{h} = (h - h_0) g.$$

Отсюда, если учесть, что  $h \approx h_0$ , найдем

$$v = \sqrt{gh} \approx \sqrt{gh_0}. \quad (3)$$

При распространении коротких гравитационных волн, длина волны  $\lambda$  которых мала по сравнению с глубиной океана, роль глубины океана играет длина волны, так как на глубине такого

порядка затухает возмущение поверхности океана. Поэтому скорость распространения таких волн оказывается пропорциональной  $\sqrt{g\lambda}$ . Скорость же цунами, как мы видели, не зависит от длины волны. Такова же скорость приливной волны и вообще любых волн, длина которых много больше глубины океана. Подставляя в формулу (3)  $h_0 = 5 \cdot 10^3$  м, найдем 220 м/с. Найдем еще время, за которое цунами или приливная волна может обогнуть земной шар:

$$t = \frac{2\pi R_3}{v} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 50 \text{ ч.}$$

Если убрать Луну и образовавшимся ранее приливным волнам предоставить возможность распространяться вокруг земного шара, то каждый из максимумов прилива проходил бы данную точку через 50 ч. Так как максимумов приливов два, то время между приливами было бы 25 ч — на час больше суток. Из-за влияния Луны распространение приливной волны оказывается не свободным, а вынужденным. Его можно сопоставить с вынужденными колебаниями маятника (см. задачу 148).

35. При движении стула до момента соприкосновения передних ножек с полом его центр тяжести опишет дугу окружности с центром, лежащим на прямой, проходящей через задние ножки стула. В момент удара о пол скорость центра тяжести будет иметь проекции как на вертикальную, так и горизонтальную оси. Удар о пол является неупругим и вертикальная проекция скорости центра тяжести стула «гасится». Для того чтобы обратилась в нуль горизонтальная проекция скорости центра тяжести, нужно, чтобы сила трения действовала некоторое время ( $F_{тр}t = mv_{гор}$ ), а за это время стул сдвинется на некоторое расстояние вперед.

При большом начальном отклонении стула в момент удара передних ножек о пол задние могут оторваться от пола.

Одно время в литературе много писалось об инерциоидах — устройствах, которые, как утверждали авторы, движутся благодаря внутренним силам. Так как это противоречит законам механики, то эти законы объявлялись неверными. В действительности, конечно, поведение всех этих устройств прекрасно описывалось законами механики, а авторы плохо учитывали внешние силы и их характер, в частности, силу трения.

Таким инерциоидом может быть стул с сидящим на нем человеком. Если, сидя на стуле (не касаясь ногами пола), резко отклониться назад, то стул отклонится от вертикали (делайте это не слишком энергично, а то перевернетесь!). Возвращаясь в нормальное положение, вы вместе со стулом отклонитесь вперед.



Нетрудно сообразить, что когда вы откидываетесь назад, сила, действующая на ножки стула, увеличивается. Поэтому велика и сила трения, не дающая им возможность проехать назад. При дальнейшем же движении стула, когда центр тяжести человека со стулом движется по дуге, сила давления на пол уменьшается и сила трения оказывается недостаточной, чтобы удержать стул на месте.

36. Время столкновения пули с дверью малое. За это время деформация, вызываемая давлением пули, не успевает распространиться на большие расстояния. Поэтому импульс, теряемый пулей, передается сравнительно небольшому участку двери, и пуля пробивает в ней небольшое отверстие.

За время входа пули в стакан уровень воды в стакане не успевает измениться. Поэтому в месте входа пули вода сжимается и возникает область высокого давления, которая, расширяясь со скоростью звука, достигает через некоторое время стенок стакана. Стакан разлетается вдребезги.

37. За время  $\Delta t$  насос подает на высоту  $H$  массу воды  $\rho V \Delta t$ , совершая работу  $A$ , равную изменению механической энергии воды. Так как насос «гонит» воду с некоторой скоростью  $v$ , то

$$A = \frac{(\rho v \Delta t) v^2}{2} + (\rho V \Delta t) gH.$$

Следовательно, мощность насоса

$$N = \frac{\rho V v^2}{2} + \rho V gH.$$

Найдем скорость  $v$ . За время  $\Delta t$  через поперечное сечение трубы площадью  $S = \pi d^2/4$  проходит объем воды  $V \Delta t = v \Delta t \pi d^2/4$ . Отсюда,

$$v = \frac{4V}{\pi d^2}.$$

Таким образом, мощность насоса

$$N = \frac{32\rho V^3}{\pi^2 d^4} + \rho V gH.$$

Из последнего выражения видно, что чем больше диаметр  $d$  трубы, тем меньше необходимая мощность насоса. Но можно уменьшить величину  $N$ , не меняя диаметра трубы. Если трубу обрезать на высоте  $h \ll H$ , то вода будет вылетать из трубы с некоторой скоростью  $u$ . Для этого необходима мощность насоса

$N' = \frac{\rho V u^2}{2}$  (так как  $h \ll H$ , то потенциальной энергией на высоте  $h$  для простоты мы пренебрегаем). Для того чтобы вода

поднялась на высоту  $H$ , необходимо, чтобы ее скорость была не меньше, чем

$$u_{\min} = \sqrt{2g(H-h)} \approx \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, получим, что в этом случае можно использовать насос мощностью

$$N' = \rho V g H.$$

38. Вертолет (или модель) удерживается в воздухе благодаря реактивной силе, возникающей, когда винт отбрасывает воздушную струю. При этом на вертолет со стороны отбрасываемой струи согласно третьему закону Ньютона действует сила, равная по абсолютной величине силе, действующей на струю. Обозначим  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$  — площадь струи и  $v$  — ее скорость. Тогда за время  $\Delta t$  винтом «отбрасывается» вниз объем воздуха  $Sv \Delta t$  с массой  $m = \rho Sv \Delta t$ , а импульс воздуха изменяется на величину

$$\Delta K = mv = \Delta S v^2 \Delta t.$$

Согласно второму закону Ньютона на воздух действует сила

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

Эта сила равна весу вертолета

$$\rho S v^2 = Mg, \quad (1)$$

мощность же двигателя равна энергии, сообщаемой воздуху за 1 с:

$$N = \frac{mv^2}{2 \Delta t} = \frac{1}{2} \rho S v^3. \quad (2)$$

Подставляя сюда  $v = \sqrt{Mg/\rho S}$ , получим

$$N = \frac{1}{2} Mg \sqrt{Mg/\rho S}. \quad (3)$$

Так как масса вертолета пропорциональна объему, то есть кубу линейных размеров ( $L^3$ ), а  $S \sim L^2$ , то из (3) имеем

$$N \sim L^{7/2}.$$

Это означает, что отношение мощностей двигателей вертолета и модели должно быть равно отношению их линейных размеров в степени  $7/2$ :

$$\frac{N}{N_{\text{мод}}} = \left( \frac{L}{L_{\text{мод}}} \right)^{7/2} = 10^{7/2}.$$

Отсюда

$$N = N_{\text{мод}} \cdot 10^{7/2} \approx 96 \text{ кВт}.$$

39. Работа  $A$  двигателя равна изменению кинетической энергии воды. За время  $\Delta t$  двигатель засасывает объем воды  $V = vS \Delta t$ , имеющий относительно катера скорость  $v$  и кинетическую энергию

$$E_k = \frac{1}{2} (vS \Delta t) \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho S v^3 \Delta t$$

( $\rho$  — плотность воды).

Эта вода выбрасывается со скоростью  $u$ , и

$$E'_k = \frac{1}{2} (\rho S v \Delta t) u^2.$$

Так как вода несжимаема, то  $vS \Delta t = us \Delta t$ , так что  $u = v \frac{S}{s}$  и

$$E'_k = \frac{1}{2} \rho \frac{S^3}{s^2} v^3 \Delta t.$$

Отсюда

$$A = E'_k - E_k = \frac{1}{2} \rho \frac{S(S^2 - s^2)}{s^2} v^3 \Delta t.$$

Полезная же работа равна

$$A_{\text{пол}} = F_{\text{реакт}} v \Delta t,$$

где  $F_{\text{реакт}}$  — реактивная сила, действующая на корабль. Она равна по абсолютной величине изменению импульса воды в единицу времени, так что

$$A_{\text{пол}} = \rho \frac{S - s}{s} v^3 \Delta t,$$

а

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{s^2}{S(S + s)}.$$

40. Пренебрежем трением качения и сопротивлением воздуха. Вначале максимальное ускорение, с которым может двигаться автомобиль, определяется максимальным значением силы трения колес о дорогу:

$$a = \frac{F_{\text{тр}}}{M} = \frac{\mu Mg}{M} = \mu g.$$

При этом автомобиль движется с мощностью, меньшей максимальной (чтобы не было проскальзывания), а его скорость пропорциональна времени

$$v = at = \mu gt.$$

В момент времени  $t = t_1$  скорость станет равной  $v_1 = \mu g t_1$ , а мощность двигателя достигнет величины  $N$ , причем

$$N = F_{\text{тр}} v_1 = \mu Mg \cdot \mu g t_1 = \mu^2 g^2 M t_1.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{N}{\mu^2 g^2 M} \approx 2,8 \text{ с, а } v_1 = \mu g t_1 \approx 16,8 \text{ м/с.}$$

Начиная с этого момента сила трения становится меньше максимальной, и изменение кинетической энергии автомобиля равно  $N(t - t_1)$ . Отсюда

$$t = t_1 + \frac{M(v^2 - v_1^2)}{2N} \approx 6,5 \text{ с.}$$

41. Так как частицы воды на поверхности находятся в равновесии, то потенциальная энергия частиц одинакова как в «углублении», так и далеко от полости. Далеко от полости она равна  $-\gamma \frac{Mm}{R}$ , в низшей точке «углубления»  $-\gamma \frac{Mm}{R-h} + \gamma \frac{V\rho m}{L+r}$ , где  $m$  — масса частицы воды,  $L$  — глубина океана,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  — объем полости,  $M$  — масса Земли,  $R$  — радиус Земли. Таким образом,

$$\gamma \frac{M}{R} = \gamma \frac{M}{R-h} - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho \frac{r^3}{L+r}.$$

Отсюда, учитывая, что плотность Земли

$$\rho = M / \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ получим}$$

$$hR(L+r) = r^3.$$

Полагая  $r \gg L$ , найдем

$$r \approx \sqrt{2hR} \approx 15,7 \text{ км.}$$

Более точно это уравнение можно решать графически, начертив на миллиметровке графики функций  $y_1 = r^3$  и  $y_2 = (L+r)hR$ , где  $L \approx 10$  км, и найдя точку их пересечения.

Таким же способом можно оценить высоту прилива. Для этого достаточно приравнять потенциальную энергию массы  $m$  воды в поле тяжести Земли и Луны в точках 1 и 2 поверхности (рис. 89).

42. Для простоты будем считать, что скорость спутника изменяется за очень короткий промежуток времени (малый по сравнению с периодом обращения спутника по круговой орбите). Минимальное расстояние от поверхности Земли до эллиптической

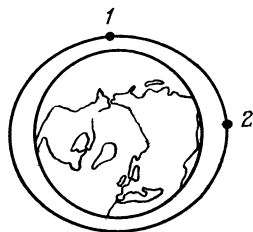


Рис. 89.

орбиты равно радиусу первоначальной круговой орбиты, то есть обе орбиты спутника имеют общую точку (точка 1 на рис. 90), в которой и произошло изменение скорости спутника. Найдем скорости  $v_0$  и  $v_1$  спутника: в этой точке на круговой и эллиптической орбитах, а затем и изменение скорости  $\Delta v = v_1 - v_0$ .

Вначале определим скорость  $v_0$  спутника при движении по круговой орбите. Так как центростремительное ускорение  $a = v_0^2 / (R + h)$  ( $R$  — радиус Земли) спутнику сообщает сила тяготения  $F = \gamma \frac{mM}{(R + h)^2}$  ( $M$  — масса Земли,  $m$  — масса спутника), то согласно второму закону Ньютона

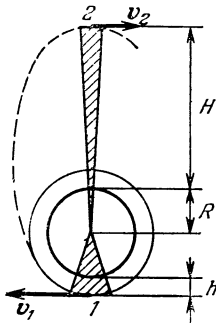


Рис. 90.

на  $\frac{mv_0^2}{R + h} = \gamma \frac{mM}{(R + h)^2}$ . Из этого равенства непосредственно найдем, что

$$v_0 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R + h}}.$$

Для того чтобы определить скорость  $v_1$  спутника, когда он движется по эллиптической орбите на высоте  $h$  над Землей, воспользуемся законом сохранения энергии и законом Кеплера.

В тот момент, когда спутник находится на расстоянии  $h$  от Земли, он обладает потенциальной энергией  $\Pi_1 = -\gamma \frac{mM}{R + h}$ .

Кроме того, спутник имеет кинетическую энергию  $K_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ .

На высоте  $H$  от Земли спутник обладает потенциальной энергией  $\Pi_2 = -\gamma \frac{mM}{R + H}$  и кинетической энергией  $K_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ , где  $v_2$  — скорость спутника на высоте  $H$ . Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R + h} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R + H}.$$

По второму закону Кеплера площади, заметаемые радиус-вектором спутника за равные промежутки времени, равны. На рис. 90 это площади заштрихованных фигур. Если промежуток времени мал, скорости движения спутника вблизи точек 1 и 2 можно считать постоянными. Тогда вместо секторов\* можно рас-

смагивать соответствующие равнобедренные треугольники. Запишем равенство их площадей:

$$\frac{1}{2} v_1 (R + h) \Delta t = \frac{1}{2} v_2 (R + H) \Delta t.$$

Из последних двух равенств найдем

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{2R + H + h} \cdot \frac{R + H}{R + h}}.$$

Тогда изменение скорости спутника

$$\Delta v = v_1 - v_0 = 2365 \text{ м/с.}$$

Теперь определим период  $T$  обращения спутника по эллиптической орбите. Согласно закону Кеплера отношение квадратов периодов обращения спутника равно отношению кубов больших полуосей. Поэтому

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{(2R + H + h)^3}{8(R + h)^3},$$

где  $T_0$  — период обращения спутника по круговой орбите радиуса  $R + h$ . Он равен  $T_0 = 2\pi(R + h)/v_0$ .

Следовательно,

$$T = \pi(2R + H + h) \sqrt{\frac{2R + H + h}{2\gamma M}} \approx 12,1 \text{ ч.}$$

43. Энергия спутника равна (см. задачу 42)

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{R},$$

где  $R$  — радиус орбиты,  $v$  — скорость спутника. В случае круговой орбиты  $v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}$ , так что

$$E = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM}{R} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{Mm}{R}. \quad (1)$$

Если включить двигатель, разгоняя спутник, то  $E$  увеличится. Это, как видно из (1), приведет к увеличению среднего радиуса орбиты, а так как квадраты периодов обращения спутников относятся как кубы больших полуосей их орбит, то период обращения спутника тоже увеличится. Старая и новая орбиты спутника будут проходить через одну и ту же точку (в которой включался двигатель). Однако теперь спутник будет приходить в эту точку через больший промежуток времени, чем первый, и, следовательно, расстояние между спутниками начнет увеличиваться. Так состыковаться не удастся.

Как же состыковать спутник? Для этого можно, например, сообщить импульс «назад». Тогда орбитой станет эллипс с меньшей, чем радиус окружности большой полуосью, а период обращения спутника уменьшится. Благодаря этому спутники в области пересечения их орбит будут сближаться. После сближения можно увеличить скорость спутника, чтобы сделать ее такой же, как у первого, и осуществить «мягкую» стыковку.

44. Обозначим скорость налетающего шара до столкновения  $v_0$ , после столкновения  $v$  и скорость покоящегося шара после столкновения  $u$ .

Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} m v^2, \quad (1)$$

$$m v_0 = M u + m v. \quad (2)$$

Решая эту систему совместно, найдем

$$u = v \frac{2}{k+1},$$

где  $k = \frac{M}{m}$  — отношение масс шаров.

Теперь можно найти энергию, переданную первоначально покоящемуся шару

$$E = \frac{M u^2}{2} = 4k \frac{m v^2}{2} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как  $\frac{m v^2}{2} = E_0$  — это начальная энергия налетающего шара, то

$$E = 4E_0 \frac{k}{(k+1)^2}. \quad (3)$$

Исследуем полученное выражение. Очевидно, что при  $k=0$  и  $k \rightarrow \infty$  энергия  $E \rightarrow 0$ .

Так как функция  $\frac{k}{(k+1)^2}$  непрерывна, то при некотором значении  $k$  она будет максимальной. Ясно, что максимум функции соответствует минимуму выражения  $\frac{(k+1)^2}{k} = k + \frac{1}{k} + 2$ , или  $k + \frac{1}{k}$ . Но так как  $k + \frac{1}{k} \geq 2 \sqrt{k \cdot \frac{1}{k}} = 2$ , то его минимальное значение равно 2:

$$k + \frac{1}{k} = 2.$$

Отсюда найдем, что при этом  $k=1$ . Следовательно, налетающий шар теряет максимальную часть своей кинетической энергии при

столкновении с шаром той же массы. График зависимости  $E(k)$  показан на рис. 91.

Теперь понятно, что для того чтобы замедлить нейтроны — отобрать у них максимально возможную часть энергии, необходимо, чтобы нейтроны сталкивались с атомами как можно более близкой массы — лучше всего с ядрами атомов водорода. Поэтому для защиты от нейтронов и используются водородсодержащие вещества.

Формула (3) позволяет понять одну из основных трудностей, с которой сталкивается осуществление управляемого термоядерного синтеза. Для того чтобы такой синтез стал возможен, дей-

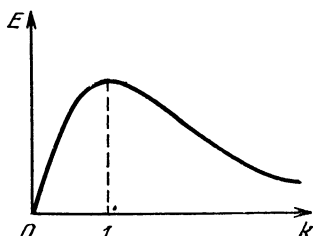


Рис. 91.

териевая или дейтерий-тритиевая плазма должна быть нагрета до температуры в несколько сотен миллионов градусов ( $10^8$ — $10^9$  K). Соответствующую энергию должны иметь ионы дейтерия и трития. Самый простой способ увеличения энергии заряженных частиц — воздействие на них электрического поля. Но при этом практически вся энергия воспринимается электронами, имеющими большую длину свободного пробега. Конечно, в дальнейшем энергии электронов и ионов должны постепенно выравниваться. Однако из-за большого отношения масс при каждом столкновении электрон передает иону очень маленькую энергию и поэтому время установления теплового равновесия очень велико — больше времени удержания плазмы.

45. На кубик при ударе о стенку действуют две силы: сила нормальной реакции стенки и сила трения  $F_{тр}$  (рис. 92). Разложим скорости кубика до и после столкновения со стенкой на составляющие, параллельные этим силам.

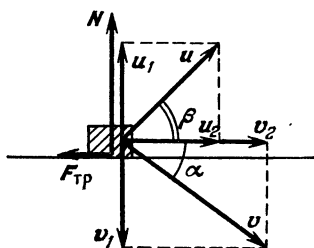


Рис. 92.

Скорости  $v_1 = v \sin \alpha$  и  $u_1$  перпендикулярны к стенке, а скорости  $v_2 = v \cos \alpha$  и  $u_2$  параллельны ей. В направлении, перпендикулярном к стенке, между кубиком и стенкой, как обычно, происходит абсолютно упругий удар, в результате которого составляющая скорости кубика, перпендикулярная к стенке, меняется на противоположную:  $u_1 = -v \sin \alpha$ . Это означает, что составляющая импульса кубика,



перпендикулярная к стенке, меняется на  $2mv \sin \alpha$  ( $m$  — масса кубика).

Если время соударения кубика со стенкой обозначить  $\tau$ , в средняя абсолютная величина силы реакции стенки равна  $N_{\text{ср}}$ , то согласно второму закону Ньютона изменение составляющей импульса кубика, перпендикулярной к стенке, равно импульсу силы  $N_{\text{ср}}$ , то есть  $2mv \sin \alpha = N_{\text{ср}}\tau$ .

Если бы на кубик не действовала сила трения, то составляющая импульса кубика, параллельная стенке, не изменилась бы и кубик отскочил бы от стенки под тем же углом  $\alpha$ , под которым двигался к ней до удара. Однако благодаря действию силы трения в нашем случае меняется и составляющая  $v_2$  скорости кубика. Предположим вначале, что средняя сила трения  $F_{\text{тр. ср}} = N_{\text{ср}}\mu$ , действующая на кубик, такова, что за время взаимодействия кубика со стенкой составляющая скорости кубика, параллельная стенке, не успевает уменьшиться до нуля. В этом случае  $mu_2 - mv_2 = -F_{\text{тр. ср}}\tau$ , или  $mu_2 = mv \cos \alpha - N_{\text{ср}}\mu\tau$ .

Но  $N_{\text{ср}}\tau = 2mv \sin \alpha$ , поэтому

$$mu_2 = mv \cos \alpha - 2\mu mv \sin \alpha$$

или

$$u_2 = v (\cos \alpha - 2\mu \sin \alpha).$$

Следовательно, кубик отскочит под углом  $\beta$  таким, что

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - 2\mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Однако, если  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{2\mu}$ , то кубик будет проскальзывать относительно стенки не все время удара, а только до тех пор, пока составляющая его скорости, параллельная стенке, не обратится в нуль. Вместе с ней обратится в нуль и сила трения, действующая на кубик, и кубик отскочит под углом  $90^\circ$  к стенке.

46. Перейдем в систему отсчета, связанную с ногой футболиста. В этой системе отсчета покоящийся относительно земли мяч налетает на ногу с некоторой скоростью.

Если при ударе не происходит потери энергии, то мяч отлетает с той же скоростью и, следовательно, его скорость относительно земли равна удвоенной скорости ноги. Потери энергии приводят к тому, что скорость мяча будет меньше. В случае абсолютно неупругого удара скорость мяча равна скорости ноги, и тогда дальность полета мяча примерно в четыре раза больше дальности его полета при абсолютно упругом ударе.

Рассмотрим, чем определяются потери энергии. При ударе деформации ботинка и мяча являются упругими (если только мяч накачан не слишком слабо), так как после удара и ботинок

и мяч восстанавливают свою форму. Однако восстанавливать свою форму мяч и ботинок могут не одновременно, и тогда мяч отскочит, не получив всей запасенной при ударе потенциальной энергии деформации. При ударе и деформации соприкасающихся частей ботинка и мяча в них возникают бегущие волны сжатия. Если эти волны возвращаются назад одновременно, то их энергия почти полностью переходит в кинетическую энергию мяча. Если мяч недостаточно накачан или «перекачан», одна из волн приходит раньше и мяч отскакивает, не получив всей энергии упругой деформации.

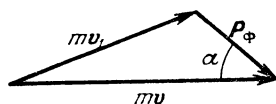


Рис. 93.

47. Атом, излучив фотон с энергией  $h\nu$  и импульсом  $p_\phi = \frac{h\nu}{c}$ , приобретает импульс  $mv_1$ . Из закона сохранения импульса следует, что вектор  $mv$  начального импульса атома и векторы  $mv_1$  и  $p_\phi$  образуют треугольник (рис. 93). Поэтому

$$(mv_1)^2 = (mv)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2mv\frac{h\nu}{c} \cos \alpha. \quad (1)$$

Кроме того, согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + h\nu - \Delta E \quad (2)$$

( $\Delta E$  — изменение внутренней энергии атома).

Для излучения первоначально покоящимся атомом мы можем записать

$$0 = mu - \frac{h\nu_0}{c} \quad \text{и} \quad \Delta E = \frac{mu^2}{2} + h\nu_0,$$

где  $u$  — скорость атома после излучения.

Из этих уравнений найдем

$$\Delta E = h\nu_0 \left(1 + \frac{h\nu_0}{2mc^2}\right). \quad (3)$$

Теперь из равенств (1)–(3) нетрудно получить

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu} \left[1 + \frac{h}{2mc^2}(\nu + \nu_0)\right] = \frac{\nu}{c} \cos \alpha.$$

Для малых (оптических) частот можно пренебречь вторым членом в квадратных скобках. В результате мы получим

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu} \approx \frac{\nu}{c} \cos \alpha.$$

Это и есть формула Доплера.

Итак, движущийся атом излучает свет, частота которого отличается от частоты излучения покоящегося атома. Если атом

движется к наблюдателю, то частота излучения  $\nu > \nu_0$ , а длина волны  $\lambda$  меньше  $\lambda_0$ . При движении от наблюдателя  $\cos \alpha = -1$ ,  $\Delta\nu < 0$ , то есть  $\nu < \nu_0$ , а  $\lambda > \lambda_0$ . Уменьшение частоты излучения, которое приходит к нам от далеких звезд (красное смещение), позволяет измерять их лучевые скорости. Более того, эффект Доплера позволяет определить, вращается ли звезда, расширяется ли ее газовая оболочка и так далее. Эффект Доплера позволяет измерять на расстоянии и температуру различных объектов. Так как атомы вещества находятся в хаотическом тепловом движении, то частота излучения имеет непрерывный набор значений от  $\nu - \Delta\nu$  до  $\nu + \Delta\nu$ , где  $\Delta\nu$  определяется скоростью теплового движения  $v \sim \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$  ( $T$  — температура тела). Говорят, что спектральная линия уширяется. По уширению линии нетрудно найти  $v$ , а затем и температуру  $T$  тела. Это, конечно, только некоторые из применений эффекта Доплера в современной физике и технике.

48. При излучении  $\gamma$ -кванта его энергия меньше разности внутренних энергий ядра на величину энергии движения самого ядра из-за отдачи. Для того чтобы  $\gamma$ -квант мог поглотиться ядром, его энергия должна быть больше, чем разность внутренних энергий ядра на величину кинетической энергии, которую атом приобретает после поглощения.

Если атом является узлом решетки, то отдача может восприниматься всем кристаллом в целом, а так как его масса много больше массы одного атома, энергия отдачи мала. В этом случае  $\gamma$ -квант, излученный ядром атома, может поглотиться ядром атома такого же кристалла (эффект Мёссбауэра).

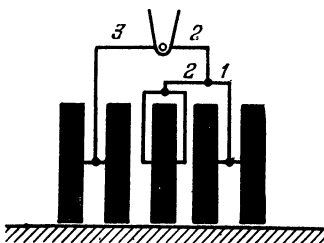


Рис. 94.

49. На рис. 94 показана конструкция подвески передних колес. Цифры показывают относительную длину соответствующей части рычага.

50. Сила может зависеть только от диаметра  $d$  столба, коэффициента трения  $\mu$  между столбом и канатом и от силы  $F$ . Из соображений размерности следует, что  $f \sim F$ . Действительно, никакая другая комбинация величин  $F$ ,  $\mu$  и  $d$  не будет иметь размерность силы ( $\mu$  — безразмерная). Таким образом,

$$f = kF,$$

где  $k$  — константа, которая определяется величиной  $\mu$ .

Из этой формулы следует, что при любом изменении диаметра столба сила  $f$  останется прежней.

Найдем теперь, как изменится сила  $f$  при намотке на столб  $n$  витков каната.

Для второго витка роль силы  $F$  играет сила  $f$ . Следовательно,

$$f_2 = kf = k^2 F,$$

где  $f_2$  — сила, которую нужно приложить к свободному концу каната при двух витках. Для третьего витка

$$f_3 = kf_2 = k^3 F.$$

Для  $n$ -го витка получим:

$$f_n = k^n F.$$

Из первого равенства следует, что  $k = f/F$ . Поэтому  $f_n = \left(\frac{f}{F}\right)^n F$ .

51. При отклонении игрушки, например, вправо, центр тяжести смещается (рис. 95). Если при этом он окажется левее вертикали  $AB$ , то момент силы тяжести относительно точки опоры  $A$  будет возвращать игрушку в положение равновесия. Если же он окажется правее, то игрушка упадет.

Обозначим  $\alpha$  угол поворота игрушки, а  $\beta$  — угол поворота радиуса  $O_1A$ . Так как дуги  $CA$  и  $KA$  равны (нет проскальзывания), то  $\alpha r = \beta R$ , так что  $\beta = \alpha \frac{r}{R}$ . Из треугольника  $OAB$  имеем:

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{r}{\sin[\alpha(1 + r/R)]}.$$

При малом отклонении  $\sin \beta \approx \beta$  и  $\sin[\alpha(1 + r/R)] \approx \alpha(1 + r/R)$ . Поэтому

$$\frac{OB}{\alpha r/R} = \frac{r}{\alpha(1 + r/R)}, \quad \text{или} \quad OB = \frac{r^2}{R + r}.$$

Положение равновесия устойчиво, если  $OC = \frac{1}{2} r > OB$ , т. е.

$$\frac{r}{2} > \frac{r^2}{R + r}$$

или

$$R > r.$$

52. При малых относительных деформациях пружина является упругой, то есть целиком восстанавливает свою форму и

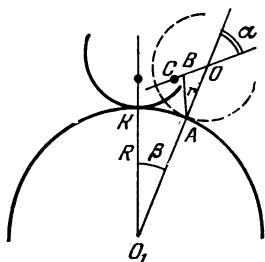


Рис. 95.

размеры после освобождения ее концов. Если же относительные деформации велики, пружина становится пластичной, возникает остаточная деформация. Длина пружины становится больше, чем  $l_0$ , если пружину растягивали, и меньше, чем  $l_0$ , если ее сжимали. Воспользуемся этим свойством пружины для решения задачи.

Возьмем закрепленную на концах пружину за виток, который находится ближе к одному концу пружины, чем к другому, и сдвинем этот виток к дальнему концу пружины (рис. 96). Одна часть пружины окажется растянутой, а другая — сжатой.

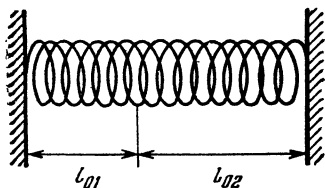


Рис. 96.



Рис. 97.

При этом их абсолютные деформации  $\Delta l$  будут одинаковыми, а относительные деформации — разными. Относительная деформация  $\Delta l/l_{01}$  короткой части пружины будет больше, чем относительная деформация  $\Delta l/l_{02}$  длинной части пружины:

$$\frac{\Delta l}{l_{01}} > \frac{\Delta l}{l_{02}}.$$

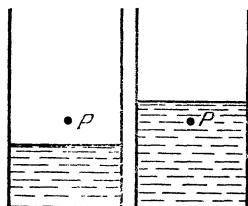
Это означает, что можно подобрать такие  $\Delta l$ ,  $l_{01}$  и  $l_{02}$ , что деформация длинной части пружины будет еще упругой, а короткой части — уже пластичной. После такой «обработки» длина длинной части (которая была сжата) останется прежней, а длина короткой части (которая была растянута) увеличится. Увеличится и длина всей пружины в недеформированном состоянии. Следовательно, закрепленная на концах пружина будет стремиться удлиниться.

Аналогично, если рассматриваемый виток пружины сдвинуть к ближнему концу пружины и приложить внешние усилия такие, чтобы деформация длинной (растянутой) части пружины была упругой, а деформация короткой (сжатой) части пластичной, то пружина после обработки будет стремиться сократиться.

53. Потянув за одно из звеньев цепочки (рис. 97), ей можно придать форму стержней. При этом будет произведена работа, которая, очевидно, идет на увеличение потенциальной энергии цепочки, то есть на подъем ее центра тяжести. Так как в новом положении центр тяжести цепочки совпадает с положением цен-

тра тяжести стержней, ясно, что центр тяжести свободно висящей цепочки расположен ниже центра тяжести стержней.

54. Наинизшее положение центр тяжести стакана с сахаром занимает тогда, когда он находится на уровне сахара в стакане. Действительно, если уровень сахара лежит ниже центра тяжести системы (точки  $P$  на рис. 98, а), то центр тяжести понижается при досыпании в стакан сахара (при этом увеличивается масса ниже центра тяжести). Если же уровень сахара лежит выше центра тяжести системы (рис. 98, б), то центр тяжести опустится, если высыпать часть сахара выше него. Заполненный таким образом стакан наиболее устойчив.



а) б)

Рис. 98.

55. Если давление в трубе равно  $p$ , то на единицу длины поперек трубы

приходится сила  $F_1 = p \frac{S_{\text{горца}}}{2\pi R} = \frac{pR}{2}$ ,

$R$  — радиус трубы. Вдоль трубы на единицу длины приходится

сила  $F_2 = \frac{pl \cdot 2R}{2l + 4R} \approx pR$ , то есть вдвое больше, чем  $F_1$ . По-

этому труба всегда лопаётся вдоль, а не поперек. По этой же причине лопаются вдоль сардельки при варке.

56. Для того чтобы щетка удерживалась в равновесии, нужно в случае ее отклонения от положения равновесия, т. е. поворота на некоторый угол, успеть подвинуть палец так, чтобы щетка вновь оказалась в положении равновесия. Щетка будет отклоняться медленнее, чем палка той же длины, так как центр тяжести щетки лежит выше центра тяжести палки. (Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрите, как зависит время падения легкого стержня с укрепленным на его конце тяжелым шаром от длины стержня.)

Поэтому щетку удерживать легче, чем палку.

57. Для того чтобы сохранять равновесие при езде на велосипеде, нужно, теряя равновесие, т. е. наклоняясь в какую-нибудь сторону, всегда поворачивать руль в ту же сторону, в которую падаешь. При езде «без рук» это происходит автоматически благодаря тому, что ось переднего колеса, а вследствие этого и центр масс вилки и колеса велосипеда, не проходит через ось руля, а лежит несколько впереди нее.

Наоборот, чтобы повернуть, надо согнуться так, чтобы наклонить велосипед в сторону поворота.

58. Давление  $p$  на стол в тот момент, когда вода начинает подтекать, равно  $\rho gR$ , а сила давления (сила, действующая на

стал) равна  $\rho S$ , или

$$F = \rho S = \pi \rho g R^3.$$

Эта же сила равна  $Mg$ , где  $M$  — общая масса колокола и воды:

$$F = Mg = mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g.$$

Следовательно,

$$mg + \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g = \pi \rho g R^3.$$

Отсюда

$$m = \frac{1}{3} \pi \rho R^3.$$

59. Независимо от того, какой сосуд нагревается, вода потечет направо. Пусть нагревается жидкость в правом сосуде. Тогда она расширится и займет больший объем. Если бы сосуд был цилиндрическим (рис. 99), то давление жидкости на дно не изменилось бы: уменьшение плотности воды в точности компенсировалось бы увеличением высоты столба жидкости. Это следует

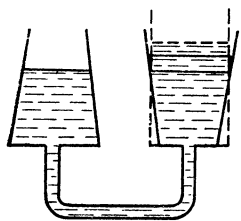


Рис. 99.

из того, что сила давления на дно цилиндрического сосуда, с одной стороны, равна силе тяжести, действующей на находящуюся в сосуде воду, а с другой стороны, равна давлению жидкости на дно, умноженному на площадь дна, т.е.  $\rho S$ . Так как ни сила тяжести, ни площадь дна при нагревании жидкости не меняются, то и давление на дно цилиндрического сосуда не меняется.

В коническом расширяющемся сосуде при таком же уменьшении плотности жидкости увеличение высоты столба меньше, чем в цилиндрическом сосуде. Это происходит по двум причинам: во-первых, расширяется меньшее количество жидкости, а значит, меньше изменение ее объема; во-вторых, при расширении вода должна заполнить объем, заштрихованный на рисунке. Поэтому давление на дно сосуда при нагревании жидкости уменьшается. Так как при равновесии жидкости в трубке, соединяющей сосуды, давление у ее конца в левом сосуде должно быть равно давлению у ее конца в правом сосуде, то жидкость будет перетекать из левого сосуда в правый.

60. Давление на дно в обоих сосудах одинаково (в противном случае жидкость не находилась бы в равновесии), поэтому, так как температуры, а следовательно, и плотности жидкостей

различны, уровень жидкости в сосуде с большей температурой и соответственно с меньшей плотностью жидкости выше, чем во втором сосуде. Нарисуем график зависимости давления в каждом из сосудов от высоты (рис. 100),  $p_0$  — атмосферное давление. На той высоте, на которой находится верхняя трубка, давления в сосудах будут соответственно равны  $p_1$  и  $p_2$ . И так как  $p_1 > p_2$ , то при открывании крана жидкость будет переливаться по верхней трубке из сосуда с большей температурой в сосуд с меньшей температурой. Но уровень воды в каждом из сосудов должен оставаться неизменным, так как только в этом случае давления на дно обоих сосудов будут одинаковы.

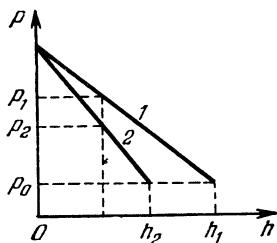


Рис. 100.

А значит, по нижней трубке, соединяющей сосуды, жидкость будет перетекать из сосуда с меньшей температурой в сосуд с большей температурой.

61. Система из трубок будет работать как сифон. Из верхней бочки вода будет перетекать в среднюю и нижнюю. Кроме того, из средней бочки вода будет перетекать в нижнюю. Так как скорость перетекания воды по сифону пропорциональна разности уровней воды в сосудах, то в том случае, когда уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в нижней бочке, чем к уровню воды в верхней, в среднюю бочку из верхней будет перетекать больше воды, чем из средней бочки в нижнюю. В этом случае будут наполняться как нижняя, так и средняя бочки. Если же уровень воды в средней бочке ближе к уровню воды в верхней, чем в нижней, то будет наполняться лишь нижняя бочка за счет вытекания воды из верхней и средней бочек.

62. Водосброс (масса воды, протекающая в 1 секунду) определяется высотой  $h$  уровня воды над плотиной, зависит от плотности воды и ускорения свободного падения  $g$ ,

$$\mu = f(\rho, g, h).$$

Из соображений размерности нетрудно получить:

$$\mu = k\rho g^{3/2} h^{5/2}$$

( $k$  — безразмерная постоянная). При возрастании водосброса втрое  $h^{5/2}$  вырастает втрое и, следовательно,  $h$  возрастает в  $\sqrt[5]{9}$  раз, то есть примерно в 1,5 раза.

63. Чтобы объяснить, что происходит с песком на берегу реки, начнем с ... обычных шариков. Одинаковые шарики можно



уложить на плоскости так, чтобы каждый из них касался других шаров. Затем в лунки между шарами первого слоя можно положить шары второго слоя. Они будут касаться трех шаров нижнего слоя и шести соседей своего слоя и т. д.; полученное таким образом расположение шаров называется плотной упаковкой шаров. Если нарушить плотную упаковку, выведя шары одного из слоев из лунок между шарами нижнего слоя, промежутки между шарами увеличатся. Возрастет и объем всей системы. Это означает, что если на систему из плотно упакованных шаров действуют силы, приводящие к нарушению плотной упаковки, объем системы увеличивается за счет увеличения промежутков между шарами.

Аналогично ведет себя и другая зернистая среда. Возьмите, например, пшено (или кофе), наполните им стакан, слегка встряхивая его, чтобы зерна располагались, образуя наиболее плотную из возможных упаковок. Затем надавите на пшено. Давление приведет к увеличению объема, занимаемого зернами, то есть к нарушению плотной упаковки. Если теперь слегка постучать по стакану с тем, чтобы зерна вновь «упаковались» наиболее плотно, стакан окажется не заполненным доверху.

Теперь вернемся к песку на берегу. Он тоже плотно упакован. При давлении на песок плотная упаковка разрушается, и объем песка увеличивается за счет увеличения пространства между песчинками. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличивающиеся промежутки. Песок как бы «высыхает». Когда ногу убирают, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из уменьшившихся вновь промежутков вода заполняет след, оставленный ногой.

64. Пусть центр шарика слегка сместится относительно оси струи. На шарик под струей воды действуют со стороны струи две силы: сила давления, направленная к центру шарика и стремящаяся вытолкнуть шарик из-под струи, и сила трения, направленная по касательной и стремящаяся вращать шарик. Так как шарик частично погружен в воду, между шариком и водой действуют силы вязкости, вращение шарика вызовет его качение в сторону струи. При достаточно больших отклонениях центра шарика от оси струи горизонтальная составляющая силы давления уменьшается, а действие трения увеличивается. Поэтому шарик будет возвращаться под струю. Таким образом, шарик будет колебаться под струей. При слабой струе возвращающие силы будут слабы, колебания шарика будут происходить медленнее и с большей амплитудой. Если амплитуда колебаний превысит радиус шарика, то он выскочит из-под струи.

65. Когда воздух выдувают тонкой струей, его скорость велика. Поэтому давление в струе меньше атмосферного, отчего струей захватывается окружающий холодный воздух, не насыщенный водяными парами.

В другом случае выдыхается теплый, насыщенный парами воздух, скорость которого мала. Он-то и попадает под руку.

66. Из-за вихрей, образующихся при обтекании дюн ветром, с наветренной стороны дюн образуется спокойная зона с пониженным давлением. В этой зоне выпадает песок, захваченный ветром с подветренной стороны.

Так же объясняется перемещение песчаных отмелей.

67. В начале движения реактивного снаряда его скорость относительно самолета в течение некоторого промежутка времени меньше скорости самолета. Поэтому относительно воздуха снаряд движется в том же направлении, что и самолет, т. е. стабилизаторами вперед. Стабилизаторы разворачивают снаряд в направлении движения самолета так, чтобы его сопротивление набегающему потоку воздуха было минимальным; затем за счет реактивной тяги скорость снаряда увеличивается, и он догоняет самолет.

68. Извилистое течение рек связано с тем, что их прямолинейное течение неустойчиво. Это означает, что при случайном образовании небольшой извилины или неоднородности течения реки (например, из-за упавшего в воду дерева), образовавшийся изгиб реки будет увеличиваться. Для того чтобы разобраться, почему это происходит, рассмотрим ... стакан с чаем, в котором плавают чайники. Если ложкой «раскрутить» чай в стакане, заставив жидкость вращаться, и затем вынуть ложку из стакана, то через некоторое время все чайники соберутся вдоль оси стакана. Связано это вот с чем.

При вращении жидкости в стакане на каждую из частиц жидкости действует со стороны других окружающих ее частиц сила такая, что равнодействующая этой силы и силы тяжести направлена горизонтально и сообщает частице центростремительное ускорение  $a = \omega^2 R$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения жидкости и  $R$  — расстояние, на котором находится частица от оси вращения. Чем больше расстояние  $R$ , тем больше ускорение частицы, значит, тем больше должна быть горизонтальная составляющая силы, действующей на эту частицу со стороны других частиц. Поэтому поверхность вращающейся жидкости принимает форму параболоида. (Напомним, что сила, действующая на частицу жидкости, которая находится у поверхности, со стороны других частиц, перпендикулярна к поверхности. Иначе составляющая этой силы, параллельная поверхности, вызвала бы движение частиц жидкости.) Благодаря такой форме поверхности

жидкости давление в ней на одном и том же расстоянии от дна увеличивается по мере приближения к стенкам стакана.

После того как вынули ложку из стакана, скорость частиц жидкости у стенок стакана и у дна начинает уменьшаться из-за трения. При этом ускорение, сообщаемое этим частицам действующими на них силами, оказывается больше центробежного, и в стакане возникает течение жидкости такое, как показано на рис. 101. Из-за трения скорость этого течения у поверхности меньше его скорости на некоторой глубине. Это течение и переносит чайники к оси вращения жидкости.

Подобное же круговое поперечное течение возникает и в реке там, где река делает поворот (рис. 102). Этим течением частицы

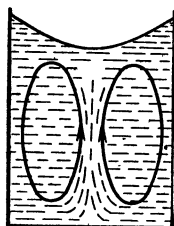


Рис. 101.

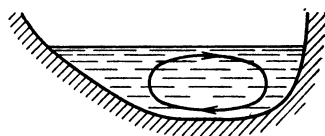


Рис. 102.

песка со дна и наружного берега реки переносятся к ее внутреннему берегу. Таким образом, круговое течение увеличивает изгиб реки, размывая ее наружный берег. Более того, эрозия — разрушение берега и дна — сказывается сильнее у наружного берега реки. Поэтому дно реки принимает профиль, показанный на рис. 89.

69. При движении человека на него со стороны лодки действует сила  $F$ , равная

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t},$$

где  $m$  — масса человека и  $v$  — его скорость. Такая же по абсолютной величине сила действует на лодку. Но направлена она в другую сторону. Кроме того, на лодку действует сила сопротивления  $F_c = ku$ , где  $k$  — константа и  $u$  — скорость лодки. Итак,

$$-F + ku = \frac{\Delta(Mu)}{\Delta t}$$

( $M$  — масса лодки).

Поэтому

$$-\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} + ku = \frac{\Delta(Mu)}{\Delta t}.$$

Отсюда

$$ku \Delta t = \Delta(Mu) + \Delta(mv).$$

И так как  $u \Delta t = \Delta x$  — это смещение лодки, то

$$k \Delta x = \Delta(Mu) + \Delta(mv).$$

В конце концов и лодка и человек в ней останутся. Тогда  $\Delta(Mu)$  и  $\Delta(mv)$  будут равны нулю. Следовательно, в этот момент нулю будет равно и смещение  $\Delta x$  лодки.

70. Останется прямой, так как смещение каждой точки радиуса монеты пропорционально расстоянию между этой точкой и центром монеты.

71. Обозначим  $x$  расстояние от нижнего края листа до точки  $O$ , которая остается неподвижной относительно крыши при нагревании листа (рис. 103). Силы трения, действующие на участки листа выше и ниже точки  $O$ , направлены так, как показано на рисунке и равны по абсолютной величине:  $F_{\text{тр.1}} = \mu \frac{m}{l} g x \cos \varphi$  и  $F_{\text{тр.2}} = \mu \frac{m}{l} (l - x) g \cos \varphi$  ( $m$  — масса листа, а  $\frac{m}{l}$  — масса единицы длины листа,  $l$  — длина листа при температуре  $t_1$ ). Так как лист нагревается медленно, можно считать, что в любой момент он находится в равновесии и сумма проекций на ось  $X$  сил, действующих на лист, равна нулю:

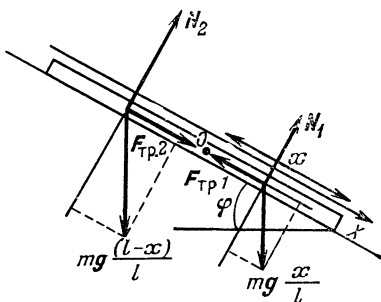


Рис. 103.

$$mg \sin \varphi + \mu \frac{m}{l} g x \cos \varphi - \mu \frac{m}{l} g (l - x) \cos \varphi = 0.$$

Отсюда найдем:

$$x = l \frac{\sin \varphi + \mu \cos \varphi}{2\mu \cos \varphi}.$$

Если весь лист при нагревании удлинится на  $\Delta l$ , то удлинение нижней части листа равно  $\frac{x}{l} \Delta l$ , так что при нагревании листа его нижний край опускается на расстояние

$$\Delta x = \frac{x}{l} \Delta l = \frac{\sin \varphi + \mu \cos \varphi}{2\mu \cos \varphi} \Delta l.$$

Аналогично найдем расстояние  $\Delta y$ , на которое поднимается нижний край листа при охлаждении. В этом случае неподвижна уже другая точка  $O'$  листа, а направления сил трения меняются на противоположные. Учитывая это, найдем:

$$\Delta y = \frac{\mu \cos \varphi - \sin \varphi}{2\mu \cos \varphi} \Delta l.$$

За цикл изменения температуры нижний край листа опускается на расстояние  $\Delta x - \Delta y$ , а за  $n$  суток лист сползет на расстояние

$$\Delta L = n (\Delta l) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu} = n a l_0 (T_1 - T_2) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\mu}.$$

Подставляя сюда численные данные, получим

$$\Delta L \approx 2,5 \text{ см.}$$

72. Молекулы диффундирующего вещества движутся хаотически, как и молекулы любого газа. Это означает, что после столкновения с молекулой воздуха направление движения молекулы диффундирующего вещества может быть совершенно произвольным. Если проследить за такой молекулой, то ее траектория представляет собой ломаную,  $n$ -е звено которой может быть направлено совершенно произвольно по отношению к  $n - 1$ -му (рис. 104).

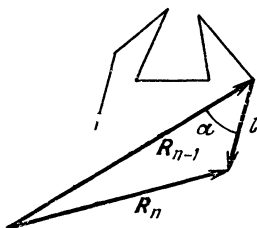


Рис. 104.

Обозначим  $l$  — среднюю длину одного звена. Это расстояние, которое пролетает молекула между двумя последовательными столкновениями. Его называют поэтому длиной свободного пробега. Обозначим еще  $R_n$  перемещение частицы за  $n$  шагов, а  $\alpha$  — угол между вектором  $R_{n-1}$  и следующим шагом. Тогда, согласно теореме косинусов,

$$R_n^2 = R_{n-1}^2 + l^2 - 2R_{n-1}l \cos \alpha.$$

Усредним это равенство. Тогда

$$\overline{R_n^2} = \overline{R_{n-1}^2} + l^2 - 2\overline{R_{n-1}l \cos \alpha}.$$

Но  $\alpha$  может принимать любые значения и равновероятны все значения  $\cos \alpha$ , как положительные, так и отрицательные. Поэтому  $\overline{\cos \alpha} = 0$  и

$$\overline{R_n^2} = \overline{R_{n-1}^2} + l^2. \quad (1)$$

Воспользовавшись соотношением (1), мы можем записать цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \overline{R_1^2} &= l^2, \\ \overline{R_2^2} &= \overline{R_1^2} + l^2, \\ \overline{R_3^2} &= \overline{R_2^2} + l^2, \\ &\dots \dots \dots \\ \overline{R_n^2} &= \overline{R_{n-1}^2} + l^2. \end{aligned}$$

Теперь сложим их. Тогда все промежуточные величины сократятся, и мы получим

$$\overline{R_n^2} = nl^2.$$

Число шагов  $n$  пропорционально времени  $t$  наблюдения над молекулой:

$$n = \frac{t}{\tau},$$

где  $\tau$  — время свободного пробега. Оно равно  $l/v$ , где  $v$  — средняя скорость теплового движения молекул. Поэтому  $n = \frac{t}{\tau} v$  и

$$\overline{R_n^2} = \frac{t}{\tau} l^2 = tvl.$$

Среднее значение  $\overline{R_n}$  не равно  $\sqrt{\overline{R_n^2}}$ , но близко к нему. Поэтому можно считать, что

$$R = \overline{R_n} = \sqrt{vlt}. \quad (2)$$

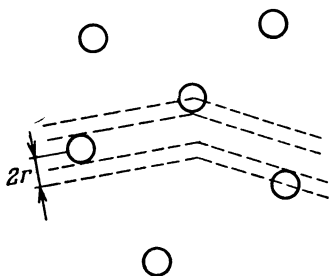
Мы видим, что  $R \sim \sqrt{t}$ . Поэтому если на расстоянии 1 м пахучее вещество распространилось за 3,5 минуты, то на расстоянии 10 м оно распространится за 3,5·100 минут, то есть примерно за 6 часов!

Формула (2) справедлива не только для молекулы диффундирующего вещества, но и для молекул самого газа. Справедлива она и для совершающей беспорядочные перемещения броуновской частицы, для которой была установлена А. Эйнштейном в 1905 г.

Интересно сравнить среднее перемещение молекулы газа, скажем, за 1 с с расстоянием  $L$ , которое пролетает за это время молекула. Например, при атмосферном давлении и комнатной температуре для молекулы азота в воздухе ( $v \approx 500$  м/с, а  $l \approx 6 \cdot 10^{-8}$  м) имеем

$$L \sim 500 \text{ м/с} \cdot 1 \text{ с} = 500 \text{ м}, \quad \text{а} \quad R \sim 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5,5 \text{ мм}.$$

Из-за хаотичности движения молекулы  $R$  в  $10^5$  раз меньше  $Ll$ .  
 Формула (2) позволяет установить зависимость  $R$  от температуры газа  $T$ . Для этого прежде всего выясним, чем определяется величина длины свободного пробега  $l$ . Будем считать, что молекула — это шарик радиуса  $r$ . За время  $\Delta t$  молекула при своем движении столкнется с теми молекулами, центры которых лежат в цилиндре радиуса  $2r$  и длиной  $v \Delta t$  (рис. 105). Если концентрация газа  $n$ , то таких молекул



$$N = n\pi (2r)^2 v \Delta t.$$

Разделив путь  $v \Delta t$ , пройденный молекулой, на число столкновений  $N$ , найдем  $l$ :

$$l = \frac{1}{4\pi r^2 n}.$$

Рис. 105.

Но согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории  $p = nkT$ , где  $p$  — давление,  $k$  — постоянная Больцмана. Поэтому  $n = \frac{p}{kT}$  и  $l = \frac{kT}{4\pi r^2 p}$ . Кроме того, средняя скорость теплового движения молекул  $v = \sqrt{3kT/m}$ , где  $m$  — масса молекулы. Следовательно,

$$R \approx \sqrt{\left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} \frac{kT}{4\pi r^2 p} t} \quad \text{или} \quad R \sim p^{-1/2} T^{3/4} l^{1/2}.$$

Вот как  $R$  зависит от времени  $t$ , давления  $p$  газа и его температуры  $T$ .

В случае броуновской частицы  $v$  тоже пропорциональна  $\sqrt{T}$ , а так как положения броуновской частицы отмечаются через равные промежутки времени  $\tau$ , то  $l = v\tau$ . Поэтому  $R = \sqrt{v \cdot v \cdot \tau t} = v \sqrt{\tau t} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0} \tau t}$  ( $m_0$  — масса броуновской частицы). В этом случае  $R \sim \sqrt{Tt}$ .

73. При решении многих задач нам понадобится формула для числа  $z$  молекул газа, попадающих на поверхность площадью  $S$  за время  $t$ :

$$z = \frac{1}{2} nS |\overline{v_x}| t,$$

где  $n$  — концентрация молекул газа и  $|\overline{v_x}|$  — среднее значение модуля проекции скорости молекул на ось  $X$ , перпендикулярную

к поверхности. Так как

$$\overline{v_X^2} + \overline{v_Y^2} + \overline{v_Z^2} = v^2 = \frac{3RT}{\mu},$$

где  $v$  — средняя тепловая скорость молекул газа,  $\mu$  — молярная масса газа,  $T$  — его температура, то

$$\overline{v_X^2} = \overline{v_Y^2} = \overline{v_Z^2} = \frac{RT}{\mu},$$

и можно считать, что

$$|\overline{v_X}| \approx \sqrt{\overline{v_X^2}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

Более аккуратный расчет показывает, что  $|\overline{v_X}| = \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{RT}{\mu}}$ . Для наших расчетов это, впрочем, несущественно.

Используя найденное выражение для  $|\overline{v_X}|$ , получим

$$z = \frac{1}{4} nSvt = \frac{1}{4} nSt \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Этой формулой мы неоднократно будем пользоваться.

Каждый атом гелия, перелетая от внутренней горячей к наружной холодной стенке колбы, переносит энергию  $E_1 = \frac{3}{2} kT_{\text{вн}}$ . Улетая от наружной стенки, они несут энергию  $E_2 = \frac{3}{2} kT_0$ , где  $T_0$  — температура в комнате. Поэтому за время  $t$  от внутренней к наружной стенке колбы переносится количество теплоты

$$q = (E_1 - E_2) z = \frac{3}{4} knSv(T_{\text{вн}} - T_0)t.$$

Так как изменение температуры  $\Delta T$  мало по сравнению с начальной разностью температуры  $T = 363$  К и воздуха в комнате ( $\Delta T = 10$  К, а  $T - T_0 = 70$  К), то  $T_{\text{вн}} - T_0 \approx T - T_0$ . Кроме того, для оценки можно считать, что температура гелия в колбе равна среднему арифметическому  $T$  и  $T_0$ , так что  $v = \sqrt{\frac{3RT_{\text{ср}}}{\mu}}$ , где  $T_{\text{ср}} = (T + T_0)/2$ . Кроме того, согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории  $p = nkT$ , так что для гелия в колбе  $n = p/kT_{\text{ср}}$ . Поэтому

$$q = \frac{3}{4} pS \sqrt{\frac{3R}{\mu T_{\text{ср}}}} (T - T_0)t.$$

Для того чтобы температура чая понизилась на  $\Delta T = 10$  К, должно быть перенесено количество теплоты  $Q = ct \Delta T$ , где



$c = 4.2 \cdot 10^3$  Дж/кг·К — теплоемкость воды и  $m = 1$  кг — масса чая. Приравнявая  $q$  и  $Q$ , найдем время  $t$ :

$$t = \frac{4}{3} \frac{cm \Delta T}{\rho S (T - T_0)} \sqrt{\frac{\mu T_{\text{ср}}}{3R}}. \quad (1)$$

В эту формулу входит площадь  $S$  стенок колбы. Ее можно оценить, полагая, что колба сферична. Тогда  $S = 4\pi r^2$ , а объем колбы  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ , так что  $S = 4\pi \left(\frac{3}{4} V/\pi\right)^{2/3}$ . В нашем случае найдем, что  $S \approx 5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>. Подставляя все необходимые величины в формулу (1), найдем

$$t \approx 3,5 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ ч.}$$

Такой же результат мы получим и для случая, когда колба заполнена воздухом. Только в этом случае энергия  $E$  молекулы равна  $\frac{5}{2} kT$ , так как воздух состоит в основном из двухатомных молекул. Заметим, что при большом давлении наш способ вычисления несправедлив, так как длина свободного пробега  $l$  не велика по сравнению с расстоянием  $L$  между стенками колбы. При  $l \ll L$  механизм теплопроводности схож с механизмом диффузии, разобранным в предыдущей задаче.

74. Давление  $p$  в спутнике равно сумме парциальных давлений кислорода  $p_1$  и азота  $p_2$ , и так как  $p_1 = n_1 kT$ , а  $p_2 = n_2 kT$ , то  $p = (n_1 + n_2) kT$ ,

$$\Delta p = (\Delta n_1 + \Delta n_2) kT, \quad (1)$$

а

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta n_1 + \Delta n_2}{n_1 + n_2}. \quad (2)$$

Но изменения концентраций молекул равны

$$\Delta n_1 = \frac{z_1}{V} = \frac{1}{4} \frac{n_1 S v_1 t}{V}, \quad \Delta n_2 = \frac{z_2}{V} = \frac{1}{4} \frac{n_2 S v_2 t}{V}. \quad (3)$$

Поэтому

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{4} \frac{St}{V} \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2}{n_1 + n_2}. \quad (4)$$

Согласно уравнению газового состояния

$$p_1 = \frac{1}{V} \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad p_2 = \frac{1}{V} \frac{m_2}{\mu_2} RT.$$

Поэтому

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} = \alpha \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (5)$$

где  $\alpha = m_1/m_2$ . Используя (5), найдем

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{4} \frac{S}{V} t \frac{\alpha \mu_2 v_1 + v_2 \mu_1}{\alpha \mu_2 + \mu_1}. \quad (6)$$

Подставим сюда  $v_1 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_1}}$ ,  $v_2 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2}}$  и найдем  $t$ :

$$t = \frac{\Delta p}{p} \frac{4V (\mu_1 + \alpha \mu_2) \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{S \sqrt{3RT} (\alpha \mu_2 \sqrt{\mu_1} + \mu_1 \sqrt{\mu_2})}. \quad (7)$$

Подставляя сюда  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ,  $\frac{\Delta p}{p} = 0,05$ ,  $\alpha = 1/3$ , а также остальные величины, найдем  $t \approx 4,7 \cdot 10^3$  с  $\approx 1,3$  ч.

Интересно, каков состав молекулярного пучка, вылетающего из спутника? Из соотношений (3) имеем

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{n_1}{n_2} \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (8)$$

Мы видим, что отношения концентраций  $\Delta n_1/\Delta n_2$  в молекулярном пучке, вылетающем в вакуум, в  $\sqrt{\mu_2/\mu_1}$  раз больше концентраций газов в сосуде. Процесс истечения газа из сосуда через маленькое отверстие называется эффузией. Формула (8) показывает, что с помощью эффузии можно обогащать газы. Ее, в частности, можно использовать для обогащения природного урана, который содержит изотопы урана  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$ . Изотоп  $^{238}\text{U}$  используется в атомных электростанциях, однако его концентрация в природном уране очень мала. Один из способов его обогащения (впрочем, не самый лучший) — это использование многоступенчатой газовой эффузии. Для этого берут газообразное соединение природного урана с фтором  $\text{UF}_6$ , которое содержит молекулы с изотопами урана  $^{235}\text{UF}_6$  и  $^{238}\text{UF}_6$ , и пропускают через трубу с отверстиями, через которые газ попадает в откачиваемый сосуд. Из-за близости молярных масс этих соединений концентрации меняются мало и полученный пучок пропускают вновь через такое же устройство и т. д.

75. Если бы пар над жидкостью был насыщенным, то пар и жидкость находились бы в равновесии, и за любое время  $t$  из пара в жидкость попадало бы столько же молекул  $z$ , сколько их вылетает из жидкости. Следовательно, через поверхность жидкости площадью  $S$  за время  $t$  вылетает число молекул  $z = \frac{1}{4} n S v t$  (см. задачу 73), где  $n$  — концентрация молекул в насыщенном паре и  $v$  — их тепловая скорость. Так как  $n = \frac{p_n}{kT}$  и  $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$  ( $p_n$  — давление насыщенных паров воды), то

$$z = \frac{1}{4} \frac{p_n}{k} \sqrt{\frac{3R}{T\mu}} S t. \quad (1)$$

Разделив  $z$  на число Авогадро, найдем, сколько молей молекул воды испарится за время  $t$ :

$$v = \frac{z}{N_A} = \frac{1}{4} \frac{p_n}{N_A k} \sqrt{\frac{3R}{\mu T}} St = \frac{1}{4} p_n \sqrt{\frac{3}{RT\mu}} St \quad (2)$$

(так как  $N_A k = R$ ). Теперь найдем массу  $m$  воды, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени (скорость испарения):

$$m = \frac{v\mu}{St} = \frac{1}{4} p_n \sqrt{\frac{3\mu}{RT}}. \quad (3)$$

Подставляя в эту формулу  $p_n = 2,3 \cdot 10^3$  Па,  $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль и  $T = 293$  К, найдем, что  $m = 2,6$  кг/м<sup>2</sup>·с, то есть с 1 м<sup>2</sup> поверхности воды за 1 с испаряется 2,6 кг воды.

Велика ли эта скорость? Найдем, за какое время испарится в вакууме (например, в космосе) стакан воды. Он содержит  $M = 200$  г воды, а диаметр стакана равен примерно 7 см, так что  $S = 3,8 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>. Поэтому  $t = M/mS = 20$  с! Правда, если вынести стакан с водой в вакуум, то вода испарится не так быстро. Дело в том, что при испарении жидкость охлаждается и при быстром испарении замерзнет. Попробуем рассчитать, сколько воды останется в стакане. При испарении массы воды  $\Delta M$  поглощается количество теплоты  $q = r\Delta M$ , где  $r = 2,5 \cdot 10^6$  Дж/кг — удельная теплота парообразования. Эта теплота отбирается у массы воды  $M - \Delta M$  при ее остывании от температуры  $\Theta = 20^\circ\text{C}$  до нуля и превращении в лед. Поэтому

$$r \Delta M = c(M - \Delta M) \Theta + \lambda(M - \Delta M),$$

где  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/кг·К — удельная теплоемкость воды и  $\lambda = 3,2 \cdot 10^5$  Дж/кг — удельная теплота плавления льда. Отсюда

$$\Delta M = \frac{cM\Theta + \lambda M}{r + c\Theta + \lambda} = 0,028 \text{ кг} = 28 \text{ г}.$$

Такая масса воды испарится, а в стакане останется 172 г льда. Лед же испаряется значительно медленнее. Благодаря этому считается, например, возможным наличие воды на Луне (в виде льда и пара). Согласно этой гипотезе водяные пары, которые содержат лунные породы, поднимаются на поверхность и замерзают там, закупоривая, таким образом, пары.

А в обычных условиях, скажем, в комнате, как быстро должен испариться стакан воды? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно учесть конденсацию пара. Если давление пара в комнате равно  $p$  (влажность  $\varphi = p/p_n$ ), то из  $z$  нужно вычесть число молекул  $z_1$ , попадающих в воду из пара:  $z_1 =$

$= \frac{1}{4} \frac{p}{k} \sqrt{\frac{3R}{T\mu}} St.$  Это означает, что в формуле (3) нужно  $p_n$  заменить на  $p_n - p$ , так что

$$m' = \frac{1}{4} (p_n - p) \sqrt{\frac{3\mu}{RT}}. \quad (4)$$

При влажности, скажем, 60% ( $\varphi = 0,6$ ) и температуре  $T = 293$  К ( $20^\circ\text{C}$ ), давление пара  $p = 0,6p_n \approx 1,4 \cdot 10^3$  Па. Из формулы (4) мы найдем

$$m' = 1 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}.$$

Это всего в 2,6 раза меньше скорости испарения с единицы поверхности жидкости в вакуум. Значит, стакан воды в комнате должен испаряться примерно за время в 2,6 раза большее, чем в вакууме, то есть за 52 с — меньше минуты! В действительности же вода в стакане может находиться несколько суток. В чем же дело? В том, что мы неправильно учли количество молекул, возвращающихся в жидкость. Пар в тонком слое у поверхности жидкости практически насыщен. Это связано с тем, что при испарении воды давление пара у поверхности возрастает и начинается диффузия пара от поверхности. Но процесс диффузии очень медленный (см. задачу 72) и поэтому давление пара у поверхности практически равно  $p_n$ . Испарение можно несколько ускорить, если обдувать стакан потоком воздуха. Так поступают, например, когда хотят охладить чай. Дуть на него, мы увеличиваем конвекцию, ускоряем «отвод» молекул пара из приповерхностного слоя и повышаем скорость испарения. А испарение чая приводит к его охлаждению.

76. В обоих коленах трубки над поверхностью воды находятся только насыщенные водяные пары, давление которых, как известно, не зависит от объема.

77. Давление насыщенного пара у поверхности капли зависит от ее радиуса. Действительно, представим себе замкнутый сосуд, в котором имеется капиллярная трубка, не смачиваемая жидкостью. Давление в точке  $B$  (рис. 106) больше давления в точке  $A$  на величину  $\rho_n g h$ :

$$p_B = p_A + \rho_n g h,$$

где  $h$  — разность уровней жидкости в капилляре и в сосуде, а  $\rho_n$  — плотность пара.

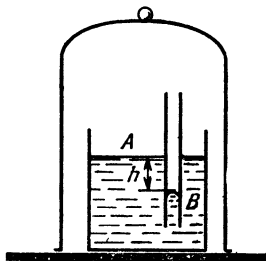


Рис. 106.

Жидкость в капилляре находится в равновесии под действием двух сил: силы поверхностного натяжения, равной по модулю  $2\pi r\sigma$  ( $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $r$  — радиус капилляра) и силы давления жидкости на глубине  $h$ , равной  $\rho gh \cdot \pi r^2$  ( $\rho$  — плотность жидкости), поэтому  $2\pi r\sigma = \pi r^2 \rho gh$ . Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} \quad \text{и} \quad p_B = p_A + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho n}{\rho}.$$

Таким образом, давление над поверхностью жидкости тем больше, чем меньше ее радиус кривизны.

Это означает, что давление насыщенного пара над каплей тем больше, чем меньше радиус этой капли. Значит, если над поверхностью маленькой капли пар насыщен, то над поверхностью большой капли он будет ненасыщенным. Это приведет к тому, что пар будет конденсироваться на большой капле, понижая тем самым давление пара у поверхности малой капли. Это в свою очередь приведет к испарению маленькой капли. В результате в сосуде через некоторое время останется только одна большая капля.

Тот же результат можно получить и из самых общих рассуждений. Предположим, что в сосуде налита жидкость (поверхность жидкости плоская) и имеется капля. При испарении жидкости с плоской поверхностью эта площадь не меняется. В то же время при испарении капли площадь поверхности жидкости уменьшается. Но, как мы знаем, всякая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние с минимальной энергией. Поэтому если в сосуде имеется капля жидкости и жидкость с плоской поверхностью, то равновесие наступит тогда, когда капля полностью испарится и сконденсируется на плоской поверхности. (Это означает, что давление насыщенных паров над каплей больше, чем над плоской поверхностью жидкости). Если в сосуде имеются капли разного размера, то мелкие капли будут испаряться и конденсироваться на более крупные, пока в сосуде не останется только одна большая капля.

78. Так как вогнутая поверхность воды в капилляре находится на большей высоте, чем плоская, то давления пара у этих поверхностей разные:

$$\Delta p = \rho g h,$$

где  $\rho$  — плотность пара,  $h$  — высота поднятия жидкости в капилляре. Поэтому пар и над кюветой и в капилляре может быть насыщенным и никакого потока пара не будет.

79. Нет. Гидроэлектростанция вырабатывает электроэнергию за счет потенциальной энергии потока воды, проходящего через ее турбины. Масса  $\Delta m$  воды обладает потенциальной энергией

$\Delta mgh$ , где  $h$  — высота плотины. Для того чтобы масса воды испарилась, необходимо затратить количество тепла  $Q_1 = \Delta mc(T_1 - T_0)$  для ее нагревания от температуры  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  до температуры кипения  $T_1 = 100^\circ\text{C}$  и еще количество тепла  $Q_2 = \lambda \Delta m$  для испарения ( $c = 4 \cdot 10^3$  Дж/кг — теплоемкость воды,  $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$  Дж/кг — удельная теплота парообразования). Мощности гидроэлектростанции в случае отсутствия потерь хватит для испарения воды, если

$$\Delta mgh = \Delta mc(T_1 - T_0) + \Delta m\lambda$$

или

$$h = \frac{c(T_1 - T_0) + \lambda}{g} \approx 230 \text{ км!}$$

80. При конденсации пара выделяется большее количество тепла.

81. При нагревании воды

$$W\tau_1 = cm(T_2 - T_1) + Q_1,$$

где  $\tau_1$  — время нагревания,  $T_2 = 90^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 85^\circ\text{C}$  и  $Q_1$  — потери энергии, которые пропорциональны разности температур воды и окружающей среды и времени  $\tau$ .

При остывании воды

$$cm\Delta T = Q_2,$$

где  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ . Так как разность температур воды и воздуха меняется незначительно, а  $\tau_2 = 0,5\tau_1$ , то  $Q_2 = 0,5Q_1$ , так что

$$W\tau_1 = cm(T_2 - T_1) + 2cm\Delta T.$$

Отсюда

$$m = \frac{W\tau_1}{c(T_2 - T_1) + 2c\Delta T} \approx 1,8 \text{ кг.}$$

82. Так как мяч после удара о землю поднялся почти на ту же высоту, с которой он падал, потерями энергии при ударе можно пренебречь и считать, что сжатие воздуха в мяче во время удара происходит адиабатически.

Согласно закону сохранения энергии (первому закону термодинамики) изменение внутренней энергии газа  $\Delta U$  равно

$$\Delta U = Q + A, \quad (1)$$

где  $Q$  — количество тепла, сообщенного газу, и  $A$  — работа, совершенная над газом при его сжатии. Так как в данном случае  $Q = 0$ , то

$$\Delta U = A. \quad (2)$$

Как известно, изменение внутренней энергии газа не зависит от процесса и равно

$$\Delta U = c_V m \Delta T = c_V m (T_{\max} - T), \quad (3)$$

где  $T$  — начальная температура газа,  $m$  — его масса.

Работа по сжатию воздуха совершается за счет механической энергии мяча. Если пренебречь потенциальной энергией деформации камеры и грунта в момент наибольшего сжатия (когда температура воздуха максимальна, а мяч покоится), то

$$A = Mgh, \quad (4)$$

где  $M$  — масса мяча,  $h$  — высота, на которую он был подброшен.

Подставив выражения для  $\Delta U$  и  $A$  в формулу (2), получим

$$c_V m (T_{\max} - T) = Mgh. \quad (5)$$

Массу воздуха в мяче можно определить из уравнения газового состояния:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где  $p = p_0 + p_1$  ( $p_0 = 1$  атм — атмосферное давление,  $p_1$  — избыточное давление),  $V$  — объем мяча. Отсюда

$$m = \frac{(p_0 + p_1) V \mu}{RT}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$T_{\max} = T \left[ 1 + \frac{Mgh}{\mu (p_0 + p_1) V c_V} \right] \approx 1,02T = 306 \text{ К.}$$

83. Рассмотрим установившийся воздушный поток через хребет и проследим за небольшой массой  $m$  воздуха, занимающей на подветренной стороне горы (у побережья) объем  $V_1$ . Обозначим  $T_1$  — температуру и  $p_1$  — давление воздуха на подветренной стороне.  $p_1$  можно считать полным давлением, так как  $p_1 \sim 10^5$  Па, а парциальное давление паров  $p_n = \varphi p_n \approx \approx 1,8 \cdot 10^3$  Па, так что  $p_n \ll p_1$ . Оказавшись на надветренной стороне горы, давление на которой равно  $p_2$ , эта же масса воздуха будет иметь объем  $V_2$  и температуру  $T_2$ . Изменение  $\Delta U$  внутренней энергии газа происходит за счет работы  $A$  внешних сил, действующих на выделенный объем газа и теплоты  $Q$ , выделяющейся при конденсации пара:

$$\Delta U = A + Q. \quad (1)$$

Изменение внутренней энергии воздуха пропорционально изменению температур. Для одноатомного газа энергия одного

моля газа  $U = \frac{3}{2} RT$ . Воздух состоит в основном из двухатомных газов — азота и кислорода. Для него  $U = \frac{5}{2} RT$  и  $\Delta U = \frac{5}{2} R \Delta T$ , где  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Масса  $m$  воздуха содержит  $\nu = \frac{m}{\mu}$  молей, где  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса воздуха. Поэтому изменение внутренней энергии массы  $m$  воздуха равно

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad (2)$$

Работу  $A$  внешних сил можно рассчитать так. На подветренной стороне горы внешние силы, — атмосферное давление, — совершают работу, выталкивая массу  $m$  газа из объема  $V_1$ . Эта работа  $A_1 = p_1 V_1$ . На надветренной стороне масса  $m$  воздуха вытесняет воздух, который находился ранее в объеме  $V_2$ . Работа сил атмосферного давления здесь отрицательна и равна  $A_2 = -p_2 V_2$ . Таким образом,

$$A = A_1 + A_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2.$$

Но согласно уравнению газового состояния  $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ , а  $p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$ . Поэтому

$$A = \frac{m}{\mu} R (T_1 - T_2) = -\frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad (3)$$

А сколько выделилось теплоты при конденсации пара? Если масса сконденсировавшегося пара  $\Delta m$ , то  $Q = \Delta m r$ , где  $r = 2,5 \cdot 10^6$  Дж/кг.  $\Delta m$  можно определить из уравнения газового состояния для пара  $p_{\text{п}} V_1 = \frac{\Delta m}{\mu_{\text{п}}} RT_1$  (где  $\mu_{\text{п}} = 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль).

Подставив в эту формулу  $V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{p_1}$ , получим

$$\Delta m = m \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu} \frac{p_{\text{п}}}{p_1} = \varphi m \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu} \frac{p_{\text{п}}}{p_1}, \quad \text{а} \quad Q = \varphi r m \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu} \frac{p_{\text{п}}}{p_1}. \quad (4)$$

Подставим теперь (2), (3) и (4) в (1):

$$\frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = -\frac{m}{\mu} R \Delta T + \varphi r m \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu} \frac{p_{\text{п}}}{p_1},$$

откуда

$$\Delta T = \frac{2}{7} \frac{\varphi r \mu_{\text{п}} p_{\text{п}}}{R p_1} \approx 23 \text{ К}.$$

Это означает, что температура сухого воздуха на надветренной стороне горы  $T_2 \approx 48^\circ \text{C}$ ! Описанные нами воздушные потоки



характерны, например, для Кордильер, служащих разделом областей с разной погодой. В предгорьях Кордильер со стороны Тихого океана часты обильные дожди. По другую сторону гор часто дуют сухие горячие ветры, превратившие этот район в пустыню.

84. Когда человек выходит из воды, вода испаряется, отбирая тепло от тела.

85. Количество тепла, передаваемого стержню, находящемуся в пламени, пропорционально площади его боковой поверхности. Теплоотвод же вдоль стержня пропорционален площади поперечного сечения стержня. Поэтому повышение температуры находится в прямой зависимости от отношения площади боковой поверхности к площади поперечного сечения. Это отношение обратно пропорционально радиусу стержня.

Поэтому тепловое равновесие толстого стержня наступает при значительно меньшей температуре, чем тонкой проволоки.

86. Теплопроводность чугуна меньше, чем теплопроводность алюминия. Поэтому температура внутренней поверхности чугунной сковороды более равномерна. Кроме того, благодаря большей теплоемкости чугунной сковородки ее температура практически не меняется, когда на нее опускают холодные продукты. Поэтому продукты при жарке не подгорают.

87. Когда мы прикасаемся к деревянным предметам, имеющим плохую теплопроводность, нагревается только небольшой участок предмета под пальцем. Металл же, обладающий хорошей теплопроводностью, нагревается весь. Это приводит к большему теплоотводу от пальца и его охлаждению.

88. При измерении температуры термометр должен нагреться от комнатной температуры до температуры тела, т.е. на 15—17°C. «Стряхнуть» же термометр можно уже тогда, когда его температура понизится на 2—3°C,

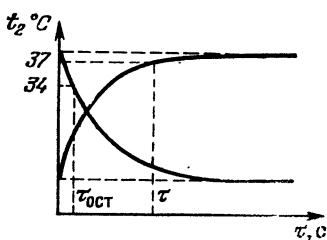


Рис. 107.

так как шкала термометра начинается с 34°C. Необходимо учесть еще то, что при нагревании и остывании тел скорость изменения их температуры пропорциональна разности температур тела и среды и поэтому зависимость температуры термометра от времени имеет вид, изображенный на рис. 107. Это приводит к тому, что время остывания термометра до температуры, при которой его можно «стряхнуть», намного меньше времени измерения температуры.

89. Корабль нагревается до такой температуры  $T$ , при которой энергия, излучаемая им, становится равной энергии, получаемой от Солнца. Излучаемая в единицу времени энергия пропорциональна площади поверхности корабля. Будем для оценки считать, что корабль — шарик, средний радиус которого равен  $r$ . Тогда энергия, излучаемая кораблем, нагретым до температуры  $T_1$  за единицу времени, равна

$$W_{\text{изл}} = 4\pi r^2 W = 4\pi r^2 \sigma T^4,$$

Энергия, получаемая от Солнца за единицу времени, пропорциональна площади наибольшего сечения шарика, то есть  $\pi r^2$ , и равна

$$W_{\text{полг}} = \pi r^2 E_1,$$

где  $E_1$  — плотность потока солнечного излучения на расстоянии  $R$  от Солнца.

Так как в единице телесного угла от Солнца распространяется постоянная энергия, то (рис. 108)  $E_1 S_1 = E_0 S_2$  и

$$E_1 = E_0 \frac{S_2}{S_1} = E_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2,$$

Следовательно,  $W_{\text{полг}} = \pi r^2 E_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2$ . Приравняв  $W_{\text{изл}}$  и  $W_{\text{полг}}$ , получим

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = \pi r^2 E_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Из этого уравнения найдем

$$R = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{E_0}{\sigma T^4}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

Итак, при приближении к Солнцу корабль может расплавиться. А при удалении от Солнца? Сколько нужно энергии для того, чтобы согреть космический корабль, направляющийся от Солнца, когда его излучение станет незначительным? Следует, конечно, учесть, что на корабле должен быть мощный реактор (скажем, ядерный), который снабжал бы энергией двигатель, приборы и т. д. Пусть мощность реактора  $10^{10}$  Вт — всего вдвое больше мощности ракеты-носителя спутника «Протон», а его к. п. д. 40%. К. п. д. любой тепловой машины не может быть больше, чем  $(T_1 - T_2)/T_1$ , где  $T_1$  — температура в горячей зоне, а  $T_2$  — в холодной. Для того чтобы повысить к. п. д.,  $T_1$  желательно сделать

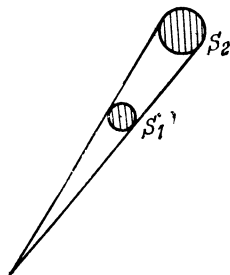


Рис. 108.

как можно выше. Но  $T_1$  ограничена тугоплавкостью материалов. Пусть  $T_1 = 3500$  К (на 150 К ниже температуры плавления вольфрама). Тогда  $T_2 = (1 - \eta)T_1 = 2100$  К. При таком к. п. д. реактора 60% его мощности, то есть  $6 \cdot 10^9$  Вт выделяется в виде тепла. Это огромная мощность и вопрос уже нужно ставить не о том, чтобы согреть корабль, а о том, как отвести такую мощность. Единственная возможность — излучение. Но мощность излучения  $W_{\text{изл}} = \sigma T_2^4 S$ . Поэтому для того чтобы избавиться от такой мощности, корабль должен иметь площадь

$$S = \frac{6 \cdot 10^9}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (2,1)^4 \cdot 10^{12}} \text{ м}^2 \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м}^2.$$

Это полгектара площади с температурой 2100 К!

Нужно отметить, что с проблемой теплоотвода встречаются уже конструкторы нынешних кораблей и даже скафандров.

90. При повышении давления температура плавления льда действительно понижается. Однако при плавлении льда поглощается теплота плавления, и температура льда под проволокой начинает падать. Это происходит до тех пор, пока температура льда в области повышенного давления не упадет до температуры плавления при этом давлении. Дальнейшее плавление льда будет определяться теплом, которое вследствие теплопроводности будет приходить к области пониженной температуры. При использовании проволоки это тепло будет проводиться за счет хорошей теплопроводности металла от замерзающей сверху воды, и процесс разрезания льда будет быстрым. При использовании капроновой нити, обладающей малой теплопроводностью, тепло будет подводиться главным образом за счет охлаждения всего бруска льда в целом, и процесс разрезания пойдет очень медленно.

91. Обозначим  $H$  максимальную высоту ледника. Она ограничена из-за плавления льда у основания ледника. При плавлении льда массы  $\Delta m = \rho S \Delta x$  ( $\rho$  — плотность льда,  $S$  — площадь сечения ледника) поглощается энергия  $\lambda \Delta m$ . Эта энергия равна изменению потенциальной энергии ледника, высота которого уменьшается на  $\Delta x$  и, следовательно,

$$\Delta E = \rho g H S \Delta x.$$

Поэтому

$$\rho g H S \Delta x \approx \rho S \lambda \Delta x,$$

откуда

$$H \approx \frac{\lambda}{g}.$$

Для льда  $\lambda = 332$  кДж/кг. Поэтому

$$H \approx 35 \text{ км.}$$

Примерно такую же величину мы получим для высоты гор, так как удельная теплота плавления горных пород того же порядка, что и у льда. Как известно, самая высокая гора на Земле имеет высоту  $\approx 9$  км, так что наша оценка совсем не плоха.

92. При взрыве давление газа в цилиндре возрастает скачком. Из-за инерции поршня и шатуна они не могут быстро набрать скорость и поэтому сильно деформируются. На это уходит часть энергии. При правильной регулировке двигателя смесь сгорает сравнительно медленно, и давление в цилиндре все время примерно одно и то же.

Кроме того, при взрыве газа его температура больше температуры смеси при медленном сгорании. Поэтому возрастают потери энергии из-за теплоотдачи.

93. К. п. д. теплового двигателя равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Если при сгорании топлива выделилась энергия  $q$ , то двигатель совершил работу

$$A = q\eta = q \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

При этом отопительной системе было передано количество теплоты

$$Q_1 = (1 - \eta)q = \frac{T_2}{T_1}q.$$

Холодильная машина работает по обратному циклу. Она отбирает у грунтовых вод количество теплоты  $q_1$  и передает отопительной системе количество теплоты

$$Q_2 = A + q_1,$$

где  $A$  — работа, совершенная над холодильной машиной. Так как машина идеальна, то она обратима. Это означает, что при работе по прямому циклу она совершает работу  $A$ , получая от нагревателя количество теплоты  $Q_2$  и отдавая грунтовым водам количество теплоты  $q_1$ . Ее к. п. д.

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{T_2 - T_3}{T_2},$$

откуда

$$Q_2 = A \frac{T_2}{T_2 - T_3} = q \frac{(T_1 - T_2) T_2}{T_1 (T_2 - T_3)}.$$

Всего отопительная система получает количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = q \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} \approx 2q.$$

Таким образом, к. п. д. системы

$$\eta = \frac{Q}{q} \approx 2.$$

К. п. д. больше 1! Это, впрочем, не противоречит законам термодинамики. Ведь мы извлекаем тепло из постороннего источника — грунтовых вод.

94. Брезентовую ткань можно представить себе как сито с очень маленькими ячейками. Сквозь такое сито капли воды не протекают, так как их удерживает сила поверхностного натяжения (рис. 109). Эти капли будут срывать, если толщина  $h$  слоя

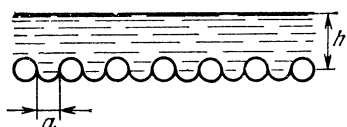


Рис. 109.

воды такова, что  $\rho gh > \frac{2\sigma}{(a/2)}$ ,  
т. е.  $h > \frac{4\sigma}{\rho ga}$ .

Если прикоснуться к мокрой ткани рукой, то несколько капель сливаются в одну — значительно большего радиуса. Эта капля уже не удерживается капиллярными силами (сила поверхностного натяжения, удерживающая каплю, при увеличении радиуса капли растет пропорционально радиусу, а масса капли — пропорциональна квадрату радиуса капли, т. е. значительно быстрее). Потолок палатки начинает протекать.

95. При решении этой задачи будем исходить из того, что после слияния двух мыльных пузырей в один суммарная масса воздуха в них не изменяется:

$$m_3 = m_1 + m_2. \quad (1)$$

Согласно уравнению газового состояния масса воздуха в пузыре равна

$$m = \frac{pV\mu}{RT}, \quad (2)$$

где  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  — объем пузыря,  $\mu$  — молярная масса воздуха,  $T$  — температура (она равна температуре окружающего воздуха и одинакова для всех пузырей) и  $R$  — газовая постоянная.

Запишем условие равновесия пузыря:

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{2\sigma}{r}, \quad (3)$$

где  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$  — добавочное давление под сферической поверхностью мыльной пленки радиуса  $r$ , а  $p_0$  — атмосферное давление,

Используя соотношения (2) и (3), можно записать:

$$m_1 = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{r_1} \right) \cdot \frac{4}{3} \pi r_1^3 \frac{\mu}{RT}, \quad m_2 = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{r_2} \right) \cdot \frac{4}{3} \pi r_2^3 \frac{\mu}{RT},$$

$$m_3 = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{r_3} \right) \cdot \frac{4}{3} \pi r_3^3 \frac{\mu}{RT}.$$

Найденные выражения для  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  подставим в равенство (1) и найдем  $p_0$ :

$$p_0 = \frac{2\sigma (r_3^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3}.$$

96. Свободная поверхность жидкости у торца сложенных стекол представляет собой цилиндрическую поверхность. Будем считать, что смачивание полное. Тогда радиус  $r$  этой поверхности равен  $d/2$ , где  $d$  — расстояние между стеклами. Давление под изогнутой поверхностью жидкости меньше атмосферного на величину  $\Delta p$ , которую можно найти, рассмотрев равновесие выделенного на рис. 110 элемента жидкости и воздуха. Учитывая силы поверхностного натяжения на границе стекло — жидкость, запишем

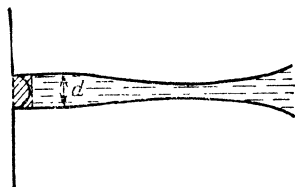


Рис. 110.

$$(\rho_0 - p) dl = 2\sigma l,$$

откуда

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}.$$

Поскольку атмосферное давление больше, чем давление между пластинками, то оно прижимает пластинки друг к другу. Так как стекла обычно неровные, то они касаются друг друга в некоторых местах, что ограничивает сближение стекол. Для того чтобы оторвать одно стекло от другого, нужно приложить силы, большие, чем  $\Delta p S$ , где  $S$  — площадь стекол. Если расстояние между стеклами  $d \sim 10^{-6}$  м, то

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

При площади пластины  $\sim 10^{-2}$  м<sup>2</sup> сила должна быть порядка  $1,4 \cdot 10^3$  Н (!)

97. Рассмотрим взаимодействие чистых концов спичек. В этом случае поверхность воды принимает вид, изображенный на

рис. 111, *а*. На высоте  $h$  справа от спички давление воды равно  $p_0 - \rho gh$ , а слева давление воздуха равно атмосферному  $p_0$ . Поэтому сила, действующая например, на левую спичку, со стороны жидкости, будет меньше силы, действующей со стороны воздуха,

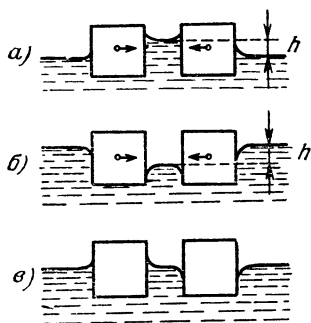


Рис. 111.

и спички будут притягиваться. Когда концы обеих спичек покрыты парафином, то поверхность воды здесь принимает вид, изображенный на рис. 98, *б*, и рассмотрение, аналогичное приведенному выше, дает тот же результат. Поверхность воды в случае «разноименных» концов изображена на рис. 98, *в*. Рассмотрев силы, действующие на концы спичек слева и справа, мы приходим к выводу, что концы спичек отталкиваются.

98. Будем обозначать через  $l$  высоту поднятия жидкости в капилляре:  $l = \frac{2\sigma}{\rho gr}$ . Чтобы вода могла подняться по трубке, нужно, чтобы было  $l > h$ , а для того чтобы она начала вытекать через нижний конец,  $H > l$ . Тогда получаем, что жидкость будет вытекать, если  $\frac{2\rho gh}{r} < \sigma < \frac{2\rho gH}{r}$ . Подставляя данные, получим  $0,0693 \text{ Н/м} < \sigma < 0,0735 \text{ Н/м}$ . Отсюда диапазон температур  $17^\circ\text{C} < T < 45^\circ\text{C}$ .

99. В точке, в которой сходятся поверхности трех сред (в нашем случае жидкости, твердого тела и газа) эти поверхности образуют угол, который называют краевым углом. Краевой угол

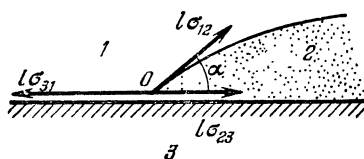


Рис. 112.

определяется силами взаимодействия между молекулами в этих средах и его можно определить из условия равновесия. Ограничимся случаем, когда одна из поверхностей — плоская поверхность твердого тела (рис. 112). Рассмотрим отрезок границы длины  $l$ . В точке

$O$  сходятся три силы поверхностного натяжения, направленные по касательным к границам раздела сред:  $F_1 = l\sigma_{12}$ ,  $F_2 = l\sigma_{23}$  и  $F_3 = l\sigma_{31}$ , где  $\sigma_{12}$  — поверхностное натяжение на границе сред 2 и 1,  $\sigma_{23}$  — поверхностное натяжение на границе сред 2 и 3, а  $\sigma_{31}$  — на границе сред 1 и 3. Сумма проек-

ций этих сил на плоскую поверхность должна быть равна нулю:

$$l\sigma_{31} - l\sigma_{23} - l\sigma_{12} \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_{31} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}}.$$

Если  $\sigma_{31} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$ , то условие (1) невыполнимо и равновесие невозможно. В этом случае жидкость растекается по поверхности, т. е., как говорят, полностью смачивает твердое тело. При

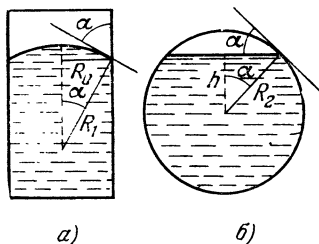


Рис. 113.

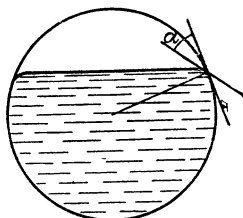


Рис. 114.

$\sigma_{23} > \sigma_{13} + \sigma_{12}$  равновесие тоже невозможно. Тогда жидкость полностью не смачивает твердое тело и собирается в каплю. В обычных школьных задачах считается, что  $\cos \alpha = 1$  или  $\cos \alpha = -1$ .

Краевой угол не зависит от силы тяжести и должен быть одним и тем же в невесомости и на Земле. Как видно из рис. 113, а и б,

$$\cos \alpha = \frac{R_1}{R_0} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{h}{R_2}.$$

Отсюда

$$h = \frac{R_1 R_2}{R_0}.$$

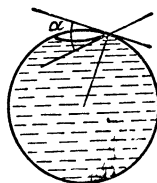


Рис. 115.

Если ту же жидкость налить в сосуд с радиусом, большим  $R_2$ , то высота  $h$  понизится, а жидкость у края слегка приподнимется, образуя тот же угол  $\alpha$  со стенкой (рис. 114). При  $R < R_2$  жидкость у края опустится, чтобы опять сохранился краевой угол (рис. 115).

Краевой угол, как мы уже выяснили, определяется только взаимодействием молекул трех сред. Его можно изменить, добавив в одну из сред какое-нибудь вещество, влияющее на поверхностное натяжение. Именно с этим связано то, что при растворе-



нии даже незначительного количества мыла или стирального порошка в воде ее моющее действие значительно усиливается. Это свойство объясняется тем, что мыло, скапливаясь (адсорбируясь) на границе воды с отмываемой поверхностью или тканью, значительно уменьшает поверхностное натяжение. В результате ослабляется прилипание частичек жира и грязи к поверхности.

Пусть, например, на поверхности ткани имеется капля жира, который смачивает ее (рис. 116). Краевой угол  $\alpha$  определяется, как нам уже известно, поверхностными натяжениями на

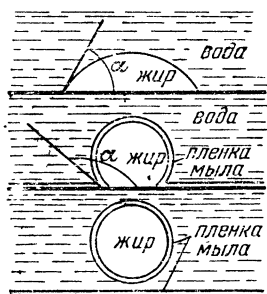


Рис. 116.

границах раздела. Если в воду добавить мыло, то молекулы мыла, адсорбируясь на границах воды — жир и вода — ткань, значительно уменьшают  $\sigma_{в-ж}$  и  $\sigma_{в-т}$ . Натяжение  $\sigma_{в-т}$  оказывается меньшим, чем  $\sigma_{ж-т}$  и соответственно,  $\cos \alpha < 0$ , то есть  $\alpha > 90^\circ$ . Жидкость перестанет смачивать поверхность. Уменьшение коэффициента  $\sigma_{в-ж}$  при этом, как легко видеть, также увеличивает краевой угол.

При краевом угле  $\alpha = 180^\circ$  жир абсолютно не смачивает поверхность, и капля жира сама отрывается от нее. Если же уменьшение поверхностного натяжения не столь велико, то во всяком случае после увеличения краевого угла  $\alpha$  капли легко отрываются от поверхности при механических воздействиях во время мойки или стирки.

На рис. 117 показана серия увеличенных фотографий шерстяной нити. На первой фотографии — нить, испачканная жидким парафином. Три следующие фотографии показывают очищающее действие раствора стирального порошка. Ясно видно, как увеличивается краевой угол поверхности парафина с нитью. Парафиновый жир сворачивается в глобулы и уносится водой. Последняя фотография показывает уже совсем чистую нить.

Адсорбированные молекулы мыла окружают капельки жира и отмываемую поверхность плотно заполненным (мономолекулярным) слоем, который обладает высокой механической прочностью. Молекулы мыла сильно связаны друг с другом, и разорвать пленку очень трудно. Поэтому при стирке пленки из адсорбированных молекул не разрушаются и препятствуют обратному прилипанию уже оторвавшихся капелек жира к поверхности и сливанию капелек друг с другом,

Оторвавшиеся при стирке твердые частички грязи также оказываются окруженными молекулами мыла, которые препятствуют их обратному прилипанию к поверхности. Взвешенные в воде частичцы грязи и капельки жира удаляются вместе с ней.

Интересно, что образование устойчивой пены — это только побочный эффект уменьшения поверхностного натяжения при растворении моющих веществ. Пена образуется из пузырьков воздуха, которые попадают в воду, увлекаемые струей воды. Эти пузырьки всплывают к поверхности и оказываются окруженными пленкой. Если поверхностное натяжение мало, то мало и избыточное давление  $2\sigma/r$  в пузырьке и он долго не лопается.

Механизм моющего действия, который мы здесь разобрали, представляет интерес и в связи с другими важными техническими задачами: покрытием поверхностей лаками и красками, склеиванием, пропиткой некоторых материалов другими (например, пропиткой порошков искусственных алмазов металлом, при которой образуется сверхпрочный материал алмет) и т. д.

100. Прежде всего о форме капли в невесомости. Такая капля должна быть сферической благодаря силам поверхностного натяжения, из-за которых капля должна принять форму с минимальной поверхностью. Когда капля падает равномерно, на ее форму влияет гидростатическое давление внутри капли. При равномерном падении капля сила тяжести, действующая на столбик  $AB$  (рис. 118), должна быть уравновешена силами гидростатического давления снизу и сверху столбика. Если высота столбика  $AB$  равна  $h$ , а площадь столбика  $s$ , то

$$\rho (sh) g = s(p_A - p_B), \text{ или } p_A - p_B = \rho gh.$$

Мы видим, что гидростатическое давление в капле меняется с высотой. Предположим, что давление воздуха со всех сторон

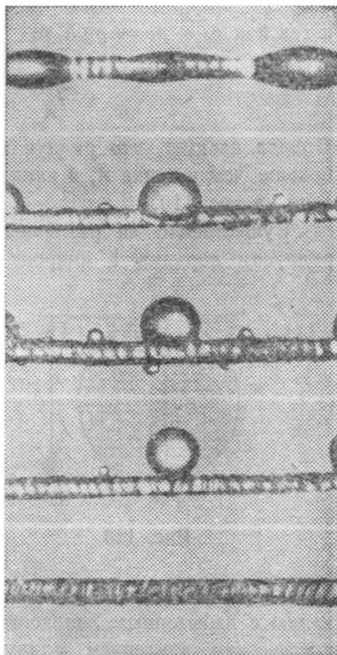


Рис. 117.

капли одинаково и равно  $p_0$ . Разность давлений внутри и снаружи капли определяется формулой Лапласа  $\Delta p = 2\sigma/r$ , где  $r$  — радиус кривизны и  $\sigma$  — поверхностное натяжение капли. Поэтому давление внутри капли равно  $p_0 + \frac{2\sigma}{r}$ . Для точек  $A$  и  $B$  имеем

$$p_A = p_0 + \frac{2\sigma}{r_A} \quad \text{и} \quad p_B = p_0 + \frac{2\sigma}{r_B},$$

а так как  $p_A - p_B = \rho g h$ , то

$$\frac{2\sigma}{r_A} - \frac{2\sigma}{r_B} = \rho g h.$$

Отсюда следует, что радиус кривизны в точке  $B$  должен быть больше, чем в точке  $A$ , и капля должна выглядеть так, как показано на рис. 119.

Существенно ли различны  $r_A$  и  $r_B$ ? Для маленьких капель радиусом порядка 1 микрона ( $10^{-6}$  м),  $\rho g h \approx 2 \cdot 10^{-2}$  Н/м<sup>2</sup>, а

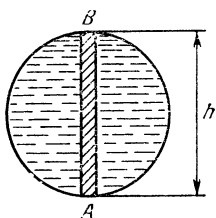


Рис. 118.

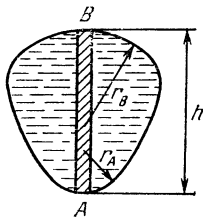


Рис. 119.

$2\sigma/r \approx 1,6 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>! В этом случае  $\rho g h$  настолько мало по сравнению с избыточным лапласовым давлением в капле, что гидростатическим давлением можно пренебречь. Такая капля может считаться эталоном сферичности. Иное дело для капли диаметром, скажем, в 4 мм. Для нее  $\rho g h \approx 60$  Н/м<sup>2</sup>, а  $2\sigma/r \approx 78$  Н/м<sup>2</sup>. Эти величины одного порядка, и нарушения сферичности для такой капли более существенны. Полагая  $r_A r_B \approx r_{\text{ср}}^2$  и  $h = 2r_{\text{ср}} \approx 4$  мм, найдем, что  $\Delta r = r_B - r_A \approx 0,06$  мм. Разность радиусов составляет 3% от радиуса.

Однако наш расчет показывает только, для каких капель можно ожидать нарушения сферичности, но не объясняет форму капли. В чем же дело? А в том, что мы не учли разности давлений воздуха под каплей и над ней. Перед каплей давление больше нормального атмосферного на величину порядка  $\rho_{\text{возд}} v^2$ , где  $v$  — скорость капли (см. задачу 32). За каплей же давление оказывается меньше атмосферного из-за того, что там образуют-

ся вихри и турбулентный воздушный поток. Если разность давлений воздуха у дна и вершины капли  $p_{A0} - p_{B0} > \rho gh$ , то  $\frac{2\sigma}{r_A} - \frac{2\sigma}{r_B} = \rho gh - (p_{A0} - p_{B0}) < 0$  и, следовательно,  $r_A > r_B$ . Об этом и свидетельствуют снимки.

Итак, теперь понятно, почему маленькие водяные капли сферичны, а капли диаметром порядка 1—5 мм похожи на сдобную булочку. А как должны выглядеть капли еще большего диаметра? Оказывается, что капли большего диаметра неустойчивы и разрываются на маленькие. Это, впрочем, и понятно. Сохранность капли, ее форму обеспечивает поверхностное натяжение. Однако когда гидростатическое давление в капле начинает превышать давление Лапласа  $2\sigma/r$ , капля «растекается» и дробится на более мелкие. Этим объясняется, почему не бывает крупных капель на листьях деревьев и других поверхностях, не смачиваемых жидкостью. Возможный размер капли можно получить из неравенства  $2\sigma/r > \rho gh$ , полагая, что  $h \approx 2r$ :

$$r < \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$

Для воды, например, найдем:  $r < 3,8$  мм; для ртути  $r < 2,6$  мм. В случае движущейся капли все выглядит сложнее из-за внутренних вихревых движений внутри капли, которые появляются благодаря силам трения, действующим со стороны воздуха (рис. 120). Это, однако, мало меняет нашу оценку.

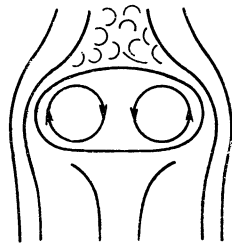


Рис. 120.

101. Заряд  $Q$ , который нужно поместить в нижней точке сферы, должен быть таким, чтобы электрическая сила, действующая на верхний заряд, была не меньше силы тяжести  $mg$ , то есть  $\frac{qQ}{d^2} \geq mg$ . Отсюда

$$Q \geq \frac{mg d^2}{q}.$$

Однако нам нужно еще проверить, будет ли равновесие шарика устойчивым. Рассмотрим малое отклонение шарика от положения равновесия (рис. 121).

Равновесие шарика устойчиво, если проекция силы  $F$  электрического взаимодействия зарядов на касательную к сфере больше или равна проекции силы тяжести на ту же касательную:

$$\frac{qQ}{d^2} \sin \alpha \geq mg \sin 2\alpha.$$

(Сила  $N$  реакции перпендикулярна к поверхности сферы.)

Так как угол  $\alpha$  отклонения шарика от положения равновесия мал, то  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ . Поэтому

$$2mga \leq \frac{qQ}{d^2} \alpha.$$

Следовательно, для устойчивого равновесия шарика в верхней точке сферы в нижнюю точку сферы должен быть помещен заряд  $Q \geq 2 \frac{mgd^2}{q}$ .

102. Как известно, напряженность электрического поля внутри заряженного тонкого сферического слоя равна нулю, а вне этого слоя напряженность такая, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в его центре. (Это можно показать, исходя из закона Кулона и принципа суперпозиции.)

Разобьем Землю и атмосферу Земли на тонкие сферические слои. Тогда ясно, что на поверхности Земли напряженность электрического поля равна

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (1)$$

где  $Q$  — суммарный заряд Земли,  $R$  — радиус Земли.

На высоте  $h$  напряженность электрического поля складывается из напряженности поля, созданного зарядом  $Q$

Земли, и из напряженности поля, созданного зарядом  $q$  слоев атмосферы с радиусами, меньшими  $R + h$ , то есть

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + q}{(R + h)^2}.$$

Так как

$$q = \rho V = \frac{4}{3} \pi [(R + h)^3 - R^3] \rho,$$

то

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R + h)^2} + \frac{1}{3\epsilon_0} \left[ (R + h) - \frac{R^3}{(R + h)^2} \right] \rho. \quad (2)$$

Радиус Земли  $R$  много больше высоты  $h$ , поэтому в знаменателе формулы (2) можно сумму  $R + h$  заменить на  $R$ . Тогда

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{h}{3\epsilon_0} \rho = E_0 + \frac{h}{3\epsilon_0} \rho.$$

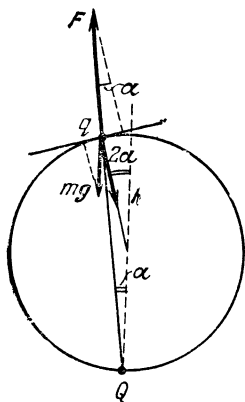


Рис. 121.

Отсюда

$$\rho = \frac{3\epsilon_0 (E - E_0)}{h} \approx -1,3 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^3.$$

103. Если разность потенциалов между электродами  $U$ , то напряженность электрического поля между ними  $E = U/d$ . В этом поле на электрон действует сила  $F = eE$  ( $e$  — заряд электрона), сообщающая ему ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m} = \frac{Ue}{md}.$$

При столкновении с атомом газа электрон передает ему свою энергию и останавливается (мы считаем, что столкновение неупруго). Масса атома много больше массы электрона. Поэтому атому газа при столкновении передается энергия  $\frac{mv^2}{2}$ , приобретаемая электроном между его последовательными столкновениями. Эта энергия должна быть равна потенциалу ионизации газа  $W$ :

$$\frac{mv^2}{2} = W. \quad (1)$$

Найдем теперь скорость, приобретаемую электроном. Если время разгона равно  $\tau$ , то мы можем записать, что  $v = a\tau = \frac{Ue\tau}{md}$  и  $l = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{Ue\tau^2}{2md}$ . Из этих уравнений найдем, что

$$v = \sqrt{\frac{2Uel}{md}}.$$

Подставляя это выражение для  $v$  в уравнение (1), получим

$$\frac{Uel}{d} = W,$$

откуда

$$U = \frac{Wd}{el} \approx 160 \text{ В.}$$

104. Потенциал шара должен быть равен нулю. Потенциал поля в центре шара, равный, конечно, потенциалу шара, складывается из потенциала поля точечного заряда  $q$  и поля, создаваемого зарядом  $Q$  шара. Заряд  $Q$  распределен по шару не равномерно, но если шар разбить на маленькие участки с зарядами  $\Delta q$ , то потенциал поля, создаваемого зарядом шара в центре, можно выразить как суммарный потенциал полей точечных зарядов  $\Delta q$ .

Таким образом, можно записать для центра шара:  $\Delta\varphi = \sum k \frac{\Delta q}{r} = \frac{k}{r} \sum \Delta q = \frac{k}{r} Q$  и  $k \frac{Q}{r} + k \frac{q}{l} = 0$  ( $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ).

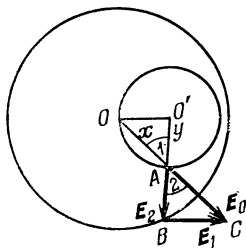
Отсюда

$$Q = -\frac{r}{l} q.$$

105. Будем считать, что сначала шар равномерно заряжен по всему объему, а потом часть его заряда, находящуюся внутри полости, удаляют.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в любой точке однородного заряженного шара равна векторной сумме напряженности поля шара с полостью и напряженности поля заряда, удаленного из полости.

Рассмотрим произвольную точку внутри полости. Ее расстояние от центра сферы обозначим  $x$ , а от центра полости  $y$ . Напряженность  $E_0$  поля, созданного сплошным шаром в этой точке, направлена вдоль радиуса шара и равна по абсолютной величине



$$E_0 = \frac{4}{3} \pi x \sigma.$$

Аналогично, напряженность  $E_2$  поля, созданного зарядом, находившимся раньше в полости, направлена по радиусу полости и равна по абсолютной величине

Рис. 122.

$$E_2 = \frac{4}{3} \pi y \sigma.$$

Тогда напряженность  $E_1$  истинного поля, созданного шаром с полостью, из принципа суперпозиции равна

$$E_1 = E_0 - E_2.$$

Рассмотрим треугольники  $AOO'$  и  $ABC$  (рис. 122).

Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие, и отношения прилежащих к ним сторон одинаковы:

$$\frac{E_2}{y} = \frac{E_0}{x} = \frac{4}{3} \pi \sigma.$$

Следовательно, треугольники подобны, из чего следует, что

$$\frac{E_1}{a} = \frac{E_0}{x}.$$

Отсюда

$$E_1 = E_0 \frac{a}{x} = \frac{4}{3} \pi x \sigma \frac{a}{x} = \frac{4}{3} \pi a \sigma.$$

Из подобия треугольников следует также, что вектор  $E_1$  направлен параллельно отрезку  $OO'$ .

Таким образом, мы нашли, что вектор напряженности поля в точке  $A$  полости направлен параллельно отрезку  $OO'$ , соединяющему центры сферы и полости. Абсолютная величина напряженности  $E_1 = \frac{4}{3} \pi a \sigma$ , и не зависит от того, где именно в полости находится точка  $A$ . Это означает, что электрическое поле в полости однородно.

106. Зарядив оба конденсатора от источника до разности потенциалов  $\mathcal{E}$ , составим цепь, изображенную на рис. 123. При этом заряды на конденсаторах перераспределяются.

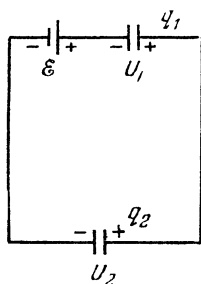


Рис. 123.

Обозначая заряды на конденсаторах после перераспределения через  $q_1$  и  $q_2$ , а напряжения через  $U_1$  и  $U_2$ , имеем

$$\mathcal{E} + U_1 - U_2 = 0, \quad q_1 + q_2 = 2C\mathcal{E},$$

откуда  $U_1 = \frac{\mathcal{E}}{2}$ ,  $U_2 = \frac{3}{2}\mathcal{E}$ . Зарядив теперь конденсатор 1 до разности потенциалов  $\mathcal{E}$ , соберем ту же схему. Теперь  $U_2$  станет равным  $\frac{7}{4}\mathcal{E}$ . Повторяя эту операцию много раз, можно зарядить конденсатор 2 до разности потенциалов, сколь угодно близкой к  $2\mathcal{E}$ . Соединив теперь последовательно источник, конденсатор 1, заряженный до напряжения  $\mathcal{E}$ , и конденсатор 2, можно получить на концах цепи напряжение, сколь угодно близкое к  $4\mathcal{E}$ .

107. Из симметрии очевидно, что при измерении емкости цепочки между точками 1 и 2, разность потенциалов между двумя любыми из других точек (3, 4, 5, 6 ...) равна нулю. Это означает, что включенные между этими точками конденсаторы не заряжены и поэтому они не дают вклада в емкость системы. Тогда данная цепочка эквивалентна схеме, приведенной на рис. 124.

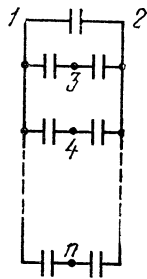


Рис. 124.

Емкость цепи равна поэтому  $\frac{1}{2} nC$ .

108. Во внешнем электрическом поле все гантельки ориентируются вдоль поля (рис. 125), при этом на шаре возникают заряды, распределенные определенным образом по его поверхности.



Внутри шара, где плотности положительных и отрицательных зарядов одинаковы, заряды компенсируют друг друга.

Если внимательно посмотреть на рисунок, то можно представить себе, что шар из полностью поляризованного диэлектрика эквивалентен двум как бы вложенным друг в друга шарам. Один

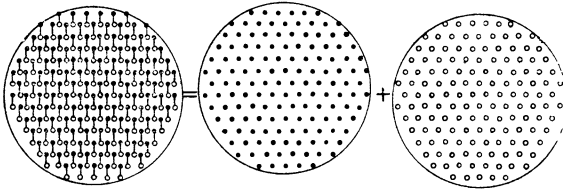


Рис. 125.

шар заряжен только положительно, другой — только отрицательно. Центры этих шаров смещены друг относительно друга на расстояние  $l$  (длина гантели), а относительно центра реального шара они смещены на расстояние  $\frac{l}{2}$  (рис. 126).

Таким образом, поле в любой точке складывается из внешнего поля и полей, созданных положительно и отрицательно заряженными шарами. Поэтому вначале решим вспомогательную задачу: найдем напряженность поля внутри равномерно заряженного шара на расстоянии  $r$  от его центра.

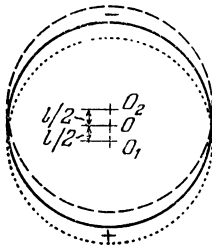


Рис. 126.

Разобьем равномерно заряженный шар на тонкие сферические слои, толщина которых много меньше радиуса шара. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля на расстоянии  $r$  от центра шара равна сумме напряженностей полей зарядов таких сферических слоев. Но напряженность поля, созданного зарядами тех слоев, радиусы которых больше  $r$ , равна нулю, а слоев, радиусы которых меньше  $r$ , — такая, как если бы заряды этих слоев находились в центре шара. Следовательно, напряженность поля на расстоянии  $r$  от центра шара равна  $E_r = k \frac{Q}{er^2}$  ( $Q$  — заряд шара радиуса  $r$ ). Если число зарядов  $q$  в единице объема шара равно  $n$ , то

$$Q = qn \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \quad E_r = \frac{qnr}{3\epsilon\epsilon_0}.$$

Воспользовавшись полученными результатами, нетрудно найти напряженность поля в любой точке  $A$  шара из диэлектрика. Обозначим расстояние от этой точки до центра положительно заряженного шара  $r_1$ , а до центра отрицательно заряженного шара  $r_2$ . Вектор напряженности поля в точке  $A$  складывается из трех векторов (рис. 127)  $E_0$ ,  $E_1$  и  $E_2$ , где  $E_1 = \frac{qnr_1}{3\epsilon\epsilon_0}$  — поле положительно заряженного шара,  $E_2 = \frac{qnr_2}{3\epsilon\epsilon_0}$  — поле отрицательно заряженного шара.

Найдем сначала сумму  $E_1$  и  $E_2$ . Рассмотрим треугольники  $AO_1O_2$  и  $ABC$ . Углы  $ABC$  и  $O_1AO_2$  равны, и выполняется следующее соотношение:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1A}{O_2A},$$

Из подобия треугольников следует, что вектор  $E = E_1 + E_2$  параллелен линии  $O_1O_2$ , то есть параллелен  $E_0$ . Абсолютную величину вектора  $E$  можно найти из соотношения

$$\frac{E}{E_1} = \frac{O_1O_2}{O_1A},$$

откуда

$$E = E_1 \frac{O_1O_2}{O_1A} = \frac{qnl}{3\epsilon\epsilon_0}.$$

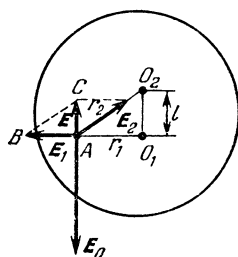


Рис. 127.

Тогда окончательно напряженность поля в точке  $A$  равна

$$E_A = E_0 - E = E_0 - \frac{qnl}{3\epsilon\epsilon_0}.$$

Как видно, напряженность поля в точке  $A$  не зависит ни от  $r_1$ , ни от  $r_2$ , то есть не зависит от положения точки  $A$  внутри шара. Это означает, что поле внутри полностью поляризованного шара однородно.

109. Вектор напряженности поля не может быть параллелен отрезку  $AB$ : напряженность поля заряженного отрезка равна сумме напряженностей полей частей отрезка, а они все направлены к отрезку или от него в зависимости от знака заряда отрезка.

Не подходит и высота треугольника  $ABC$ : например, если точка  $C$  находится в стороне от отрезка на расстоянии, много большем длины отрезка, то ясно, что напряженность поля должна быть направлена к отрезку  $AB$ , а не по перпендикуляру к нему.

Итак, у нас осталась медиана и биссектриса. Для того чтобы вектор  $E$  был направлен вдоль медианы, необходимо, чтобы отрезки равной длины  $\Delta x$ , находящиеся на равных расстояниях от середины отрезка, создавали одинаковое поле в точке  $C$ . Только в этом случае сумма векторов  $\Delta E$  будет направлена вдоль медианы

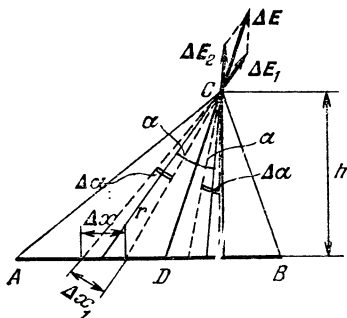


Рис. 128.

треугольника  $ABC$ . Однако это невозможно: отрезки равной длины имеют одинаковый заряд  $\Delta q = \sigma \Delta x$  ( $\sigma$  — линейная плотность заряда, то есть заряд единицы длины отрезка), а расстояния до точки  $C$  различны.

Значит, вектор  $E$  направлен вдоль биссектрисы треугольника  $ABC$ .

Убедимся в этом. Найдем напряженность поля отрезка  $\Delta x$  такого, что прямая, проведенная из него в точку  $C$ , образует угол  $\alpha$  с высотой треугольника и  $\Delta x \ll r$  (рис. 128):  $\Delta E = k \frac{\sigma \Delta x}{r^2}$ . Если отрезок  $\Delta x$  виден из точки  $C$  под углом  $\Delta \alpha$ , то

$\Delta x_1 = r \Delta \alpha$  (угол  $\alpha$  мал, так что  $\operatorname{tg} \frac{\Delta \alpha}{2} \approx \frac{\Delta \alpha}{2}$ , а  $\Delta x_1 = 2r \operatorname{tg} \frac{\Delta \alpha}{2}$ ),  $\Delta x = \frac{\Delta x_1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{r \Delta \alpha}{\cos \alpha}$  и  $\Delta E = k \frac{\sigma r \Delta \alpha}{r^2 \cos \alpha} = k \frac{\sigma \Delta \alpha}{r \cos \alpha}$ .

Но  $r \cos \alpha = h$ , поэтому  $\Delta E = k \frac{\sigma \Delta \alpha}{h}$ . Напряженность поля отрезка, который виден из точки  $C$  под углом  $\Delta \alpha$ , не зависит от угла  $\alpha$ . Все отрезки, которые видны из точки  $C$  под одинаковым углом, создают в ней поле одинаковой величины. Но для любого отрезка  $\Delta x$ , находящегося слева от биссектрисы  $CD$  треугольника  $ABC$ , можно найти отрезок справа от нее такой, что он виден из точки  $C$  под тем же углом  $\Delta \alpha$ , что и отрезок  $\Delta x$ , и угол  $\beta$  между биссектрисой и прямой, соединяющей этот отрезок с точкой  $C$ , такой же, как и для отрезка  $\Delta x$ . Так как эти отрезки создают в точке  $C$  одинаковое поле, то вектор  $\Delta E$  суммы векторов  $\Delta E_1$  и  $\Delta E_2$  напряженностей полей отрезков направлен по диагонали ромба, построенного на векторах  $\Delta E_1$  и  $\Delta E_2$ , то есть вдоль биссектрисы  $CD$ . Это верно для любого угла  $\alpha$ , то есть для любой пары отрезков. Значит, и вектор напряженности поля отрезка  $AB$  направлен вдоль биссектрисы треугольника  $ABC$ .

110. Так как пластины конденсатора большие, индуцированные на них заряды не изменяются при перемещении заряда  $q$  параллельно плоскостям пластин (краевыми эффектами мы пренебрегаем). Это означает, что не изменятся заряды пластин и в том случае, если заряд  $q$  равномерно «размазать» по плоскости, параллельной пластинам конденсатора и находящейся первоначально на расстоянии  $d/3$  от левой пластины.

Обозначим  $q_1$  заряд левой пластины конденсатора. Тогда заряд правой пластины (согласно закону сохранения заряда) равен  $-q_1$ . Заряды  $q_1$  и  $-q_1$  пластин конденсатора создают между пластинами электростатическое поле с

напряженностью  $E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$  ( $S$  — площадь

каждой пластины), а находящаяся

внутри конденсатора пластина с зарядом  $q$  — поле с напряженностью  $E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$  (рис. 129). С одной стороны от пластины

направления напряженностей обеих полей совпадают, а с другой стороны — противоположны друг другу. Поэтому разность потенциалов  $\Delta\phi$  между пластинами конденсатора равна

$$\Delta\phi = (E_1 - E) \cdot \frac{1}{3}d + (E_1 + E_2) \cdot \frac{2}{3}d.$$

Так как пластины конденсатора замкнуты, напряжение между ними равно нулю:  $\Delta\phi = 0$ . Следовательно,

$$\frac{1}{3\epsilon_0 S} \left( q_1 - \frac{q}{2} \right) + \frac{2}{3\epsilon_0 S} \left( q_1 + \frac{q}{2} \right) = 0.$$

Из этого уравнения найдем заряд  $q_1$ :

$$q_1 = -\frac{1}{6}q.$$

Аналогично можно найти заряд  $q'_1$  левой пластины конденсатора, когда средняя пластина (заряд  $q$ ) находится от нее на расстоянии  $\frac{2}{3}d$ :

$$q'_1 = \frac{1}{6}q.$$

Таким образом, при перемещении внутри конденсатора точечного заряда  $q$  (или заряженной пластины) по проводнику,

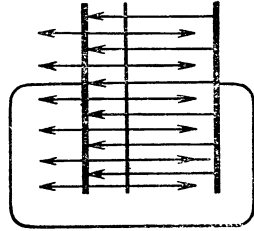


Рис. 129.

соединяющему пластины конденсатора, проходит заряд

$$\Delta q = q_1' - q_1 = \frac{1}{3} q.$$

111. Когда язычок подключен к источнику, конденсатор заряжается до некоторого напряжения  $U$ . При этом на его обкладках появляются заряды  $q = CU$ . При переключении язычка происходит разрядка конденсатора. Таким образом, через плечо мостика, в которое включен конденсатор, течет средний ток  $I = CUv$  при напряжении на нем  $U$ . Следовательно, эффективное

сопротивление этого плеча равно  $R_3 = (Cv)^{-1}$ . Записав условие баланса моста  $\frac{R_1}{R} = \frac{R_3}{R_2}$ , найдем

$$C = \frac{R}{R_1 R_2} \frac{1}{v}.$$

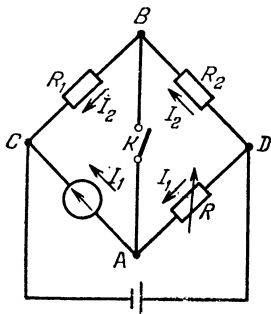


Рис. 130.

112. Включим гальванометр в цепь вместо неизвестного сопротивления (рис. 130), а точки  $A$  и  $B$  соединим через ключ  $K$ . Подбором переменного сопротивления  $R$  добьемся такого положения, что показания гальванометра не будут изменяться

при замыкании и размыкании ключа  $K$ . В такой ситуации потенциалы точек  $A$  и  $B$  равны:  $\varphi_A = \varphi_B$ .

Но  $\varphi_A = \varphi_D - I_1 R$  ( $I_1$  — ток, текущий по участку  $DA$ ), а  $\varphi_B = \varphi_D - I_2 R_2$  ( $I_2$  — ток, текущий по участку  $DB$ ). Поэтому

$$\varphi_D - I_1 R = \varphi_D - I_2 R_2,$$

откуда

$$I_1 R = I_2 R_2. \quad (1)$$

С другой стороны,  $\varphi_A = \varphi_C + I_1 r$  ( $r$  — сопротивление гальванометра), а  $\varphi_B = \varphi_C + I_2 R_1$ , так что

$$\varphi_C + I_1 r = \varphi_C + I_2 R_1,$$

откуда

$$I_1 r = I_2 R_1. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$r = \frac{R_1}{R_2} R.$$

113. Ясно, что нижний вольтметр показывает  $U_2 = \mathcal{E} - U_1 = = 3$  В. Сумма токов в общей точке вольтметров равна нулю,

а показания каждого вольтметра пропорциональны току через него. (Сопротивления вольтметров одинаковы по условию.) Следовательно,

$$U_3 = U_2 - U_1 = 1\text{В.}$$

114. В отсутствие вольтметра сопротивления  $R$  и  $R_1$  включены последовательно. Поэтому напряжение на сопротивлении  $R$  равно  $U_R = \frac{R}{R+R_1} \mathcal{E}$ . При подключении вольтметра он будет измерять напряжение на участке, состоящем из параллельно включенных сопротивлений  $R$  и сопротивления вольтметра  $r$ . Вольтметр покажет величину

$$U' = \mathcal{E} \frac{Rr}{R+r} / \left( \frac{Rr}{R+r} + R_1 \right).$$

По условию, показание вольтметра должно отличаться не более чем на 2% от значения  $U_R$ . Поэтому

$$\frac{U_R - U'}{U_R} \leq 0,02.$$

Подставив в это уравнение выражения для  $U_R$  и  $U'$ , найдем, что сопротивление вольтметра не должно превышать 3675 кОм.

115. При подключении вольтметра к точкам  $A$  и  $B$  его показание равно э. д. с. источника. Поэтому если вольтметр подключен к сопротивлению  $r_1$ , а внутреннее сопротивление вольтметра равно  $r$ , то по цепи идет ток

$$I = \frac{U}{r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r}}.$$

так что

$$U_1 = U \frac{r_1 r}{r_1 + r} / \left( r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right). \quad (1)$$

Точно так же

$$U_2 = U \frac{r_2 r}{r_2 + r} / \left( r_1 + \frac{r r_2}{r_1 + r} \right). \quad (2)$$

Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Таким образом,  $r_1/r_2 = 3/2$ .

При отключенном вольтметре напряжение на сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$  равно  $U = 12$  В. Так как отношение сопротивлений

известно, нетрудно найти и напряжения  $U'_1$  и  $U'_2$  на сопротивлениях:

$$U'_1 + U'_2 = U, \quad \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$U'_1 = U \frac{r_1}{r_1 + r_2} = U \frac{1}{1 + r_2/r_1} = 7,2 \text{ В}, \quad U'_2 = U - U'_1 = 4,8 \text{ В}.$$

116. Достаточно сделать два измерения (рис. 131). Первое позволяет определить внутреннее сопротивление амперметра;

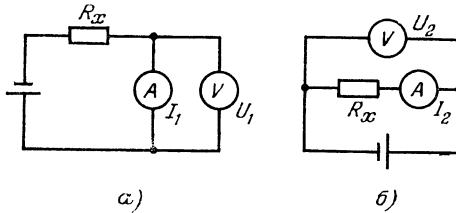


Рис. 131.

$r_a = \frac{U_1}{I_1}$ , а второе — величину неизвестного сопротивления:

$$\frac{U_2}{I_2} = R_x + r_a, \text{ отсюда } R_x = \frac{U_2}{I_2} - r_a.$$

117. Ответ зависит от того, какой из приборов лучше. Если мы измеряем сопротивление  $R_x$  по первой схеме, то мы знаем напряжение  $U$  на этом сопротивлении, а ток, идущий через него, точно неизвестен. Неточность в измерении тока  $\Delta I$  при известном напряжении приводит к неточности  $\Delta R_x$  в определении  $R_x$ , которая легко находится из закона Ома:

$$IR_x = U, \quad I \Delta R_x + R_x \Delta I = 0.$$

Сбозначая  $R_v$  внутреннее сопротивление вольтметра, имеем

$$\Delta IR_v = IR_x.$$

Поэтому  $\Delta R_x = R_x \frac{\Delta I}{I} = \frac{R_x}{R_v}$ . Для второй схемы аналогично получаем  $\Delta R'_x = R_a$ , где  $R_a$  — внутреннее сопротивление амперметра. Таким образом, если  $R_x/R_v < R_a/R_x$ , то выгоднее пользоваться первой схемой, и наоборот.

118. Для того чтобы найти мощность  $P$ , необходимо найти напряжение  $U$  на лампочке и ток  $I$  через нее. Найдем их.

Если напряжение на лампочке и резисторе с сопротивлением  $R_2$  равно  $U$ , то напряжение на втором резисторе равно  $\mathcal{E} - U$  и ток через него равен

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U}{R_1}.$$

Через резистор с сопротивлением  $R_2$  течет при этом ток  $I_2 = \frac{U}{R_2}$ , а через лампочку ток

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} - U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

Этой зависимости должны удовлетворять ток и напряжение на лампочке. С другой стороны, их значения должны соответствовать значениям, соответствующим графику (рис. 132). Поэтому для того чтобы найти  $U$  и  $I$ , нужно построить график зависимости  $I(U)$ , соответствующий формуле (1), и найти значения  $U$  и  $I$ , соответствующие точкам пересечения графиков. Подставив в формулу (1) известные величины, зависимость  $I$  от  $U$  можно записать в виде

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} U$$

( $I$  выражается в амперах, а  $U$  — в вольтах). Этот график легко построить. Из рисунка видно, что  $I = 0,4$  А и  $U = 1,2$  В. Поэтому

$$P = UI = 0,48 \text{ Вт.}$$

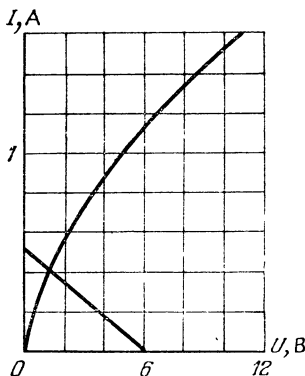


Рис. 132.

119. Построим нагрузочную прямую  $U = -\frac{R_H R_1}{R_1 + R_H} I + U_0 \frac{R_H}{R_1 + R_H}$  (см. задачу 118). Ее пересечение с графиком (рис. 133) определяет рабочее напряжение  $U = 10$  В. Для того чтобы найти  $\Delta U_0$ , необходимо построить нагрузочные прямые с  $U = 10 \text{ В} \pm 0,5 \text{ В}$  (рис. 133). По этим прямым нетрудно найти пределы изменения  $U_0$ :  $90 \text{ В} \leq U_0 \leq 45 \text{ В}$ .

120. Напряжение  $U$  на дуге равно

$$U = U_0 - IR, \quad (1)$$



где  $I$  — ток в цепи. С другой стороны, зависимость напряжения  $U$  от тока  $I$  должна определяться точками графика  $U(I)$ . Поэтому построим на графике нагрузочную прямую  $U = U_0 - IR$

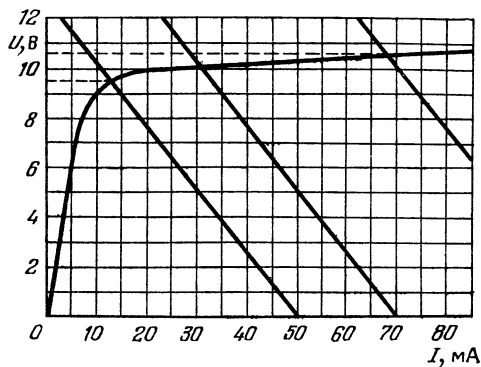


Рис. 133.

и найдем точки пересечения этой прямой с вольт-амперной характеристикой дуги (рис. 134). Эти точки и определяют возможные

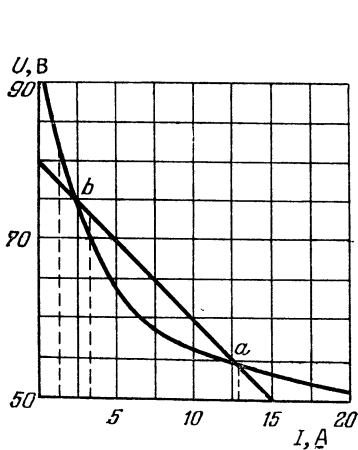


Рис. 134.

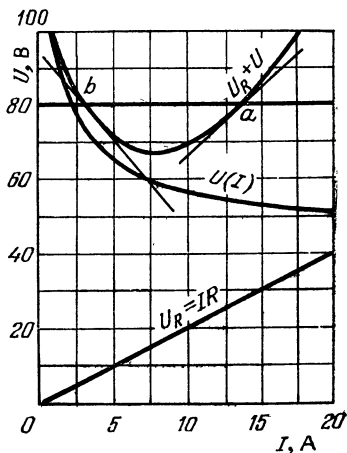


Рис. 135.

значения напряжений на дуге и токов в цепи. Точка  $a$  соответствует устойчивому, а точка  $b$  — неустойчивому горению дуги. Убедимся в этом, рассмотрев, например, точку  $b$ . При случайном небольшом уменьшении тока напряжение на дуге  $U'_1$  окажется

меньше того напряжения  $U_1''$ , которое должно быть на дуге для ее нормального горения. Дуга гаснет. При небольшом возрастании тока напряжение на дуге  $U_2'$  будет больше необходимого  $U_2''$ . Это приведет к еще большему увеличению тока. Точно так же нетрудно убедиться в том, что точка  $a$  соответствует устойчивому горению дуги. Из рисунка найдем, что  $I = 13$  А.

Можно решить задачу и иначе, построив вольт-амперную характеристику всей цепи. Для этого достаточно «сложить» график  $U(I)$  для дуги с графиком зависимости  $U_R$  от  $I$  для резистора (рис. 135). Значениям напряже-

ния  $U_0$  на входе цепи соответствуют две точки  $a$  и  $b$  вольт-амперной характеристики цепи. Точка  $a$  лежит на восходящем участке характеристики, а точка  $b$  — на, как говорят, падающем участке, — участке, на котором при увеличении тока напряжение не возрастает, а убывает. На таком участке дифференциальное

сопротивление цепи  $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$  отрицательно. Предположим, дуга работает при напряжении

$U_0$  и  $I_0$ , соответствующим точке  $b$  (рис. 136), и в цепи появилась небольшая переменная составляющая напряжения, так что  $U = U_0 + \frac{1}{2} \Delta U \sin \omega t$ . Тогда появится и переменная составляющая тока  $I = I_0 + \frac{1}{2} \Delta I \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  — сдвиг фаз между током и напряжением. Так как при уменьшении напряжения ток возрастает и при минимальном напряжении ток максимален (см. рис. 136), то  $\varphi = \pi$ . Мощность  $P$ , которая выделяется переменным током, равна  $\frac{\Delta U \cdot \Delta I}{8} \cos \varphi$ , а так как  $\varphi = \pi$ , то

$$P = -\frac{\Delta U \cdot \Delta I}{8} < 0.$$

Мы видим, что мощность  $P$  отрицательна! Это означает, что переменная составляющая тока не выделяет энергию, а черпает ее за счет постоянной и, следовательно, амплитуда переменного тока должна нарастать. Такое нарастание тока приведет к тому, что установится ток, соответствующий точке  $a$  участка вольт-амперной характеристики,

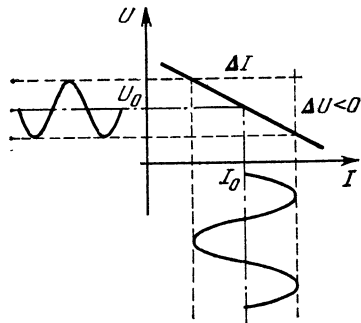


Рис. 136.

121. Прежде всего необходимо построить вольт-амперную характеристику для лампы мощностью 45 Вт. Это можно сделать, заметив, что отношения токов при одном и том же напряжении на двух лампах равно отношению их мощностей. (Справедливость этого для напряжения, отличного от 127 В, следует из того, что лампу в 75 Вт можно получить, включив параллельно лампу в 45 и в 30 Вт.) На рис. 137 вольт-амперная характеристика лампы в 45 Вт показана пунктиром. Сложив обе

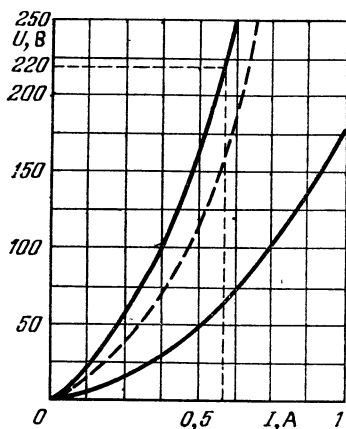


Рис. 137.

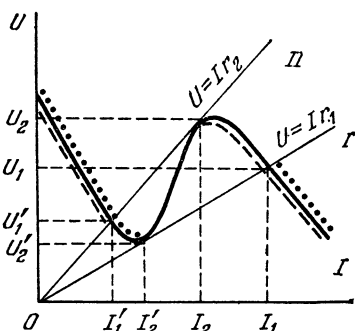


Рис. 138.

кривые, получим вольт-амперную характеристику последовательно соединенных ламп. По этому графику найдем значения тока в лампах при  $U = 220$  В, и значения напряжений  $U_1$  и  $U_2$  на лампах. Так как  $U_1 > 1,1 U_{\text{раб}}$ , то ясно, что такое включение ламп недопустимо.

122. Если в цепи течет ток  $I$ , то напряжение на сопротивлении  $r$  будет равно  $Ir$ . Поэтому при заданном значении сопротивления ток в цепи и напряжение на сопротивлении графически находятся как координаты точки пересечения прямой  $U = Ir$  с вольт-амперной характеристикой источника (рис. 138).

При увеличении сопротивления реостата угол наклона этой прямой с осью  $I$  будет расти. При этом будет увеличиваться напряжение на сопротивлении. Сопротивление, соответствующее положению  $I$  прямой, будем обозначать через  $r_1$ . Начиная с этого значения сопротивления, ток в цепи может иметь три значения. Однако вплоть до сопротивления  $r_2$  ток будет непрерывно изменяться. Положение  $II$  соответствует неустойчивости в системе. Небольшое уменьшение тока приводит к его скачкообразному

ослаблению до величины  $I'_2$ . При этом напряжение на сопротивлении тоже уменьшается скачком. При дальнейшем увеличении сопротивления реостата напряжение на нем будет непрерывно возрастать. При выводе реостата неустойчивость возникает при сопротивлении  $r_1$ .

123. Реостат  $R_1$  слабо влияет на напряжение на приборе. Поэтому ясно, что сначала надо установить напряжение на приборе с помощью реостата  $R_2$  и затем подправить его реостатом  $R_1$ .

Действительно, если длина реостата равна  $l$ , а неточность при установке реостата составляет  $\Delta l$ , то неточность в сопротивлении реостата  $\Delta R_2$  равна  $\frac{\Delta l}{l} R_2$ , а неточность в установке сопротивления реостата  $R_1$  равна  $\frac{\Delta l}{l} R_1 = 0,1 \frac{\Delta l}{l} R_2$ , то есть в 10 раз меньше неточности установки сопротивления реостата  $R_2$ . Поэтому при той тактике, о которой мы говорили, сопротивление реостатов удастся подобрать в 10 раз точнее, чем при использовании только одного реостата  $R_2$ . Во столько же раз точнее будут установлены и напряжения на реостатах, а значит, и напряжения на приборе.

Так как заранее не очевидно, в какую сторону мы ошибемся, устанавливая сопротивление  $R_2$ , то есть что нам придется делать с помощью реостата  $R_1$ , — увеличивать или уменьшать сопротивление, то перед установкой реостата  $R_2$  движок реостата  $R_1$  нужно установить посередине реостата.

Если нам нужно устанавливать как можно точнее не напряжение на приборе, а ток, идущий через него, то в этом случае реостат должен быть включен параллельно прибору как шунт, причем основным в этом случае будет реостат с меньшим сопротивлением; именно через него будет идти наибольший ток.

Второй реостат с большим сопротивлением нужно включить параллельно первому (рис. 139) и ток устанавливать так: вначале установить движок реостата  $R_2$  посередине, затем установить ток с помощью реостата  $R_1$  и подправить его с помощью реостата  $R_2$ .

Так как ток, идущий через реостат, равен  $I = \frac{U}{R}$ , то при неточности установки сопротивления реостата  $\Delta R$  неточность в

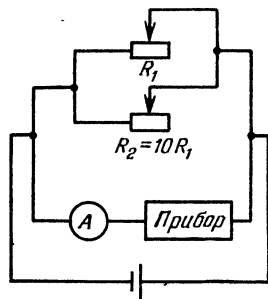


Рис. 139.

установке тока будет равна

$$\Delta I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R + \Delta R} = \frac{U \Delta R}{R(R + \Delta R)} \approx \frac{U}{R^2} \Delta R.$$

Используя реостат  $R_1$ , мы получим неточность установки тока  $\frac{U}{R_1^2} \frac{\Delta I}{I} R_1 = \frac{U}{R_1} \frac{\Delta I}{I}$ , а с помощью реостата  $R_2$  неточность установки тока станет равной  $\frac{U}{R_2} \frac{\Delta I}{I} = 0,1 \frac{U}{R_1} \frac{\Delta I}{I}$ , то есть будет в 10 раз меньше, чем при использовании только реостата  $R_1$ .

124. Пусть  $P$  — мощность, выделяющаяся в утюге. Тогда за время  $\tau_1$  в нем выделится энергия  $W_1 = P\tau_1$ , а за время  $\tau_1 + \tau_2$  утюг отдаст энергию  $W_2 = \alpha(T_1 - T_0)(\tau_1 + \tau_2)$ , где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности. При установившейся температуре утюга  $W_1 = W_2$ , то есть

$$P\tau_1 = \alpha(T_1 - T_0)(\tau_1 + \tau_2). \quad (1)$$

Точно так же в режиме, когда регулятор установлен в положении «хлопок»,

$$P\tau'_1 = \alpha(T_2 - T_0)(\tau'_1 + \tau'_2). \quad (2)$$

Подставив в (2) значение  $P$  из (1), найдем  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{\tau'_1}{\tau_1} \frac{(T_1 - T_0)(\tau_1 + \tau_2)}{\tau'_1 + \tau'_2} + T_0.$$

Аналогично найдем и  $T_3$ :

$$T_3 = 420^\circ \text{C}.$$

125. Обозначим  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_1$  — энергии, излучаемые соответственно первой и второй лампочками, а  $W$  и  $W_1$  — мощности, потребляемые ими от сети. Тогда  $\mathcal{E} = \eta W$ ,  $\mathcal{E}_1 = \eta W_1$  и  $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}$ , где  $\eta$  — к. п. д. лампочек. Отсюда следует, что

$$\frac{W_1}{W} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} = 2.$$

Но  $W = \frac{U^2}{R}$  и  $W_1 = \frac{U^2}{R_1}$ , где  $U$  — напряжение сети,  $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$  и  $R_1 = \rho \frac{4l_1}{\pi d_1^2}$  — сопротивления нитей ( $\rho$  — удельное сопротивление материала при температуре работы лампы). Поэтому

$$\frac{W_1}{W} = \frac{R}{R_1} = \frac{l d_1^2}{l_1 d^2},$$

так что

$$\frac{l d_1^2}{l_1 d^2} = 2. \quad (1)$$

В состоянии равновесия мощность, получаемая лампочкой от сети, должна быть равна мощности, излучаемой лампочкой в виде света и тепла. Последняя, очевидно, пропорциональна площади поверхности нити и некоторой функции температуры  $f(T)$ . Следовательно,  $W = Sf(T)$ .

Световой поток, излучаемый лампочкой, также пропорционален площади поверхности нити и некоторой (уже другой) функции температуры  $\varphi(T)$ :  $\mathcal{E} = S\varphi(T)$ . Так как  $\mathcal{E} = \eta W$ , то

$$\varphi(T) = \eta f(T). \quad (2)$$

Из равенства (2) следует, что к. п. д. лампочки определяется температурой нити. Следовательно, при одинаковых к. п. д. двух лампочек температуры их нитей накала одинаковы. Это означает, что

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} = \frac{S_1 \varphi(T)}{S \varphi(T)} = \frac{S_1}{S} = \frac{d_1 l_1}{d l}.$$

Но  $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}$ , следовательно,

$$\frac{d_1 l_1}{d l} = 2. \quad (3)$$

Из равенств (1) и (3) нетрудно найти:

$$d_1 = d \sqrt[3]{4} \approx 1,6d, \quad l_1 = l \sqrt[3]{2} \approx 1,3l.$$

126. При подключении концов проволоки к источнику напряжения через нее потечет ток. Проволока будет нагреваться. При этом она удлинится и ее сопротивление увеличивается. Это приведет к уменьшению тока, а следовательно, и количества выделяющегося в проволоке тепла. Длина проволоки уменьшится и т. д.

127. Обозначим  $U$  напряжение на зажимах электролизной ванны и  $I$  — пропускаемый ток. Проводя электролиз воды в течение времени  $t$ , необходимо затратить энергию

$$W = UIt = UQ,$$

где  $Q$  — заряд, прошедший через ванну.

При этом из ванны выделится масса водорода

$$m = \frac{\mu Q}{N_A e},$$

где  $\mu = 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса выделяющегося атомарного водорода,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд иона водорода и  $N_A$  — число Авогадро.

При сгорании этого водорода образуется вновь вода и выделяется энергия

$$W_1 = mq$$

Из закона сохранения энергии следует, что  $W > W_1$ , то есть

$$UQ > \frac{\mu Q}{N_A e} q,$$

откуда получим, что напряжение  $U$  должно быть больше, чем

$$U_{\text{min}} = \frac{\mu q}{N_A e} \approx 1,23 \text{ В.}$$

**128.** У старой батареи большое внутреннее сопротивление. Из закона Ома для полной цепи легко видеть, что увеличение внутреннего сопротивления батареи приводит к уменьшению тока в цепи.

**129.** Батарея гальванических элементов имеет конечное внутреннее сопротивление, поэтому напряжение на лампе меньше э. д. с. батареи на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении. Если разряжать через лампу конденсатор, то все напряжение падает на лампу. По мере разрядки конденсатора напряжение на лампе уменьшается, но если взять конденсатор большой емкости, то заряд, накопленный в нем, будет большим и в течение достаточного промежутка времени разность потенциалов между обкладками конденсатора (а следовательно, и напряжение на лампе) будет практически постоянным.

**130.** Нить лампочки нагревается не сразу. Так как сопротивление ненагретой нити мало, то некоторое время после включения лампочки в сеть через нее течет большой ток. Сопротивление тонких небольших участков нити больше сопротивления других таких же по длине, но более толстых участков. Поэтому на тонких участках выделяется больше тепла. Теплоотвод же, пропорциональный площади поверхности участка, меньше, чем в случае толстого участка. Это приводит к тому, что тонкие участки нагреваются значительно быстрее всей нити, причем при нагревании сопротивление тонкого участка возрастает, что приводит к еще большему выделению тепла и нагреванию. Увеличение сопротивления тонкого участка мало влияет на сопротивление всей нити и через нить все еще идет большой ток. Все это приводит к перегреву тонкого участка и его сгоранию.

Если диаметр тонкого участка мало отличается от диаметра нити, или его длина сравнима с длиной нити, то вся нить успевает прогреться, а ток через нее уменьшится до безопасной величины.

131. Находящийся в магнитном поле конденсатор, заполненный проводящей жидкостью, представляет собой источник тока. Найдем э. д. с. и внутреннее сопротивление этого источника.

На свободные заряды проводящей жидкости, движущиеся со скоростью  $v$ , в магнитном поле действует сила Лоренца  $F_{л} = qvB$ , искривляющая траектории зарядов. В результате заряды оседают на пластинах конденсатора. Если конденсатор не замкнут на внешнее сопротивление, процесс зарядки продолжается до тех пор, пока сила, действующая на заряды со стороны возникающего электрического поля, не уравнивает силу Лоренца. Из этого условия найдем напряженность электрического поля в конденсаторе, не замкнутом на внешнее сопротивление:  $F_{эл} = F_{л}$ , или  $Eq = qvB$ , откуда  $E = vB$ . Следовательно, разность потенциалов между пластинами не замкнутого конденсатора (э. д. с.) равна  $\mathcal{E} = vBd$ .

Внутреннее сопротивление конденсатора равно сопротивлению проводящей жидкости между обкладками:  $r = \rho \frac{d}{S}$ .

При подключении к конденсатору внешнего сопротивления  $R$  по цепи идет ток  $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$ . При этом на сопротивлении  $R$  выделяется мощность

$$P = I^2 R = \frac{(vBd)^2 R}{\left(R + \rho \frac{d}{S}\right)^2}.$$

132. Электроны вылетают из электронной пушки трубки с небольшим угловым разбросом скоростей и попадают в магнитное поле. При этом в направлении оси электроны имеют одинаковые составляющие скоростей, равные  $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ , и различные составляющие, перпендикулярные к оси и намного меньшие, чем  $v_1$ .

Движение вдоль оси — равномерное и прямолинейное. Наличие же перпендикулярных к оси составляющих приводит к искривлению траектории движения электронов. На электрон, влетающий в магнитное поле перпендикулярно к его силовым линиям, действует сила Лоренца

$$F = evB,$$

где  $v$  — перпендикулярная к  $B$  составляющая скорости электрона. Эта сила сообщает электрону центростремительное ускорение  $a = v^2/R$ , где  $R$  — радиус окружности, по которой будет



двигаться электрон. Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = evB,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{eB}, \quad (1)$$

а период  $T$  и частота  $\omega$  вращения электрона по окружности есть

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}, \quad (2)$$

Мы получили очень важный результат: какими бы ни были составляющие скоростей электронов, перпендикулярные к оси трубки, все электроны совершают один оборот за одно и то же время. Если бы составляющие скоростей электронов, параллельные оси трубки, были все равны нулю, то траекториями электронов были бы окружности разных радиусов, проходящие через одну точку — точку вылета электронов из пушки (рис. 140), причем в эту точку все электроны приходили бы одновременно.

Так как электроны участвуют еще в равномерном прямолинейном движении вдоль оси трубки, то результирующими траекториями их движений будут винтовые линии. Эти линии будут

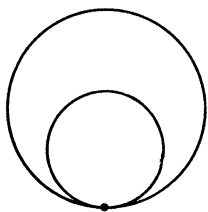


Рис. 140.

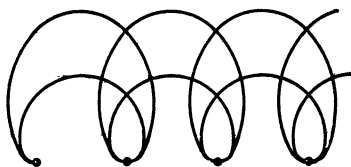


Рис. 141.

пересекаться на каждом шаге винта (рис. 141), так как составляющие скоростей, параллельные оси, одинаковы для всех электронов. В точках пересечения траекторий, очевидно, и фокусируется электронный пучок.

Итак, электронное пятно на экране будет собираться в точку, если расстояние  $L$  от электронной пушки до экрана будет кратно шагу винтовой линии  $h = v_1 T$ , то есть

$$L = nv_1 T = n \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot \frac{2\pi m}{eB} = \frac{n}{B} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{2mU}{e}}, \quad (3)$$

причем при  $B = B_0$   $n = 1$ , при  $B = 2B_0$   $n = 2$  и т. д.

С помощью такого эксперимента можно определить отношение заряда электрона к его массе. Действительно, из последней формулы

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{L^2 B_0^2}.$$

Измерив  $v$ ,  $L$  и  $B_0$ , нетрудно найти отношение  $\frac{e}{m}$ .

Мы показали (см. формулу (1)), что радиус окружности, по которой движется заряженная частица в однородном поле, обратно пропорционален индукции  $B$  поля, и может быть сделан очень маленьким. На этом основана идея магнитной изоляции плазмы. Температура плазмы для осуществления управляемых термоядерных реакций должна достигать сотен миллионов градусов ( $10^8$  К —  $10^9$  К) и поэтому необходимо изолировать плазму, не допуская ее контактов со стенками установки. В цилиндрической установке это можно сделать с помощью магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра. В таком поле электроны и ионы будут вращаться в разных направлениях по окружностям с радиусом

$$R = \frac{mv}{qB},$$

где  $m$  — масса частицы и  $q$  — ее заряд.

В сечении, перпендикулярном к полю, движение одного сорта частиц в плазме выглядит так, как показано на рис. 142.

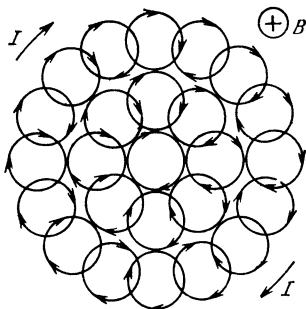


Рис. 142.

Кольцевые токи, которые связаны с таким движением, взаимно уничтожаются внутри плазменного столба, а на границе столба образуют кольцевой ток. Взаимодействие этого тока с магнитным полем и удерживает плазму. Правда, остаются концы цилиндра. Для удержания плазмы там используются неоднородные поля, в которых частицы плазмы отражаются от конца. Другой вариант установки — обойтись вообще без концов, поместив плазму в тороидальную камеру. Таково устройство установок «Токамак».

133. Так как в сверхпроводящем контуре не может действовать э. д. с. (по закону Ома ток в контуре при этом должен быть бесконечным), то магнитный поток через сверхпроводящий контур всегда остается неизменным. Площадь контура уменьшилась, а магнитный поток остался прежним. Следовательно, индукция

магнитного поля увеличилась во столько раз, во сколько уменьшилась площадь контура. И так как индукция магнитного поля пропорциональна току, то во столько же раз увеличился и ток.

134. Величина тока  $I$  зависит от скорости частиц так:

$$I = en_0vS,$$

где  $e$  — заряд протона,  $n_0$  — число протонов в единице объема,  $S$  — площадь сечения пучка,  $v$  — скорость. Будем считать, что протоны равномерно распределены по своей орбите, поэтому (учитывая, что пучок очень узкий)

$$n_0 = \frac{n}{2\pi RS}.$$

Тогда

$$I = \frac{en}{2\pi R} v.$$

Таким образом, чтобы найти ток, нужно найти скорость протонов. Начальную скорость мы знаем. Она равна

$$v_0 = \frac{2\pi R I_0}{ne}.$$

Так как магнитный поток в камере ускорителя меняется, то в ней индуцируется э. д. с. индукции, равная скорости изменения магнитного потока  $\Phi$ , то есть

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Когда протон сделает один оборот, электрическое поле совершит над ним работу, равную  $\mathcal{E}e$ , которая пойдет на изменение кинетической энергии протона

$$\mathcal{E}e = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

( $m$  — масса протона).

Отсюда найдем скорость протона после того, как он сделает один оборот в камере ускорителя:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\mathcal{E}e}{m}}.$$

Тогда ток в камере будет

$$I = \frac{ne}{2\pi R} \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{ne} I_0\right)^2 + 2\Phi \frac{e}{m}} = I_0 \sqrt{1 + \frac{n^2 e^3 \Phi}{2\pi^2 R^2 m I_0^2}}.$$

135. Так как напряжения на катушках одинаковы, то

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

откуда

$$L_1 I_1 = L_2 I_2, \quad (1)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — токи, идущие через первую и вторую катушки. Из закона сохранения энергии следует, что эти токи максимальны при

$$\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем

$$I_1 = q \sqrt{\frac{L_2}{L_1(L_1 + L_2)C}}, \quad I_2 = q \sqrt{\frac{L_1}{L_2(L_1 + L_2)C}}.$$

136. Полный поток через контур должен быть равен нулю. Поток через первую катушку пропорционален  $\frac{I_1}{l_1} n_1^2 S_1$ , а через вторую  $\frac{I_2}{l_2} n_2^2 S_2$  ( $I_1$  и  $I_2$  — величины токов в катушках). Приравняв эти выражения, получим  $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}$ . Учитывая, что  $I_1 + I_2 = I$ , найдем

$$I_1 = I \frac{x}{1+x}, \quad I_2 = I \frac{1}{1+x},$$

$$\text{где } x = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}.$$

137. Через короткозамкнутый виток потечет большой ток, как как образующаяся в нем э. д. с. замыкается на его собственное сопротивление (которое очень мало). В исправном работающем трансформаторе э. д. с., образующаяся в обмотке, замыкается на большое внешнее сопротивление.

138. Э. д. с. индукции в обмотке трансформатора пропорциональна числу витков и скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E} = n \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Но если эта обмотка подключена к сети, то сам магнитный поток пропорционален числу витков. Следовательно, э. д. с. в первичной обмотке первого и вторичной обмотке второго трансформатора пропорциональны квадратам чисел витков обмоток

$$\mathcal{E}_1 = kn_1^2, \quad \mathcal{E}_2 = kn_2^2 = k(3n_1)^2 = 9kn_1^2 = 9\mathcal{E}_1$$

( $k$  — постоянная).

Сумма же  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$  равна напряжению  $U_0$  сети ( $U_0 = 100$  В),

$$\mathcal{E}_1 + 9\mathcal{E}_1 = U_0.$$

Отсюда  $\mathcal{E}_1 = 0,1U_0 = 10$  В.

Напряжение  $U_1$  на вторичной обмотке первого трансформатора равно

$$\frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_1 = 3\mathcal{E}_1 = 30 \text{ В.}$$

Напряжение  $U_2$  на первичной обмотке второго трансформатора равно

$$\frac{n_1}{n_2} \mathcal{E}_2 = \frac{1}{3} \cdot 9\mathcal{E}_1 = 3\mathcal{E}_1 = 30 \text{ В.}$$

Напряжение  $U$  на свободных концах этих обмоток может быть равно либо  $U_1 + U_2$ , если они включены так, что э. д. с. имеют одинаковые направления, или же  $U_1 - U_2$ , если они включены «навстречу» друг другу. В первом случае  $U = 60$  В, а во втором  $U = 0$ .

139. Обозначим действующее значение э. д. с. индукции, возникающей в первичной обмотке ненагруженного трансформатора, через  $\mathcal{E}_1$ , а во вторичной обмотке — через  $\mathcal{E}_2$ . Очевидно, что

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2} = k,$$

где  $n_1$  — число витков в первичной обмотке,  $n_2$  — во вторичной обмотке и  $k = n_1/n_2$  — коэффициент трансформации. Поскольку в ненагруженном трансформаторе  $\mathcal{E}_1 = U_0$  и  $\mathcal{E}_2 = U_1$ , то

$$k = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{U_0}{U_1} \approx \sqrt{3}.$$

Когда трансформатор нагружен, то есть ко вторичной обмотке подключено сопротивление  $R$ , по первичной обмотке идет ток

$$I_1 = \frac{U_0 - \mathcal{E}'_1}{r_1}, \quad (1)$$

а по вторичной обмотке

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}'_2}{R + r_2}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathcal{E}'_1$  и  $\mathcal{E}'_2$  — э. д. с. индукции в первичной и вторичной обмотках нагруженного трансформатора.

Коэффициент полезного действия трансформатора практически равен единице. Это означает, что мощность в первичной обмотке трансформатора равна мощности, передаваемой во вторичную цепь:

$$I_1 \mathcal{E}'_1 = I_2 \mathcal{E}'_2. \quad (3)$$

Тогда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{U_0}{\mathcal{E}_2} = \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} = k. \quad (4)$$

Из (1), (2) и (4), (3) найдем:

$$I_2 = \frac{kU_0}{r_1 + k^2(R + r_2)}, \quad U_2 = I_2 R = \frac{kU_0 R}{r_1 + k^2(R + r_2)} \approx 110 \text{ В.}$$

140. Обозначим  $U$  — напряжение, до которого зарядится конденсатор. Его заряд  $q = CU$ , а энергия  $W = CU^2$ . Эта энергия равна работе, совершенной источником тока:

$$A = \mathcal{E}q = \mathcal{E}CU = \frac{CU^2}{2}.$$

Отсюда

$$U = 2\mathcal{E}.$$

Напряжение оказывается вдвое больше, чем при непосредственном подключении конденсатора к источнику. Связано это вот с чем.

Вначале ток увеличивается и э.д.с. индукции в катушке направлена противоположно э.д.с. источника. Часть работы, совершаемой источником, идет на увеличение энергии магнитного поля катушки, которая запасает эту энергию. При  $U = \mathcal{E}$  энергия магнитного поля максимальна и равна  $\mathcal{E} \cdot C\mathcal{E} - \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$ , то есть половине работы источника. Максимальна в этот момент и ток в катушке, а э.д.с. равна нулю. В дальнейшем ток начинает уменьшаться и направление э.д.с. индукции становится таким же, как у источника, увеличивая таким образом напряжение на конденсаторе, энергия которого продолжает увеличиваться как за счет работы источника, так и за счет энергии, запасенной катушкой.

141. Если сопротивление  $R$  подключено непосредственно к сети переменного тока, то в нем выделяется мощность, равная  $U^2/R$ , где  $U$  — действующее значение напряжения.

В случае, если сопротивление подключено к сети через диод, в нем выделяется мощность, в два раза меньшая (полпериода ток через сопротивление не течет):

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R}.$$

Теперь найдем мощность  $P_2$ , выделяющуюся в сопротивлении при подсоединении параллельно ему конденсатора. В условии

задачи сказано, что за период колебаний напряжения в сети заряд конденсатора практически не меняется. Это означает, что напряжение на конденсаторе можно считать постоянным и равным амплитудному значению  $U_0$ . Тогда  $P_2 = \frac{U_0^2}{R} = \frac{(\sqrt{2}U)^2}{R} = \frac{2U^2}{R}$ , поскольку амплитудное значение напряжения больше действующего значения в  $\sqrt{2}$  раз.

Отношение мощностей, выделяемых на сопротивлении с подключенным конденсатором и без конденсатора, равно

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2U^2 \cdot 2R}{R \cdot U^2} = 4.$$

Таким образом, при подсоединении конденсатора параллельно сопротивлению в нем выделяется мощность, в четыре раза бóльшая.

142. Если бы стенки не было, маятник совершал бы гармонические колебания с угловой амплитудой (максимальным углом отклонения от вертикали)  $\beta$  и с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При упругом столкновении со стенкой абсолютная величина скорости маятника не изменяется, а направление движения меняется на противоположное. Это означает, что период колебаний маятника  $T$  в присутствии стенки не равен  $T_0$ , а меньше этой величины на время  $\tau$ , за которое маятник, совершая свободные колебания, отклонился бы от вертикали вправо от угла  $\alpha$  до угла  $\beta$  и вернулся обратно.

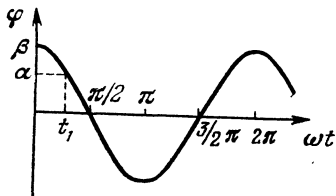


Рис. 143.

Запишем уравнение гармонических колебаний для углового перемещения  $\varphi$ :

$$\varphi = \beta \cos \omega t,$$

где  $\omega = 2\pi/T_0$ . График зависимости  $\varphi(\omega t)$  показан на рис. 143.

В момент времени  $t = 0$   $\varphi = \beta$ , то есть маятник находится в крайнем правом положении. Через некоторое время  $t_1$  угол отклонения маятника от вертикали станет равным  $\alpha$ . Из уравнения  $\alpha = \beta \cos \omega t_1$  получаем

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Из симметрии очевидно, что

$$\tau = 2t_1 = \frac{2}{\omega} \arccos \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T_0}{\pi} \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда окончательно

$$T = T_0 - \tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left( \pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

143. В положении устойчивого равновесия молекула располагается вдоль поля (рис. 144). Если ее вывести из этого состояния, то возникает вращательный момент, поворачивающий молекулу вокруг ее центра тяжести. Этот момент создают силы  $F$  и  $-F$ , действующие на заряды в электрическом поле.

Если рассматривать заряды каждый в отдельности, то можно сказать, что электрические силы для них играют такую же роль как сила тяжести для математического маятника. Поэтому заряды колеблются подобно математическим маятникам длиной  $l/2$ .

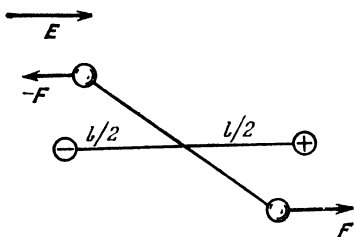


Рис. 144.

Воспользуемся этой аналогией и запишем период колебаний молекулы так:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g'}} ,$$

где  $g'$  — ускорение, которое электрическое поле сообщает каждому заряду. Так как  $g' = F/m$ , а  $F = eE$ , то  $g' = eE/m$ . Поэтому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{2eE}} \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

144. Обозначим  $k$  жесткость пружинок модели молекулы, массы шариков — атомов кислорода  $M$  и массу шарика — атома углерода  $m$  ( $m/M = 12/16$ ).

Совершая колебания типа  $a$ , оба атома кислорода колеблются синхронно относительно неподвижного атома углерода. Это связано с тем, что в силу симметрии колебаний атомов кислорода на атом углерода в любой момент действуют с обеих сторон равные по абсолютной величине и противоположно направленные силы, которые «уравновешивают» друг друга. Поэтому в случае  $a$  атомы кислорода совершают свободные колебания, частота которых равна

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{M}} .$$



При колебаниях типа *б* на атом углерода действуют равные по абсолютной величине силы, направленные в одну и ту же сторону. Если шарик — атом углерода разбить на две равные части, то ясно, что они будут колебаться как одно целое: на них всегда действуют равные силы, и, следовательно, шарики-половинки в любой момент будут иметь одинаковые ускорения, скорости и координаты. Частота колебаний молекулы  $\text{CO}_2$  равна частоте колебаний системы, состоящей из атома кислорода и половины атома углерода. Таким образом, задача сводится к определению частоты колебаний соединенных пружиной шариков массы  $M$  и  $\frac{1}{2}m$ . Такие шарики колеблются около неподвижного центра масс системы. Если длина пружинки в нерастянутом состоянии равна  $l$ , то центр масс системы находится на расстоянии  $\frac{m}{m+2M}l$  от шарика массы  $M$ . Поэтому можно считать, что шарик массы  $M$  (атом кислорода) колеблется относительно центра масс на пружинке длины

$$l_1 = l \frac{m}{m+2M}.$$

Жесткость части пружинки больше жесткости целой пружинки. Так как жесткость обратно пропорциональна отношению длины этой части к длине целой пружины, то жесткость части пружинки

$$k_1 = k \frac{l}{l_1} = k \frac{m+2M}{m}.$$

Частота колебаний шарика массы  $M$  на пружинке жесткости  $k_1$  равна

$$\omega_б = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{k(m+2M)}{mM}},$$

а отношение частот

$$\frac{\omega_a}{\omega_б} = \sqrt{\frac{m}{m+2M}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

**145.** Автомобиль на рессорах представляет собой сложную колебательную систему. Он может совершать вертикальные колебания, крутильные колебания вокруг оси, параллельной дороге и крутильные колебания вокруг оси, идущей поперек дороги. Кроме того, благодаря упругости шин он может совершать различные колебания в горизонтальной плоскости. Эти колебания определяют устойчивость автомобиля при его прямолинейном дви-

жении и, как говорят, легкость управления автомобилем. Для разрушения дороги наиболее существенны вертикальные колебания автомобиля и крутильные колебания в вертикальной плоскости. Для вертикальных колебаний системы автомобиль — колеса можно воспользоваться результатом, полученным в решении предыдущей задачи. Обозначим  $m$  — массу колес,  $M$  — массу кузова и  $k$  — жесткость рессор. Будем считать, что шины очень жесткие. Тогда собственная частота колебаний системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}.$$

Аналогичную формулу можно получить и для крутильных колебаний. Точный вид этой формулы нам в данном случае несуществен. Важно только то, что частота колебаний убывает при увеличении массы кузова. При  $m \ll M$  частота  $\omega$  стремится к  $\sqrt{k/m}$  — собственной частоте колебаний груза массы  $m$  на пружине жесткости  $k$ .

Если на дороге имеется ухаб, то при определенной скорости автомобиля колесо подпрыгнет. Через время, равное половине периода колебаний системы, оно ударится о землю, вызывая разрушение дороги. При ударе колесо движется под некоторым углом к дороге. Такой удар вызывает небольшое перемещение материала дороги вперед и образование нового ухаба. Когда по дороге пройдет много машин, дорога станет гофрированной подобно стиральной доске. Расстояние между ухабами определяется скоростью автомобиля и частотой колебаний:

$$l \sim \frac{1}{2} vT = \frac{\pi v}{\omega}.$$

При одной и той же скорости автомобиля это расстояние тем больше, тем меньше  $\omega$ , и, следовательно, чем больше масса кузова. Поэтому в нашем случае автомобили шли слева направо.

Такие «стиральные доски» на дорогах часто возникают у перекрестков, на которых стоят светофоры. Связано это с тем, что при резком торможении автомобиля передняя часть кузова наклоняется. Это становится причиной возникновения колебаний даже на идеально гладкой дороге.

Отметим, что амплитуды колебаний колес и кузова относятся как их расстояния до центра масс системы:

$$\frac{a_{\text{кол}}}{a_{\text{куз}}} = \frac{M}{m}.$$

При  $M \gg m$  пассажир может вообще не ощутить колебаний колес.

Интересно, что существует критическая скорость для каждой дороги, при которой может начаться ее разрушение автомобилями. Это та скорость, при которой начинаются подскоки колес.

146. Обозначим  $A$  амплитуду колебаний мембраны и  $\omega = 2\pi\nu$  — ее циклическую частоту. Тогда зависимость координаты  $x$  мембраны от времени  $t$  можно представить в виде (ось  $X$  направлена вертикально вверх)  $x = A \sin \omega t$ . Скорость  $v$  мембраны и ее ускорение  $a$  в момент времени  $t$  равны

$$v = A\omega \cos \omega t, \quad a = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

На песчинку массой  $m$  действует сила тяжести  $mg$  и сила  $N$  реакции мембраны. Запишем уравнение ее движения

$$N - mg = ma$$

В момент отрыва песчинки от мембраны  $N = 0$  и, следовательно,  $a = -g$ . Это означает, что песчинка отрывается от мембраны в тот момент  $t_0$ , в который  $-A\omega^2 \sin \omega t_0 = -g$ , или  $\sin \omega t_0 = \frac{g}{A\omega^2}$ . Скорость  $v_0$  мембраны и песчинки в этот момент времени, а также их координата, равны

$$v_0 = A\omega \cos \omega t_0, \quad x_0 = A \sin \omega t_0 = \frac{g}{\omega^2}.$$

В дальнейшем песчинка движется в поле тяжести, поднимаясь на высоту  $\Delta x$ , и можно воспользоваться законом сохранения энергии

$$mg \Delta x = \frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Так как  $h = x_0 + \Delta x$ , то

$$h = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t_0}{2g}.$$

Отсюда найдем  $A$ :

$$A = \sqrt{\frac{2gh\omega^2 - g^2}{\omega^2}} \approx 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,077 \text{ мм}.$$

147. В горизонтальном направлении на доску действуют только силы сухого трения со стороны вращающихся цилиндров,

Каждая сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости доски, и пропорциональна силе нормальной реакции (а значит, и реакции опоры). Если доска находится в равновесии, то силы трения равны по модулю. Следовательно, равны и силы нормальной реакции каждого из цилиндров. Это означает, что центр тяжести доски при равновесии находится между цилиндрами на одинаковом расстоянии от каждого из них.

Пусть теперь доска смещена от своего положения равновесия на расстояние  $x < l/2$ , например, вправо (рис. 145). В этом положении силы нормального давления  $N_1$  и  $N_2$  уже не будут равны друг другу, а потому не будут компенсировать друг друга и силы сухого трения  $F_1$  и  $F_2$ . Равнодействующая  $F$  сил  $F_1$  и  $F_2$  сообщи́т доске горизонтальное ускорение. Найдем его, вычислив предварительно  $N_1$  и  $N_2$  из условия отсутствия вертикального ускорения:

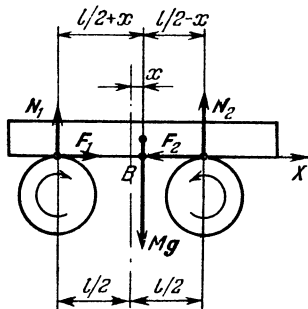


Рис. 145.

$$N_1 + N_2 - Mg = 0,$$

и условия равенства нулю момента внешних сил относительно оси, проходящей через точку  $B$ :

$$N_2 \left( \frac{1}{2}l - x \right) - N_1 \left( \frac{1}{2}l + x \right) = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = Mg \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right), \quad N_2 = Mg \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right).$$

Следовательно, сумма проекций сил  $F_1$  и  $F_2$  на ось  $X$ , направленную вправо, равна

$$F = F_1 - F_2 = \mu (N_1 - N_2) = -\frac{2\mu Mg}{l}x.$$

Мы видим, что  $F$  пропорциональна по модулю смещению  $x$  доски от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению, то есть к положению равновесия. Таким образом, эта сила является «возвращающей» силой, аналогичной той, которая возникает при колебаниях маятника. Следовательно, доска совершает гармонические колебания.

Период колебаний можно найти, записав уравнение движения доски. Для проекций на ось  $X$

$$Ma = -\frac{2\mu Mg}{l}x, \text{ или } a = -\frac{2\mu g}{l}x.$$

Модуль коэффициента пропорциональности между смещением и ускорением представляет собой квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{2\mu g}{l}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2\mu g}}.$$

При изменении направления вращения цилиндров на противоположное результирующая горизонтальная сила также изменит свое направление. При смещении доски эта сила уже не будет возвращать ее к положению равновесия, а, наоборот, будет уводить тем дальше, чем больше было первоначальное смещение. В результате доска соскочит с цилиндров.

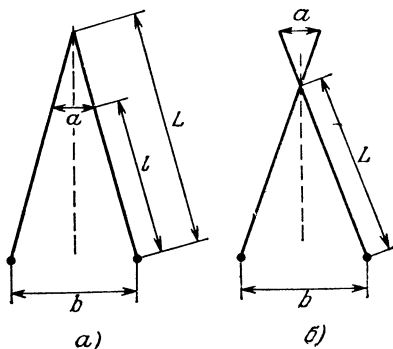


Рис. 146.

148. Рассмотрим математический маятник, частота малых колебаний которого равна  $\omega$ . Длина  $L$  такого маятника такова, что  $\omega = \sqrt{g/L}$ , так что  $L = g/\omega^2$ .

При малых колебаниях можно считать, что все точки маятника движутся по горизонтальным прямым. Амплитуду  $b$  колебаний маятника можно сделать такой, чтобы амплитуда колебаний точки  $A$ , находящейся на расстоянии  $l$  от груза маятника (рис. 146), была равна  $a$ .

Колебания маятника, очевидно, не изменятся, если мы сделаем точкой подвеса маятника точку  $A$  и будем поддерживать ее колебания такими, чтобы ее смещения остались прежними в каждый момент времени.

Если  $l \leq L$  (или  $l \leq g/\omega^2$ ), то, как видно из рис. 133, а,

$$\frac{b}{a} = \frac{L}{L-l}.$$

откуда

$$b = a \frac{g/l}{g/l - \omega^2} = a \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (1)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

Фаза колебаний в этом случае совпадает с фазой колебаний точки подвеса.

Условие  $l < g/\omega^2$  означает, что  $\omega < \sqrt{g/l}$ . Но  $\sqrt{g/l}$  равен частоте  $\omega_0$  свободных колебаний маятника. Следовательно, наше условие означает, что  $\omega < \omega_0$ . Если маятник совершает вынужденные колебания с частотой  $\omega$ , меньшей частоты  $\omega_0$  собственных колебаний, то фаза колебаний маятника совпадает с фазой вынуждающей внешней силы.

Если  $\omega > \omega_0$ , то  $\sqrt{g/l} > \sqrt{g/L}$  и  $l > L$  (рис. 133, б). В этом случае  $\frac{b}{a} = \frac{L}{a-L}$  и  $b = a \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$ . Фаза колебаний в этом случае противоположна фазе вынуждающей силы.

При  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда колебаний становится большой (резонанс) и наши рассуждения несправедливы.

Решение этой задачи помогает понять, почему максимумы приливов наступают вовсе не в те моменты, когда Луна нахо-



Луна 

Рис. 147.

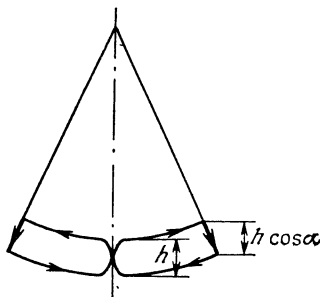


Рис. 148.

дится в зените или в надире (с противоположной стороны Земли). В большинстве районов земного шара приливы отстают от видимого движения Луны на  $\pi/2$  (на  $1/4$  суток по времени). Остановимся на этом подробнее. Забудем для начала о движении Луны вокруг Земли и будем для простоты считать, что Земля — это твердый шар, покрытый океаном (рис. 147). Поле тяготения Луны неоднородно и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Луны. Поэтому ускорение, которое сообщается в таком поле всей Земле (центру масс Земли), несколько

ко меньше ускорения, сообщаемого частицам океана, находящимся непосредственно под Луной (наиболее близким к Луне), и несколько больше ускорения, сообщаемого частицам океана на противоположной стороне Земли. По этой причине сферическая равновесная форма поверхности океана невозможна. На частицы океана должны действовать еще какие-то силы, которые, складываясь с силой тяготения Луны, сообщали бы частицам океана ускорения, такие же, как ускорение центра масс Земли. Такие силы могут возникнуть только при отклонении формы поверхности океана от сферической, причем выпуклости должны находиться непосредственно под Луной и с обратной стороны Земли. Высоту приливов, как уже говорилось в решении задачи 41, можно найти из условия, что поверхность океана эквипотенциальна, иными словами, потенциальная энергия всех частиц поверхности океана одинакова. Расчет, аналогичный приведенному в задаче 41, дает для высоты  $h$  прилива:

$$h \approx \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \frac{R_{\text{З}}}{l}$$

( $M_{\text{Л}}$  — масса Луны,  $M_{\text{З}}$  — масса Земли,  $R_{\text{З}}$  — радиус Земли,  $l$  — расстояния между центрами Земли и Луны).

Такая теория приливов была разработана еще Ньютоном, который впервые правильно объяснил, почему бывает два прилива. Ее называют статической теорией, так как она не учитывает движение Луны и вызванное им движение приливных горбов — приливных волн. Круговое движение аналогично движению колесательному. Поэтому можно сказать, что приливы совершают вынужденные колебания, обегая Землю. Это движение должно происходить так же, как вынужденные колебания математического маятника, которые мы только что рассмотрели.

При решении задачи 34 мы нашли, что свободная приливно-волна обегала бы Земной шар за 50 часов. Так как приливных горбов два, то собственный период приливов был бы равен 25 часам. Период же видимого обращения Луны вокруг Земли составляет 25 часов и, следовательно, период вынуждающей силы для приливных колебаний равен 12,5 часам. Период приливообразующей силы меньше собственных колебаний приливов, а частота приливообразующей силы больше частоты приливных колебаний. Поэтому фазы движения Луны и приливов при вынужденном движении приливных волн противоположны (см. рис. 147). Это соответствует картине приливов в большинстве районов земного шара.

149. Когда мы поднимаем маятник, мы совершаем работу и увеличиваем его потенциальную энергию. Когда маятник опу-

скается, сила тяжести совершает работу и потенциальная энергия маятника уменьшается. Но все дело в том, что в систему поступает энергии больше, чем расходуется. Действительно, поднимая за нить маятник на высоту  $h$  и тем самым укорачивая на  $h$  длину нити (рис. 148), мы совершаем работу

$$A_1 = F_1 h = \left( mg + \frac{mv^2}{R} \right) h$$

(поскольку равнодействующая сил  $F_1$  и  $mg$  сообщает маятнику центростремительное ускорение, то  $F_1 - mg = \frac{mv^2}{R}$ ). Когда же в точке максимального отклонения от положения равновесия мы даем возможность маятнику опуститься, то есть увеличиваем до первоначального значения длину нити, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh \cos \alpha,$$

так как перемещение маятника по вертикали равно  $h \cos \alpha$ .

Таким образом, в систему поступает энергия

$$E = A_1 - A_2.$$

Она больше нуля, поэтому амплитуда колебаний будет увеличиваться (конечно, если поступающая энергия превышает работу сил сопротивления).

Нетрудно понять, почему качели раскачиваются, если присесть всякий раз, когда качели максимально отклонены, и вставать при прохождении положения равновесия. И в этом случае как бы меняется длина нити маятника (если длиной нити считать расстояние от точки подвеса до положения центра тяжести человека), а роль силы натяжения нити выполняет сила реакции со стороны ног —  $N$ . В положении равновесия  $N = mg + \frac{mv^2}{R}$  и

$$A_1 = \left( mg + \frac{mv^2}{R} \right) h,$$

где  $h$  — высота подъема центра тяжести. Когда качели максимально отклонены и человек приседает, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh \cos \alpha.$$

За период система получает энергию

$$E = 2(A_1 - A_2) = 2h \left[ \frac{mv^2}{2} + mg(1 - \cos \alpha) \right].$$

Эта величина положительна, поэтому энергия и, следовательно, амплитуда колебаний будут увеличиваться.

Оба примера показывают, как можно увеличить энергию колебаний периодическим изменением параметров системы



с частотой, вдвое большей частоты колебаний. Такое возбуждение колебаний называется параметрическим, а резонанс изменений параметров с частотой колебаний называется параметрическим резонансом.

Красивое использование параметрического резонанса в космической технике предложили советские ученые В. Белецкий и М. Гиверц.

Представим себе космический корабль, который состоит из двух раздвижных половинок, так что при необходимости корабль принимает форму гантели. Если корабль движется по эллиптической орбите вокруг планеты (звезды) массы  $M$ , то потенциальная энергия корабля со сдвинутыми половинками на расстоянии  $R$  от центра планеты равна  $-\gamma \frac{Mm}{R}$ , где  $m$  — мас-

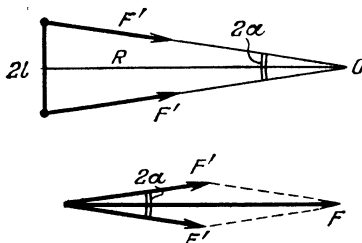


Рис. 149.

са корабля. Раздвинем половинки корабля на расстояние  $2l$  так, чтобы гантелька была перпендикулярна к плоскости орбиты (рис. 149). При расстоянии от центра  $O$  планеты до центра масс корабля, равном  $R$ , расстояние до частей корабля равно  $R/\cos \alpha$ , где  $\alpha \approx \text{tg } \alpha = l/R$  (этот угол конечно мал, так как  $l \ll R$ ),

Следовательно, силы, действующие на половинки корабля, равны  $F' = \frac{1}{2} \gamma \frac{Mm}{R^2} \cos^2 \alpha$ , а их равнодействующая  $F = 2F' \cos \alpha = \gamma \frac{Mm}{R^2} \cos^3 \alpha$ . Эта сила в  $\cos^3 \alpha$  раз отличается от силы, действующей на корабль со сдвинутыми половинками. Если гантельку перемещать из одной точки в другую, оставляя угол  $\alpha$  неизменным, то работа и, следовательно, изменение потенциальной энергии корабля будет отличаться в  $\cos^3 \alpha$  раз от работы и изменения потенциальной энергии корабля со сдвинутыми частями. Это означает, что потенциальная энергия корабля-гантельки равна  $-\gamma \frac{Mm}{R} \cos^3 \alpha$ . Потенциальная энергия изменилась так, как если бы мы ничего не делали с кораблем, а изменили поле тяготения, заменив постоянную всемирного тяготения  $\gamma$  на  $\gamma \cos^3 \alpha$ .

А теперь будем каждый раз в перигее раздвигать половинки корабля, а в апогее сдвигать их. Будем еще с помощью специального устройства следить за тем, чтобы в полете от апогея к перигею угол  $\alpha$  оставался постоянным — это упростит наши рас-

четы. Рассмотрим, что будет происходить с орбитой нашего корабля. Пусть корабль-гантилька движется от перигея к апогею. Обозначим  $v_1$  его скорость в перигее,  $u_1$  — скорость в апогее,  $r_1$  — расстояние до центра планеты в перигее и  $R_1$  — это расстояние в апогее. Согласно закону сохранения энергии

$$-\gamma \frac{Mm}{r_1} \cos^3 \alpha + \frac{mv_1^2}{2} = -\gamma \frac{Mm}{R_1} \cos^3 \alpha + \frac{mu_1^2}{2}. \quad (1)$$

Кроме того, как известно, секториальная скорость корабля остается постоянной. Обозначим ее  $S$ . Тогда (см. задачу 42)

$$S = v_1 r_1 = u_1 R_1.$$

Отсюда  $r_1 = S/v_1$  и  $R_1 = S/u_1$ . Подставим эти выражения для  $r_1$  и  $R_1$  в равенство (1). Сократив на  $m$ , мы получим

$$v_1^2 - u_1^2 = \frac{2\gamma M}{S} \cos^3 \alpha (v_1 - u_1)$$

или

$$v_1 + u_1 = \frac{2\gamma M}{S} \cos^3 \alpha. \quad (2)$$

Долетев до апогея, сдвинем обе половинки (переключим гравитационное поле). Проведя расчет, аналогичный тому, который мы сделали только что для первой половины траектории, найдем

$$u_1 + v_2 = \frac{2\gamma M}{S}, \quad (3)$$

где  $v_2$  — новая скорость в перигее. Теперь вычтем из равенства (3) равенство (2). Получим

$$v_2 - v_1 = \frac{2\gamma M}{S} (1 - \cos^3 \alpha). \quad (4)$$

В результате наших операций скорость в перигее увеличилась:  $v_2 > v_1$ . А расстояние? Так как  $r_1 = S/v_1$ , а  $r_2 = S/v_2 = r_1 v_1/v_2$ , то расстояние в перигее уменьшилось. Обозначив величину  $\frac{2\gamma M}{S}$  буквой  $a$ , получим

$$v_2 = v_1 + a (1 - \cos^3 \alpha), \quad r_2 = r_1 \frac{v_1}{v_2} = r_1 \frac{v_1}{v_1 + a (1 - \cos^3 \alpha)}.$$

Вновь раздвинем половинки корабля и полетим от перигея к апогею. В апогее корабль будет иметь скорость  $u_2$  такую, что (см. (2))

$$v_2 + u_2 = a \cos^3 \alpha. \quad (5)$$

Вычитая из (5) равенство (2), получим

$$(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1) = 0,$$

откуда

$$u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = a (\cos^3 \alpha - 1)$$

Итак, скорость в апогее через период уменьшилась. А расстояние? Оно, очевидно, увеличилось:

$$R_2 = R_1 \frac{u_1}{u_2} = R_1 \frac{u_1}{u_1 + a (\cos^3 \alpha - 1)} > R_1.$$

Нетрудно заметить, что каждый оборот увеличивает скорость в перигее и уменьшает скорость в апогее на одну и ту же величину  $a(1 - \cos^3 \alpha)$ . Следовательно, после  $n$  периодов обращения корабля вокруг планеты его скорости в перигее и апогее будут

$$v_n = v_1 + na (1 - \cos^3 \alpha), \quad u_n = u_1 - na (1 - \cos^3 \alpha),$$

а расстояния

$$r_n = r_1 \frac{v_1}{v_1 + na (1 - \cos^3 \alpha)}, \quad R_n = R_1 \frac{u_n}{u_1 - na (1 - \cos^3 \alpha)}.$$

При  $n \rightarrow u_1/a(1 - \cos^3 \alpha)$  величина  $R_n$  стремится к  $\infty$ , то есть корабль уйдет от планеты. Так, изменяя периодически параметры корабля, можно растягивать его орбиту и вообще улететь от планеты в космическое пространство. Правда, времени для этого потребуется немало, так как величина  $u_1/a(1 - \cos^3 \alpha)$  велика. Зато проект корабля совсем не плох, если нужно покинуть поле тяготения сверхплотной очень тяжелой звезды. В этом случае  $a$  велико и  $n$  сравнительно мало.

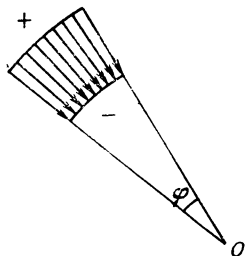


Рис. 150.

150. Для того чтобы можно было изучить движение ионов, необходимо прежде всего выяснить, какая сила действует на ион в электростатическом поле

цилиндрического конденсатора, то есть выяснить, какова напряженность поля в таком конденсаторе.

Напряженность поля пропорциональна плотности силовых линий. Если через дугу с единичным углом проходит  $n$  силовых линий, то через дугу с углом  $\varphi$  проходит  $N = n\varphi$  силовых линий. Плотность силовых линий, пересекающих дугу радиуса  $r$ , равна отношению  $N$  к длине  $r\varphi$  дуги, то есть равна  $n/r$  (рис. 150).

Следовательно, напряженность поля конденсатора пропорциональна  $r^{-1}$ :

$$E = \frac{b}{r}.$$

В таком поле на заряд  $q$ , находящийся на расстоянии  $r$  от оси конденсатора, действует сила

$$F = \frac{bq}{r}.$$

Эта сила сообщает заряду ускорение  $a$ , равное по модулю

$$a = \frac{bq}{rm},$$

где  $m$  — масса заряда.

Обозначим  $x$  отклонение иона от основной траектории радиуса  $r_0$ . Тогда  $r = r_0 + x$ , и

$$a = \frac{bq}{m(r_0 + x)}.$$

Рассмотрим движение этого иона в системе отсчета, вращающейся вокруг оси конденсатора. В этой системе ускорение уже не равно  $a$ , так как все точки системы тоже движутся с некоторым ускорением относительно неподвижной системы отсчета, связанной с осью конденсатора. Точка, находящаяся на расстоянии  $r_0 + x$  от оси, движется с центростремительным ускорением  $a_{ц} = \omega^2(r_0 + x)$ . Следовательно, во вращающейся системе отсчета ускорение иона равно

$$a_{отн} = a - a_{ц} = \frac{bq}{m(r_0 + x)} - \omega^2(r_0 + x).$$

Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$m(r_0 + x)^2\omega = mr_0^2\omega_0,$$

где  $\omega_0$  — угловая скорость иона в точке  $A$ . Она же равна и угловой скорости иона, движущегося по основной траектории. Но центростремительное ускорение  $a_0 = \omega_0^2 r_0$  иону, движущемуся по основной траектории радиуса  $r_0$ , сообщает сила  $F$ , равная по модулю  $bq/r_0$ , то есть  $\omega_0^2 r_0 = bq/mr_0$  и

$$\omega_0^2 = \frac{bq}{mr_0^2}.$$

Таким образом,

$$a_{отн} = \frac{bq}{m(r_0 + x)} - \frac{bq}{mr_0^2}(r_0 + x) = \frac{bq(-2r_0x - x^2)}{m(r_0 + x)r_0^2}.$$

При  $x \ll r_0$

$$a_{отн} = -2 \frac{bq}{mr_0^2} x.$$

Мы видим, что  $a_{\text{отн}} = -kx$ , где  $k = 2bq/r_0^2$ . Как известно, при такой зависимости ускорения тела от смещения тело совершает гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi/\sqrt{k}$ . Следовательно, ионы пучка, скорость которых в точке  $A$  составляет малый угол  $\alpha$  со скоростью ионов, движущихся по основной траектории, будут совершать относительно основной траектории радиальные гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mr_0^2}{2bq}}.$$

Этот период одинаков для всех ионов. Значит, после того как ионы попадают в конденсатор в точке  $A$  через времена  $t_n = n \frac{T}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), все ионы будут оказываться в одной и

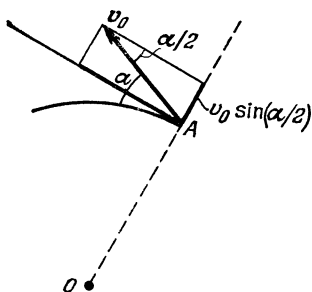


Рис. 151.

той же точке основной траектории — будут фокусироваться. Нетрудно найти угол  $\varphi$  между двумя последовательными фокусами:

$$\varphi = \omega_0 \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, если  $\widehat{AOB} = \pi/\sqrt{2}$ , то ионы будут фокусироваться в точке  $B$ .

Найдем теперь максимальную ширину пучка. Для этого воспользуемся тем, что максимальное абсолютное значение скорости тела, совершающего гармонические колебания, и амплитуда  $x_{\text{max}}$  его колебаний связаны соотношением

$$v_{\text{max}} = x_{\text{max}}\Omega,$$

где  $\Omega = 2\pi/T$  — частота колебаний. В нашем случае  $v_{\text{max}}$  равно значению радиальной проекции скорости в точке  $A$  (рис. 151):

$$v_{\text{max}} = v \frac{\alpha}{2}$$

(так как  $\alpha$  мал,  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ ). Поэтому

$$\frac{1}{2} \omega r_0 \alpha = x_{\text{max}} \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

Следовательно, максимальная ширина  $d$  пучка равна

$$d = 2x_{\text{max}} = \frac{\omega r_0 \alpha T}{2\pi} = \frac{r_0 \alpha}{\sqrt{2}}.$$

151. При закрывании рукой звучащего камертона излучаемый им звук модулировался. В результате излучаемая звуковая волна  $A \cos \omega t$  превращалась в волну, описываемую формулой

$$A = A_0 \cos \omega t (1 + B \cos \Omega t), \quad (1)$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  — частота не модулированной волны и  $\Omega$  — частота модуляции. Преобразуя (1), можно записать

$$A = A_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} A \cdot B \cos [(\omega - \Omega) t] + \frac{1}{2} A \cdot B \cos [(\omega + \Omega) t].$$

Следовательно, модулированная волна представляет собой сумму трех волн с частотами  $\omega$ ,  $\omega - \Omega$  и  $\omega + \Omega$ . Одна из частот  $\omega - \Omega$  или  $\omega + \Omega$  совпадала с частотой колебаний второго камертона. В результате он возбуждался.

152. Для передачи изображения необходимо прежде всего преобразовать его в электрический сигнал. Это происходит в передающей телевизионной трубке. Кадр изображения проецируется на светочувствительный мозаичный экран. Каждая из ячеек экрана заряжается, причем тем больше, чем больше ее освещенность. Так получается электрическое изображение передаваемого объекта. Затем электронный луч последовательно обегает различные участки этого изображения, двигаясь слева направо (вдоль строки) и сверху вниз (по строкам); электрическое изображение преобразуется в электрический сигнал.

Предположим, мы хотим передать картинку, показанную на рис. 152. Яркость картинки по горизонтали меняется по синусоидальному закону. Пусть число максимумов яркости равно  $m$ ,

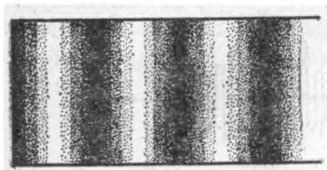


Рис. 152.

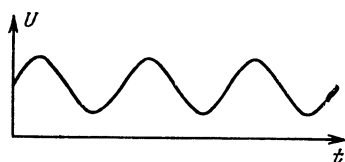


Рис. 153.

число строк, на которое разбивается картина, равно  $n$ , а частота смены кадров  $\nu_k$ . Электрический сигнал, содержащий информацию о картине, имеет форму, показанную на рис. 153.

За время передачи одной строки сигнал имеет  $m$  максимумов, за время передачи одного кадра —  $nm$  максимумов, а за 1 секунду —  $nm\nu_k$  максимумов. Значит, циклическая частота сигнала равна

$$\Omega = 2\pi\nu = 2\pi nm\nu_k.$$

Следовательно, частота сигнала  $\Omega$  пропорциональна частоте смены кадров

$$\Omega \sim \nu_k.$$

Величина сигнала меняется со временем по синусоидальному закону, который можно записать так:

$$U = U_0 + U_1 \sin \Omega t = U_0 (1 + k \sin \Omega t),$$

где  $k = U_1/U_0$ .

Для того чтобы передать этот низкочастотный сигнал на большие расстояния, им модулируют сигнал высокой частоты  $\omega$  ( $\omega \gg \Omega$ ), величина которого меняется по закону

$$U = U_0 \sin \omega t.$$

В результате модуляции амплитуда высокочастотного сигнала уже не постоянна, а меняется со временем так же, как модулирующий низкочастотный сигнал (рис. 154). Таким образом,

$$U_M = U_0 (1 + k \sin \Omega t) \sin \omega t$$

( $U_M$  — величина амплитудно-модулированного сигнала).

После несложных тригонометрических преобразований получим

$$U_M = U_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} k U_0 \sin [(\omega + \Omega) t] + \frac{1}{2} k U_0 \sin [(\omega - \Omega) t].$$

Это означает, что в нашем случае амплитудно-модулированный сигнал представляет собой сумму трех синусоидальных сигналов

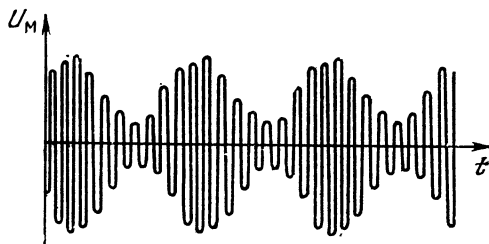


Рис. 154.

с частотами  $\omega$ ,  $\omega + \Omega$  и  $\omega - \Omega$ . Если же кадр является более сложным, то он передается в интервале частот шириной  $2\Omega$ . Чем больше частота смены кадров, тем шире указанный интервал частот. Телевизионный приемник, следовательно, должен принимать сигналы в некотором диапазоне частот.

Но наряду с сигналом, несущим данную информацию, в «эфире» всегда существуют всевозможные случайные сигналы, назы-

ваемые шумами. Шумы имеют различные частоты и можно считать, что в каждом интервале частот их энергия примерно одинакова. Чем шире полоса частот, воспринимаемая приемником, тем сильнее шумы или, как говорят, выше уровень шумов. Если основной сигнал слаб, он может забиваться шумами, и мы не сможем его распознать.

На Земле передающие станции обладают достаточной мощностью, и уровень сигнала намного выше уровня шумов. Поэтому частота  $\nu_k$ , а значит, и частота смены кадров, может быть достаточно большой (что, действительно, необходимо для осуществления нормального зрительного восприятия телепередачи).

Иное дело в космосе. Мощности передатчиков на космических кораблях малы, уровень основного сигнала низок. Увеличивая же время передачи одного кадра, то есть сужая полосу частот, можно существенно уменьшить уровень шумов, что поможет выделить сигнал, несущий информацию.

153. Грубо можно представить, что в электрическом поле электронные орбиты смещаются на некоторое расстояние  $\Delta x$  от ядра и происходит поляризация атомов диэлектрика. Представим себе некоторый объем диэлектрика. Смещение электрических зарядов на величину  $\Delta x$  (рис. 155) приводит к появлению на торцах этого объема зарядов  $q$  и  $-q$ , где

$$q = 2eN\Delta x S$$

( $2e$  — заряд ядра,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $N$  — число атомов гелия в единице объема и  $S$  — площадь торца диэлектрика).  $N$  легко найти, зная молярную массу гелия  $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль и плотность гелия  $\rho$ :

$$N = \frac{\rho}{\mu} N_A \approx 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$$

( $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$  — число Авогадро). Внутри же объема заряд остается скомпенсированным. Следовательно, ослабление поля в диэлектрике в  $\epsilon$  раз связано как раз с полем, созданным зарядами  $+q$  и  $-q$ , причем напряженность  $E$  поля в диэлектрике равна

$$E = E_0 - \Delta E,$$

где  $E_0$  — внешнее поле и  $\Delta E$  — поле зарядов на торцах. Его можно рассматривать как поле плоского конденсатора, так что

$$\Delta E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{2eN\Delta x}{\epsilon_0}.$$

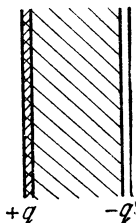


Рис. 155.



Кроме того, как известно,  $E = \frac{E_0}{\epsilon}$ , так что  $E_0 = \epsilon E$ . Поэтому

$$E = \epsilon E - \frac{2eN\Delta x}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Нам осталось найти  $\Delta x$ .

На электрон в электрическом поле с напряженностью  $E$  действует сила  $F = eE$ . Если принять модель, в которой электрон как бы «связан» с ядром пружинкой жесткости  $k$ , то удлинение  $\Delta x$  этой пружинки равно

$$\Delta x = \frac{F}{k} = \frac{eE}{k}. \quad (2)$$

Найдем теперь  $k$ . Гелий сильно поглощает излучение с длиной волны  $\lambda = 0,06$  мкм или частотой  $\omega = 2\pi c/\lambda$  ( $c$  — скорость света). Это резонансная частота колебаний электрона. Следовательно,  $\omega = \sqrt{k/m}$ , где  $m$  — масса электрона.

Поэтому можно записать

$$2\pi \frac{c}{\lambda} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Отсюда

$$k = 4\pi^2 \frac{c^2 m}{\lambda^2} \approx 9 \cdot 10^2 \text{ кг/с}^2.$$

Подставляя теперь (2) в (1) и сокращая на  $E$ , получим

$$\epsilon = 1 + \frac{2e^2 N}{k\epsilon_0} \approx 1,05.$$

154. Из каждой точки траектории пули распространяется сферическая звуковая волна. Эти волны, складываясь, дают картину, которая существенно зависит от соотношения между скоростью пули и скоростью звука. Если скорость звука больше

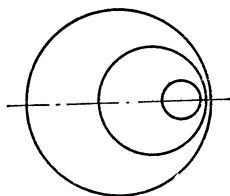


Рис. 156.

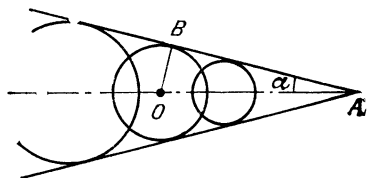


Рис. 157.

скорости пули, то волны, которые излучаются в разных точках, никогда не смогут догнать друг друга (рис. 156). Если же скорость пули больше скорости звука, то фронты волн будут пересекаться, как показано на рис. 157 и, складываясь, эти волны

будут образовывать «усы», расходящиеся от пули, аналогичные «усам», идущим от носа глиссера. Эти «усы» представляют собой огибающие фронтов сферических звуковых волн. Подобная картина представлена на фотографии. Следовательно, пуля двигалась со скоростью  $v$ , большей скорости звука  $c$ .

Угол между «усами» простым образом связан с отношением скоростей пули и звука. Так как за время  $t$  пуля пролетает расстояние  $AO = vt$  (см. рис. 157), а звук из точки  $O$  проходит расстояние  $OB = ct$ , то

$$\sin \alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}.$$

В нашем случае  $\alpha \approx 45^\circ$  и поэтому

$$v \approx 480 \text{ м/с.}$$

Картина волн, идущих от носа корабля, как мы говорили, похожа на рис. 54. Однако здесь она сложнее. Это связано с тем, что скорость распространения коротких волн (длина которых мала по сравнению с глубиной водоема) зависит от длины волны.

Для таких волн  $v \sim \sqrt{g\lambda}$ . Так как при движении корабля возбуждается целый набор волн с различными  $\lambda$ , то образуется группа волн. Групповая скорость, как мы видели при решении задачи 2, не совпадает со скоростью отдельных волн и равна  $v_r = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ . В случае волн на воде с  $v \sim \sqrt{g\lambda}$  получим

$$v_r = \frac{1}{2} v.$$

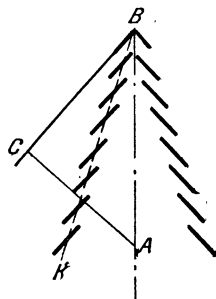


Рис. 158.

Поэтому к тому моменту, когда корабль перемещается из точки  $A$  в точку  $B$ , фронт группы волн, возбужденных в точке  $A$ , переместится не в точку  $C$ , а только на половину расстояния  $AC$ . Из-за этого за кораблем распространяется большое число волн, идущих ступеньками по линии  $BK$  (рис. 158). Сами ступеньки параллельны линии  $BC$ .

155. Из-за изменения скорости звука с глубиной звуковые лучи изгибаются, как показано на рис. 159, и перед кораблем образуется «мертвая зона», в которую звук вообще не попадает. Граница мертвой зоны — это траектория луча, идущего вначале параллельно поверхности океана. Нижний край волнового фронта шириной  $\Delta h$ , перпендикулярного к этому лучу, за время  $\Delta t$  проходит на  $\Delta c \cdot \Delta t$  меньшее расстояние, чем верхний край

(рис. 160). Благодаря этому фронт волны за время  $\Delta t$  поворачивается на малый угол  $\alpha$ , такой, что

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta c \cdot \Delta t}{\Delta h}.$$

Скорость  $\omega$  поворота волнового фронта равна

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta c}{\Delta h} = 0,04 \text{ с}^{-1}.$$

С такой же скоростью поворачивается и вектор скорости звукового фронта, который перпендикулярен к этому фронту. И так как изменение абсолютного значения скорости звука мало по

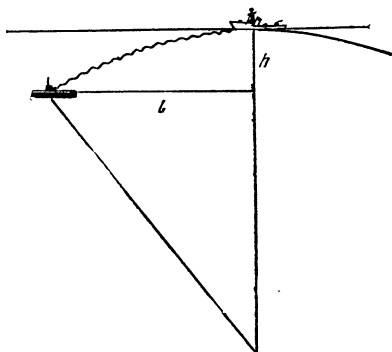


Рис. 159.

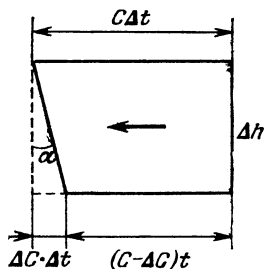


Рис. 160.

сравнению с самой скоростью, то можно считать, что фронт волны движется по окружности радиуса  $R = c/\omega = 1500/0,04 \text{ м} = 37,5 \text{ км}$ .  $R \gg h$ , поэтому можно считать, что радиус  $R$  остается постоянным вдоль всей траектории луча. В этом случае, как видно из рис. 159,

$$l = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \approx \sqrt{2Rh_0} \approx 6,1 \text{ км}.$$

На таком же расстоянии и гидроакустик на корабле сможет услышать шум лодки, так как звуковые волны, идущие от лодки, тоже загигаются и при расстояниях, больших  $l$ , не попадают на поверхность.

Эту задачу можно решать и более строго, разбив воду на тонкие слои и рассматривая последовательно изменение угла, под которым идет звуковая волна в каждом слое (рис. 161).

Так как  $\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}} = \frac{c_i}{c_{i+1}}$ , то  $\frac{\sin \alpha_i}{c_i} = \frac{\sin \alpha_{i+1}}{c_{i+1}} = \text{const} =$

$$= \frac{\sin \alpha_0}{c_0} = \frac{1}{c_0}$$
 Смещение  $\Delta x$  луча в  $i$ -м слое равно  $\Delta h \operatorname{tg} \alpha_i =$   

$$= \frac{\Delta h \sin \alpha_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_i}}$$
 Подставляя сюда  $\sin \alpha_i = \frac{c_i}{c_0} = \frac{c_0 - \omega h}{c_0}$ , по-  
 лучим

$$\Delta x = \frac{c_0 - \omega h}{\sqrt{c_0^2 - (c_0 - \omega h)^2}} \Delta h,$$

так что

$$l = \int_0^h \frac{c_0 - \omega h}{\sqrt{c_0^2 - (c_0 - \omega h)^2}} dh = \frac{1}{\omega} \sqrt{c_0^2 - (c_0 - \omega h_0)^2} \approx \sqrt{2Rh_0}.$$

В океанах имеются области, в которых скорость звука до некоторой глубины уменьшается с глубиной, а затем увеличивается. В таких областях звуковые лучи загибаются так, что звук распространяется в узкой области, в которой скорость звука минимальна. Образуется узкий звуковой канал, в которой звук низкой частоты, слабо затухающий в морской воде, может распространяться на тысячи километров.

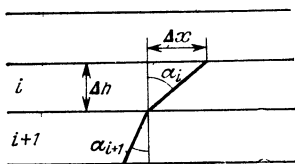


Рис. 161

Скорость звука в воздухе также зависит от высоты из-за изменения температуры и плотности воздуха, а также из-за зависимости скорости ветра от высоты. Поэтому в атмосфере возникают те же эффекты загибания звуковых волн, что и в воде. Теперь понятны и физические основы народной поговорки «не кричи против ветра». Если скорость ветра, как это обычно бывает в нижних слоях атмосферы, увеличивается с высотой, то звуковые волны, распространяясь против ветра, загибаются вверх и на некотором расстоянии от «крикуна» образуется мертвая зона, в которой звук вообще не слышен.

156. Он увидит, что на изображении закрытого глаза наклеена бумажка.

157. Под наибольшим углом к поверхности воды луч света падает в точке  $A$  струи (рис. 162). Угол падения  $\alpha$ , при котором луч в этой точке не испытывает полного внутреннего отражения, должен быть таким, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Касательная к струе в точке  $A$  составляет угол  $\gamma = 90^\circ - \alpha$  с горизонталью. Таким образом, луч света выйдет из струи, ни разу не испытав внутреннего отражения, если угол, который образует касательная к струе в точке  $A$ , составляет с горизонтом угол  $\gamma$  такой, что  $\cos \gamma = 1/n$ .

Но касательная к поверхности жидкости — это траектория движения частиц жидкости, вышедших из сосуда у верхнего края отверстия. Поэтому направление касательной к поверхности жидкости совпадает с направлением вектора скорости частиц жидкости в точке  $A$ .

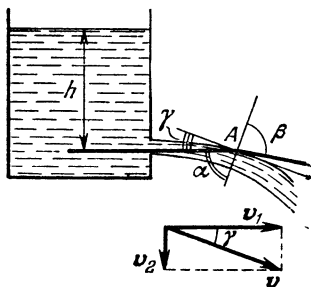


Рис. 162.

Эта скорость складывается из горизонтальной скорости  $v_1$ , которую имели частицы воды у отверстия сосуда, и из скорости  $v_2$ , приобретенной ими при свободном падении с высоты  $2r$ . Из закона сохранения энергии сле-

дует, что  $\Delta m \cdot g \cdot 2r = \frac{\Delta m v_2^2}{2}$

( $\Delta m$  — масса частицы воды), поэтому  $v_2 = \sqrt{4gr}$ . Что же касается скорости  $v_1$  вытекания жидкости из сосуда, то, как известно, она равна  $\sqrt{2gh}$ , где  $h$  — высота уровня воды над отверстием \*).

Зная  $v_1$  и  $v_2$ , нетрудно найти угол наклона касательной к поверхности жидкости в точке  $A$  к горизонту:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2 \frac{r}{h}}. \quad (2)$$

Выражая теперь  $\cos \gamma$  через  $\operatorname{tg} \gamma$  и подставляя это выражение в формулу для  $n$ , получим  $n = \sqrt{1 + 2r/h}$ , или

$$h = \frac{2r}{n^2 - 1}.$$

158. При ветре со скоростью 2—13 м/с на поверхности водоема образуется рябь, которую можно представить как множество мелких волн, разбросанных по поверхности воды абсо-

\*) Это следует также из закона сохранения энергии. Действительно, при вытекании массы воды  $\Delta m$  из сосуда с жидкостью потенциальная энергия воды уменьшается на величину  $\Delta mgh$  (можно просто считать, что масса воды  $\Delta m$  переместилась с поверхности жидкости к отверстию).

лютно неправильно и возникающих одинаково часто во всех направлениях. Крутизна склона волн при этом не превышает некоторого предельного значения  $\alpha$ , которое зависит от силы ветра и может достигать 20—30°.

Для простоты будем считать, что наблюдатель и источник света находятся на одном уровне над поверхностью воды (рис. 163).

Маленькое горизонтальное зеркальце будет отбрасывать свет в глаз наблюдателя  $O$  только в том случае, когда расстояния от него до наблюдателя и до источника одинаковы (точка  $M$ ).

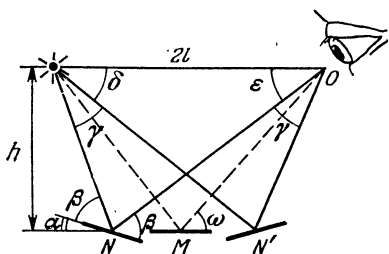


Рис. 163.

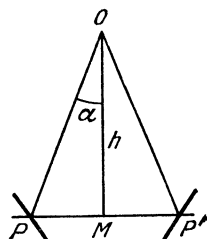


Рис. 164.

Если же зеркало наклонено под углом  $\alpha$  в сторону наблюдателя, то для того чтобы отраженный свет попадал в глаза, оно должно быть несколько сдвинуто от наблюдателя (точка  $N$ ). Зеркальце, наклоненное под углом  $\alpha$  в противоположную сторону, должно находиться в точке  $N'$ .

Наклонные положения зеркала аналогичны крайним положениям волн, при которых отраженный от них свет еще попадает в наш глаз. Расстояние между  $N$  и  $N'$  поэтому определяет длину световой дорожки. Во всех точках между  $N$  и  $N'$  найдутся участки волн, имеющие достаточный наклон для того, чтобы отражать лучи в наш глаз.

Рассмотрим теперь углы между лучами света. Из чертежа видно, что  $\beta + \alpha = \gamma + \delta$ ,  $\beta - \alpha = \epsilon = \delta$ , откуда  $\gamma = \alpha + \beta - (\beta - \alpha) = 2\alpha$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что угол, под которым мы видим большую ось светового пятна, просто равен углу между двумя наиболее крутыми склонами. Нетрудно подсчитать и линейный размер большой оси пятна  $NN'$ .

Короткая ось пятна отраженного света легко находится аналогичным способом. Если сместить зеркальце из точки  $M$  в направлении, перпендикулярном к  $NN'$ , то для того, чтобы отраженный свет попал в глаз наблюдателя, зеркальце надо повернуть на

некоторый угол вокруг оси, параллельной  $NN'$  (рис. 164). Считая, что предельный угол поворота зеркальца, по-прежнему, равен  $\alpha$ , находим, что ширина полосы света  $PP' = 2h \operatorname{tg} \alpha$  и, следовательно, короткая ось стягивает угол  $\beta = \frac{2h \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{l^2 + h^2}}$ .

Отношение двух видимых полуосей пятна будет равно  $\beta/2\alpha$  или, считая, что пятно невелико и угол  $\alpha$  мал, равно  $\sin \omega$ , где  $\omega$  — угол, под которым мы смотрим на воду.

Чем меньше этот угол, тем более вытянуто пятно. Если взгляд скользит по поверхности, то пятно света будет до бесконечности вытягиваться и суживаться.

159. Шероховатая поверхность стекла рассеивает падающий на нее свет равномерно во все стороны. Если стекло лежит на чертеже гладкой поверхностью (рис. 165, а), то в каждую точку

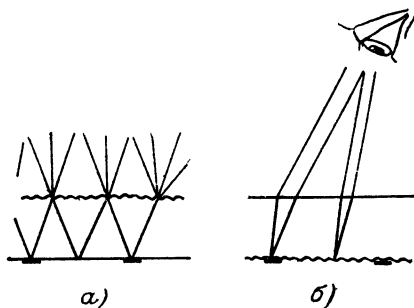


Рис. 165.

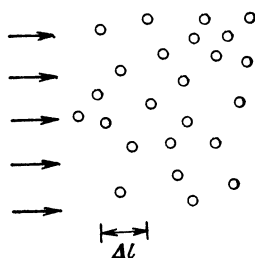


Рис. 166.

шероховатой поверхности стекла попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Световые потоки, идущие из таких разных участков чертежа, затем рассеиваются во все стороны одинаково, и от каждого участка в глаз попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Разные участки стекла поэтому кажутся одинаково яркими, и разобрать чертеж нельзя.

Если же стекло обращено к чертежу матовой поверхностью (рис. 165, б), то матовая поверхность оказывается освещенной неравномерно. Лучи, идущие из разных точек этой поверхности, попадают в глаз, не пересекаясь, и чертеж легко разобрать.

160. Рассмотрим слой воздуха с дымом на пути светового пучка (рис. 166). Выберем  $\Delta l$  настолько малым, чтобы в пределах этого слоя практически не было затенения одних частиц другими. Такой слой поглотит долю света, определяемую поперечным

сечением  $\Delta S$  всех частиц, находящихся в этом слое. В расчете на единицу поперечного сечения пучка получим

$$\Delta S = N \Delta l \pi r^2 = \frac{m}{(4/3) \pi r^3 \rho} \Delta l \pi r^2 = \frac{3m \Delta l}{4r\rho}, \quad (1)$$

где  $N$  — число частиц в единице объема,  $\rho$  — плотность расплавленного вещества.

Запишем соотношение (1) для двух рассматриваемых случаев и найдем отношение толщин слоев, в которых поглощается одинаковая доля света:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{r_1}{r_2}.$$

Аналогичные соотношения можно записать для двух, трех... слоев, в пределах которых вновь можно пренебречь взаимным затенением частиц. Если в первом случае дальность видимости связана с выбранным  $\Delta l$  соотношением  $l_1 = n \Delta l_1$ , то и во втором случае, очевидно,  $l_2 = n \Delta l_2$ . Тогда можно записать

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n \Delta l_1}{n \Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$m_2 = m_1 \frac{r_2}{r_1} \frac{l_1}{l_2} = 0,2 \text{ г/м}^3.$$

161. Рассмотрим, например, точку  $З$ . Лучи, выходящие из точки  $В$ , попасть в нее не могут (рис. 167) и она не видна. Из рисунка ясно, что видна будет только часть предмета  $АВ$ . Аналогично определяются области, которые видны из точек  $1$  и  $2$ .

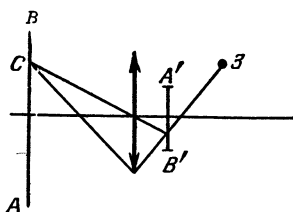


Рис. 167.

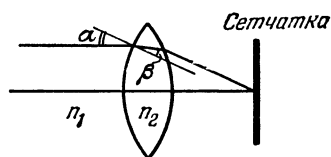


Рис. 168.

162. Нарисуем ход луча от бесконечно удаленного источника через глаз. Этот луч испытывает два преломления на двух поверхностях хрусталика (рис. 168). Согласно закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$



где  $n_1$  — абсолютный показатель преломления первой среды (воды или воздуха),  $n_2$  — абсолютный показатель преломления вещества хрусталика.

Из этой формулы видно, что при уменьшении  $n_1$  (замене воды на воздух) угол  $\beta$  уменьшается. Это означает, что после преломления на входной поверхности хрусталика в том случае, когда перед глазом воздух, лучи идут ниже, чем в том случае, когда перед глазом вода. Поэтому если в воде изображение удаленного предмета при ненапряженном глазе образуется на сетчатке, то в воздухе изображение этого предмета при ненапряженном глазе будет получаться перед сетчаткой. Следовательно, человек близорук.

163. Центр линзы лежит в точке пересечения прямых  $AA'$  и  $BB'$ , плоскость линзы проходит через точку пересечения продолжения прямых  $AB$  и  $A'B'$  (рис. 169, а, б).

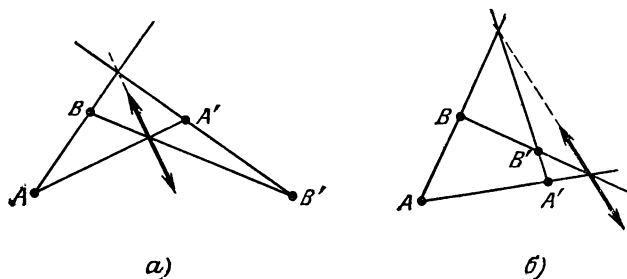


Рис. 169.

164. Остановимся на двух наиболее существенных факторах.

Во-первых, лицо человека в маске освещено гораздо хуже, чем сама маска и окружающие предметы. Поэтому свет, отраженный лицом, очень слаб по сравнению со светом, идущим от маски и других предметов. Вот почему для наблюдателя из публики лицо фехтовальщика в маске практически неразлично. Сам же спортсмен, наоборот, хорошо видит ярко освещенные предметы вокруг себя на фоне слабого света, отраженного внутренней стороной проволочной маски. К тому же изображение маски в глазу спортсмена получается сильно размытым (нефокусированным), так как маска расположена слишком близко к глазу.

Аналогично объясняется, почему днем невооруженным глазом нельзя увидеть звезд: солнечный свет, рассеянный атмосферой, гораздо сильнее света звезд.

Во-вторых, поскольку проволочная сетка находится близко от лица спортсмена, она закрывает для наблюдателя довольно

большую часть лица. В то же время спортсмену эта маска не мешает.

В заключение рассмотрим еще одну подобную задачу — почему днем с улицы ничего не видно внутри комнаты, если смотреть через окно, занавешенное сетчатой тканью? Очевидно, в этом случае тот факт, что сильно освещенная снаружи занавеска отражает много света по сравнению с предметами внутри комнаты, играет решающую роль. Если смотреть из комнаты на улицу, то яркие предметы будут хорошо видны, так как внутренняя сторона занавески освещена слабо. Однако видно будет значительно хуже, если в комнату попадают прямые солнечные лучи и стены комнаты хорошо отражают свет, — тогда и изнутри занавеска освещена хорошо. Чтобы хорошо видеть то, что происходит на улице, необходимо в этом случае подойти вплотную к окну.

Вечером, наоборот, очень хорошо видна с улицы освещенная комната и совсем не видна улица из комнаты.

165. Резкое изображение предмета, которое дает хрусталик несовершенного глаза, получается не на сетчатке глаза, а перед ней, если человек близорук, или за ней, если человек дальнозорок. В обоих случаях изображение каждой точки на сетчатке глаза получается в виде расплывчатого пятна, диаметр которого зависит от диаметра зрачка (рис. 170) и от степени близорукости

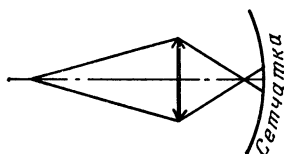


Рис. 170.

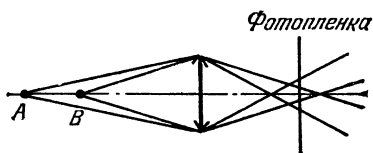


Рис. 171.

(или дальнозоркости) человека. Чем меньше диаметр зрачка, тем уже пучок лучей, создающих изображение точки, тем меньше пятно получается на сетчатке. При ярком освещении диаметр зрачка уменьшается, и изображение букв для людей, носящих не очень сильные очки, оказывается слабо размытым. Поэтому они могут читать и без очков. Для тех же, кто пользуется сильными очками, изображение букв получается далеко от сетчатки глаза, и несмотря на небольшой диаметр зрачка, изображение букв оказывается сильно размытым, так что читать текст все равно не возможно.

Аналогично объясняется увеличение глубины резкости (то есть области, которая получается резкой на фотопленке) при уменьшении диаметра отверстия объектива. Действительно, пусть

мы хотим одновременно сфотографировать две точки ( $A$  и  $B$ ), находящиеся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 171). Если аппарат сфокусирован на какой-то предмет между этими точками (объектив дает на фотопленке резкое изображение этого предмета), то изображение точек на фотопленке получается расплывчатым, но диаметр каждого из пятен — изображений точек — зависит от диаметра отверстия объектива, уменьшаясь при уменьшении этого диаметра. Допустимое размытие определяет глубину резкости — те расстояния, на которых изображения на пленке считаются резкими.

Простой расчет дает для диаметра  $d$  размытого изображения точки, смещенной на расстояние  $x$  из положения, при котором ее изображение получается резко:

$$d \approx D \frac{F}{(a - F)a} |x|.$$

где  $F$  — фокусное расстояние объектива,  $D$  — диаметр отверстия диафрагмы и  $a$  — расстояние от предмета до диафрагмированного объектива, при котором изображение резкое. Если, как обычно бывает,  $a \gg F$ , то

$$d \approx D \frac{F}{a^2} |x|.$$

Отсюда можно найти «глубину» резкости при допустимом размытии изображения:

$$|x| \approx \frac{d}{D} \frac{a^2}{F}.$$

Глубина резкости оказывается обратно пропорциональной диаметру диафрагмы.

При маленьких диаметрах диафрагмы глубина резкости велика. Однако при этом начинают играть роль дифракционные явления. Из-за дифракции на диафрагме пучок не сходится в точку, а его изображение образует систему светлых и темных колец. Основная доля энергии попадает в небольшой центральный максимум, соответствующий дифракционной угловой расходимости пучка порядка  $\lambda/D$ , где  $\lambda$  — длина волны света. Дифракционное размытие в фокальной плоскости объектива должно быть порядка  $\Delta \sim \frac{\lambda F}{D}$ . Для видимого света с длиной волны  $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$  м и объектива с фокусным расстоянием  $F = 5$  см дифракционное размытие  $\Delta$  порядка, скажем, 0,1 мм, получается при диаметре диафрагмы  $D \sim 0,3$  мм. Таких маленьких отверстий диафрагмы не бывает в обычных объективах и дифракционное

размытие пучка для них несущественно. Тем не менее оно представляет важную характеристику объектива, так как определяет возможное предельное разрешение объектива — расстояние между двумя точками, изображения которых можно будет увидеть раздельно. Очевидно, что две точки можно будет увидеть раздельно, как говорят, разрешить, если центры дифракционных изображений этих точек отстоят друг от друга на расстояние порядка радиуса их дифракционных изображений (критерий Рэлея). Следовательно, две точки разрешимы, если угловое расстояние между ними (угол, под которым они видны) порядка углового дифракционного уширения пучка:

$$\varphi \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Например, для глаза с диаметром зрачка  $D = 4$  мм при наблюдении в свете с длиной волны  $\lambda \sim 5,5 \cdot 10^{-7}$  м

$$\varphi \sim 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Для телескопа с диаметром линзы в 2 м получим  $\varphi \sim 6 \cdot 10^{-6}$  рад. Чем больше диаметр объектива телескопа, тем лучше его разрешение. Вот почему астрономы стремятся получить в свое распоряжение телескопы с возможно большим диаметром объектива.

Но вернемся к маленьким отверстиям диафрагмы. Мы ранее пришли к выводу, что чем меньше отверстие диафрагмы, тем больше глубина резкости. При  $D \rightarrow 0$  глубина резкости стремится к  $\infty$ . При очень маленьких отверстиях диафрагмы можно выбросить линзу и устроить «дырочную» камеру — камеру-обскуру. Если такой фотокамерой фотографировать отдаленный предмет, находящийся на расстоянии, много большем размера камеры, то можно считать, что из каждой точки предмета в объектив попадает параллельный пучок лучей. Такой пучок будет давать на пленке пятно, диаметр которого равен диаметру отверстия, а глубина резкости такого объектива бесконечна. При уменьшении диаметра отверстия качество изображения будет улучшаться. Это, однако, справедливо лишь до тех пор, пока диаметр  $D$  отверстия таков, что дифракционное уширение пучка мало по сравнению с диаметром отверстия. Так как дифракционное уширение пучка растет с уменьшением  $D$ , то при уменьшении диаметра отверстия качество изображения вначале улучшается, а затем начинает ухудшаться. Наилучшее изображение получается тогда, когда дифракционное уширение оказывается порядка диаметра отверстия

$$\frac{\lambda F}{D} \sim D.$$

Отсюда найдем, что для этого диаметр отверстия должен быть порядка  $\sqrt{\lambda F}$ . Например, для света с длиной волны  $\lambda \sim 6 \cdot 10^{-7}$  м и  $F \sim 10$  см получим, что диаметр отверстия должен быть порядка 0,34 мм.

166. Прозрачные окна отражают меньше света, чем стены домов.

167. Когда рыба рассматривается с моста, лучи от нее, идущие в глаз, падают на поверхность воды под малым углом и поэтому их отражение от поверхности невелико по сравнению с тем случаем, когда рыба рассматривается с невысокого берега.

Кроме этих лучей в глаз попадают лучи от Солнца, которые создают общий слепящий фон. Если наблюдатель стоит на мосту, в его глаза попадают солнечные лучи, падающие под меньшим углом, чем в том случае, когда он стоит на берегу. Поэтому эти лучи меньше отражаются от поверхности воды и фон в этом случае менее яркий.

168. Освещенность изображения  $E$  равна отношению светового потока  $\Phi$ , проходящего через линзу, к площади изображения  $S$ . Отношение освещенностей для рассматриваемых двух случаев можно записать так:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

Освещенность поверхностей линз в обоих случаях одна и та же. Поэтому отношение световых потоков равно отношению площадей линз — целой и разрезанной пополам. Это значит, что  $\Phi_2/\Phi_1 = 1/2$ .

Теперь найдем отношение площадей изображения.

Изображение Солнца лежит в фокальной плоскости линзы. Обозначим фокусное расстояние линзы  $F$ , а угол, под которым видно Солнце с Земли,  $\alpha$ . Так как Солнце находится очень далеко от Земли, то можно считать, что из каждой точки Солнца на линзу попадает параллельный пучок лучей, собирающихся в фокальной плоскости линзы. Поэтому угол  $\alpha$  — это угол между пучками лучей, идущих от крайних точек Солнца.

Из рис. 172 видно, что радиус изображения Солнца равен

$$r = F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Но так как угол  $\alpha$  мал ( $\alpha \approx 30'$ ), то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \text{ и } r = \frac{F\alpha}{2}.$$

Для того чтобы найти размер изображения во втором случае, нужно знать фокусное расстояние составной линзы.

Заметим, что оптическая сила двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил. Действительно, луч, вышедший из фокуса первой линзы, становится после того, как он пройдет эту линзу, параллельным главной оптической оси системы и после прохождения второй линзы сойдется в ее фокусе. Обозначив фокусное расстояние сложной линзы  $F'$ , мы можем согласно формуле линзы написать

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

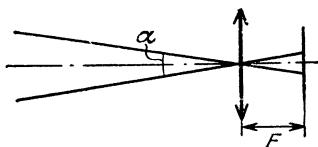


Рис. 172.

Но отсюда следует, что фокусное расстояние линзы, составленной из двух половинок плоско-выпуклой линзы, вдвое меньше фокусного расстояния целой линзы. Благодаря этому радиус изображения Солнца во втором случае будет вдвое меньше, чем в первом случае, а площадь изображения — в четыре раза меньше, то есть  $S_1/S_2 = 4$ . Поэтому  $E_2/E_1 = 2$ .

Следовательно, освещенность изображения Солнца увеличилась в два раза.

**169.** Размер солнечного зайчика обычно намного больше размера зеркала. Это связано с тем, что параллельный пучок лучей, идущий от одной точки Солнца, отражается от зеркала и, попадая на экран или стену, дает пятно, размер которого примерно равен размеру зеркала. Зайчик образуют накладывающиеся пятна, которые получаются при отражении пучков, идущих от всех точек Солнца. Размер зайчика определяется пучками лучей, идущими от диаметрально противоположных точек Солнца (рис. 173). Так как угол между этими пучками равен главному диаметру Солнца  $\alpha \approx 30'$  (углу, в котором видно Солнце с Земли), то диаметр пятна равен примерно

$2r + 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx d + L\alpha$ , где  $L$  —

расстояние до стенки. Распределение освещенности в этом пятне неравномерно, однако для оценки пренебрежем этим обстоятельством и будем считать, что Солнце находится в зените. Тогда плоскость зеркальца должна составлять угол  $45^\circ$  с направлением на Солнце и освещенность зеркальца равна  $E_0 \cos 45^\circ = E_0/\sqrt{2}$ , где  $E_0$  — освещенность прямыми солнечными лучами. Световой поток  $\Phi_0$ , попадающий на зеркальце, равен  $\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ . Прене-

брежем поглощением и рассеянием этого потока. Тогда, разделив

$\Phi$  на площадь  $S = \frac{1}{4} \pi (d + La)^2$  зайчика, найдем его среднюю освещенность:

$$E = \frac{\Phi_0}{S} = E_0 \frac{d^2}{\sqrt{2} (d + La)^2}. \quad (1)$$

Освещенность  $E$  можно подсчитать и более точно. Заменяв ход лучей от Солнца ходом лучей от его изображения,

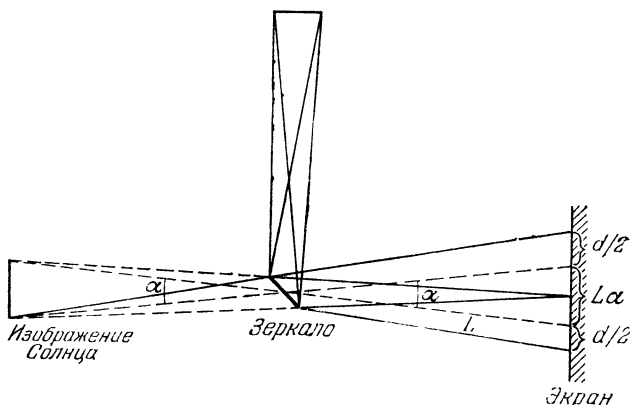


Рис. 173.

нетрудно заметить, что в середине зайчика в каждую точку приходят лучи только от тех точек Солнца, которые видны из этой

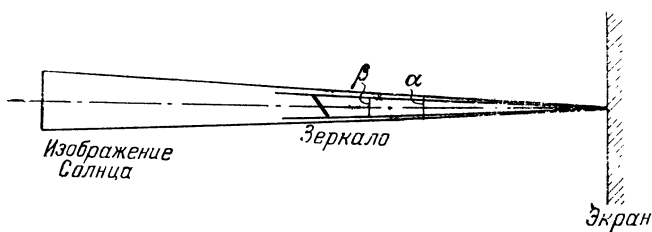


Рис. 174.

точки в угле  $\beta$ , в котором лежит диаметр зеркала, то есть в телесном угле  $\Omega_1 \sim \beta^2$  (рис. 174). При освещении прямыми солнечными лучами в каждую точку приходят лучи, идущие в угле  $\alpha$ , то есть телесном угле  $\Omega \sim \alpha^2$ . Поэтому освещенность  $E$  во столько раз меньше  $E_0$ , во сколько раз  $\Omega_1$  меньше  $\Omega$ :

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\Omega_1}{\Omega} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2.$$

Но  $\beta = d \cos 45^\circ/L$ , поэтому

$$E = E_0 \frac{d^2}{2\alpha^2 L^2}. \quad (2)$$

Для оценки можно воспользоваться любой из формул (1) или (2).

Теперь можно найти освещенность точек корабля, в которые посылают зайчики  $n$  горожан. Она равна  $nE$  и должна быть примерно такой же, как освещенность  $E_L$ , которую получают в фокальной плоскости линзы при выжигании.

Диаметр изображения Солнца в фокальной плоскости линзы равен  $F\alpha$  (см. задачу 168), а световой поток  $\Phi$ , собираемый линзой, равен  $E_0 \cdot \pi D^2/4$ . Поэтому

$$E_L = \frac{E_0 \pi D^2/4}{(F\alpha)^2/4} = E_0 \frac{D^2}{F^2 \alpha^2}.$$

Так как  $D/F \geq 0,07$ , то

$$E_L \geq 4,9 \cdot 10^{-3} \frac{E_0}{\alpha^2}.$$

Поэтому корабль можно было поджечь, если

$$nE = nE_0 \frac{d^2}{2L^2 \alpha^2} \geq 4,9 \cdot 10^{-3} \frac{E_0}{\alpha^2},$$

т. е. при

$$n \geq 4,9 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2L^2}{d^2}.$$

Подставляя сюда  $d = 1$  м и  $L = 200$  м, найдем, что  $n \geq 392$ . Столько горожан нужно было Архимеду для того, чтобы расправиться с римским флотом.

Наша оценка, по-видимому, несколько завышена. По сообщению польского журнала «Вокруг света» (№ 12 за 1974 г.) греческий физик Ионас Саккос в 1973 г. провел следующий опыт. 70 солдатам были даны отполированные листы меди размером  $150 \cdot 90$  см<sup>2</sup>. Солдаты направили отраженный солнечный свет в одно и то же место копии римского деревянного корабля, стоящего в 200 м от берега. Через две секунды после этого корабль задымился, а еще через три секунды загорелся.

**170.** Матовый колпак равномерно рассеивает свет от лампы. Поэтому, хотя яркость нити накаливания лампочки, очень велика, яркость матового колпака (т. е. световой поток, излучаемый с единицы поверхности колпака) мала. Сравнительно невелика и яркость изображения колпака на сетчатке глаза.



171. О форме блестящих предметов мы судим обычно по бликам на их поверхности. При рассеянном же освещении блики отсутствуют.

172. Так как расстояния от Солнца до Земли и Луны велики по сравнению с диаметром Солнца, то при расчетах мы можем считать, что Солнце — это точечный источник света, равномерно излучающий световую энергию во все пространство. Примем, что сила света этого источника, то есть энергия, излучаемая Солнцем в единичный телесный угол за 1 секунду, равна  $I$ . Тогда освещенность поверхности Земли в яркий солнечный день будет равна

$$E_C = \frac{I}{L^2},$$

где  $L$  — расстояние от Солнца до Земли.

Луна освещает Землю отраженным солнечным светом. Так как расстояние от Солнца до Луны можно принять равным расстоянию от Солнца до Земли, то освещенность поверхности Луны в полнолуние тоже равна  $I/L^2$ . На всю поверхность Луны попадает световая энергия

$$W = E_C \cdot \pi r^2.$$

Так как энергия  $\alpha W$  рассеивается затем равномерно по всем направлениям по «полусфере», то в единичный телесный угол излучается энергия

$$I_{\text{Л}} = \alpha \frac{E_C \pi r^2}{2\pi}$$

(полный телесный угол равен  $4\pi$ ). Теперь легко найти освещенность поверхности Земли в полнолуние. Считая Луну точечным источником с силой света  $I_{\text{Л}}$ , получим

$$E_{\text{Л}} = \alpha \frac{E_C r^2}{2l^2},$$

где  $l$  — расстояние от Луны до Земли.

Отношение освещенностей Земли в полнолуние и в солнечный день равно

$$\frac{E_C}{E_{\text{Л}}} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{r}{l} \right)^2 = \frac{1}{80\,000}.$$

Интересно, что около 300 лет назад аналогичный расчет позволил Ньютону правильно оценить расстояние до ближайших ярких звезд. Ньютон исходил из того, что видимая звездная величина некоторых звезд, например,  $\alpha$  Центавра, примерно такая же, как у Сатурна. Иными словами, освещенности, создаваемые

этими звездами и Сатурном на плоскости, перпендикулярной к световым лучам, идущим от звезд и от Сатурна, примерно одинаковы. Приведем отрывок из работы Ньютона, который мы взяли из примечания редактора русского перевода к книге Ф. Крауфорта «Волны» (М.: Наука, 1974).

«На диск Сатурна падает около  $1/2100000000$  части солнечного света. Во столько же раз поверхность этого диска меньше сферической поверхности, радиус которой равен радиусу орбиты Сатурна. Предположим, далее, что Сатурн отражает  $1/4$  часть этого света. Тогда отраженный полусферой Сатурна свет будет составлять  $1/4200000000$  часть света, испущенного полусферой Солнца.

Уменьшение света обратно пропорционально второй степени расстояния до светящегося тела. Поэтому если Солнце было бы на расстоянии от Земли в  $10000 \sqrt{42}$  раз больше, чем Сатурн, оно оказалось бы таким же ярким, каким кажется Сатурн без своего кольца. Такое свечение немного превосходило бы свечение неподвижной звезды первой величины. Таким образом, расстояние, с которого Солнце светило бы как неподвижная звезда, примерно в  $100000$  раз больше расстояния до Сатурна».

Расстояние от Сатурна до Земли равно примерно  $1,4 \cdot 10^9$  км. Таким образом, согласно расчету Ньютона расстояние до ближайших ярких звезд должно быть равно  $1,4 \cdot 10^{14}$  км. Эта оценка по порядку величины правильна для расстояния до  $\alpha$  Центавра, Сириуса, Проциона. Согласно нынешним данным расстояние до Центавра в  $28\,000$  раз, до Сириуса в  $58\,000$ , а до Проциона в  $75\,000$  раз больше расстояния от Солнца (Земли) до Сатурна.

173. Площадь изображения фонаря, даваемого хрусталиком, обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника, но и световой поток, падающий на зрачок, тоже обратно пропорционален квадрату расстояния до источника, поэтому освещенность изображения не зависит от расстояния до фонаря.

Убедимся в этом. Обозначим  $I$  энергию, излучаемую фонарем в единицу телесного угла (яркость фонаря),  $L$  — расстояние до фонаря и  $d_0$  — диаметр зрачка.

Освещенность поверхности хрусталика равна

$$E_0 = \frac{I}{L^2},$$

а световой поток, попадающий на его поверхность,

$$\Phi = \frac{E_0 \pi d_0^2}{4} = \frac{\pi I d_0^2}{4L^2}.$$

Так как расстояние до фонаря много больше фокусного расстояния  $F$  глаза, то геометрическое изображение фонаря получается в фокальной плоскости и его диаметр  $d = FD/L$ , где  $D$  — диаметр фонаря (рис. 175). Площадь изображения равна поэтому  $S = \frac{\pi D^2 F^2}{4L^2}$ , а его освещенность

$$E = \frac{\Phi}{S} = I \frac{d_0^2}{D^2 F^2}.$$

Мы видим, что освещенность не зависит от  $L$ . Отсюда следует любопытный результат. Заменяв в наших рассуждениях фонарь на звезду, а хрусталик на линзу, мы найдем, что освещенность

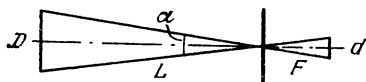


Рис. 175.

изображения звезды, которое получается с помощью линзы, не зависит от расстояния до звезды. В то же время, сфокусировав солнечные лучи, можно зажечь дерево, а сделать это

со светом, идущим от звезды, конечно, не удастся, хотя имеются звезды с диаметром, не большим диаметра Солнца и излучающие не меньше энергии, чем Солнце. В чем же здесь дело?

Мы предположили, что диаметр изображения определяется геометрическим изображением звезды. В действительности же это изображение дифракционное, ее угловой размер равен  $\lambda/d$ , а диаметр  $d' = \lambda F/d$ , где  $\lambda$  — длина волны. Этот диаметр много больше «геометрического»  $d = \frac{D}{L} F$ :

$$\frac{d'}{d} = \frac{\lambda L}{dD} \gg 1.$$

Именно поэтому освещенность изображения очень мала. Так, при  $d = 2$  см,  $\lambda/d = 2,25 \cdot 10^{-5}$  рад. Угловой диаметр Солнца равен  $4,7 \cdot 10^{-3}$  рад, а при «удалении» Солнца до ближайшей звезды  $L \approx 4 \cdot 10^{13}$  км он станет равным  $1,75 \cdot 10^{-8}$  рад. Тогда  $d'/d \sim 1,3 \cdot 10^3$ . Следовательно, освещенность изображения звезды таких же параметров, как и Солнце, в  $1,7 \cdot 10^6$  раз меньше, чем освещенность изображения Солнца.

**174.** Так как внутренняя поверхность сферы света не поглощает, то рано или поздно установится равновесие между попадающей в сферу световой энергией и выходящей из нее, т. е. сфера будет являться идеальным отражателем света.

Каждый элемент полости сферы должен излучать на всю сферу столько же световой энергии, сколько и получает.

Но поток энергии, излучаемой всей сферой на отверстие, равен падающему потоку. Отсюда следует, что освещенность всех

точек полости сферы будет такой же, какой была бы освещенность плоского экрана, установленного у отверстия в сфере.

Точка же, диаметрально противоположная отверстию, облучается двумя путями: первичным пучком и всей сферой. Оба потока при равновесии равны, следовательно, она будет в два раза больше освещена, чем все другие точки сферы.

175. Обозначим через  $B$  световой поток, испускаемый единицей площади поверхности жука внутри единичного телесного угла (поверхностная яркость). Тогда с площади  $S_0$  (рис. 176) на объектив фотоаппарата падает световой поток

$$\Phi = BS_0\Omega = BS_0 \frac{S_{\pi}}{d^2}.$$

Здесь  $\Omega = \frac{S_{\pi}}{d^2}$  — телесный угол (на самом деле это равенство не точное, а приближенное),  $S_{\pi}$  — площадь диафрагмы объектива ( $D_{\pi}$  — ее диаметр),  $d$  — расстояние от фотоаппарата до жука.

После объектива световой поток попадает на фотопленку, создавая на ней изображение. Освещенность этого изображения

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{BS_0 S_{\pi}}{d^2 S},$$

где  $S$  — площадь изображения выделенного участка поверхности жука. Найдем ее.

Поскольку линейное увеличение линзы равно  $f/d$  ( $f$  — расстояние от линзы до изображения), отношение площадей изображения и предмета

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{f}{d}\right)^2.$$

Согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

откуда  $f = \frac{Fd}{d - F}$  и

$$\frac{f}{d} = \frac{F}{d - F}.$$

Следовательно, освещенность изображения

$$E = \frac{BS_{\pi}}{d^2} \cdot \frac{S_0}{S} = \frac{BS_{\pi}(d - F)^2}{d^2 F^2}.$$

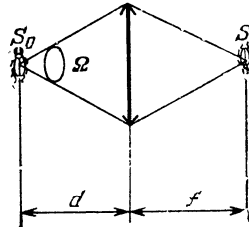


Рис. 176.

По условию задачи, при фотографировании жука в двух масштабах освещенность изображения должна быть одной и той же:

$$\frac{BS_{д1}(d_1 - F)^2}{d_1^2 F^2} = \frac{BS_{д2}(d_2 - F)^2}{d_2^2 F^2}.$$

Отсюда

$$\frac{S_{д1}}{S_{д2}} = \frac{(d_1 - F)^2 d_2^2}{(d_2 - F)^2 d_1^2} = \frac{25}{36} \quad \text{и} \quad \frac{D_{д1}}{D_{д2}} = \frac{5}{6}.$$

176. Глаз оценивает яркость объектов по освещенности их изображений на сетчатке. Чем более яркий источник, тем больше освещенность его изображения. Мерой контрастности изображения звезды на фоне неба может служить отношение освещенностей их изображений на сетчатке глаза, то есть  $E_{зв.1}/E_{ф.1}$ .

Рассмотрим сначала картину, которая образуется на сетчатке невооруженного глаза. Пусть  $d$  — диаметр зрачка,  $F$  — фокусное расстояние глазной оптики. Освещенность находится как отношение светового потока к площади изображения. При этом нужно иметь в виду, что изображение звезды (точечного источника) имеет вид дифракционного пятна. Его диаметр в фокальной плоскости линзы порядка  $\lambda F/d$ , где  $\lambda$  — длина волны.

Выберем небольшой элемент неба (фона). Световой поток от этого удаленного источника света, попадающий в глаз, очевидно, пропорционален  $d^2$ . Площадь изображения такого протяженного источника пропорциональна  $F^2$ . Отсюда освещенность фона  $E_{ф.1} \sim d^2/F^2$ . Коэффициент пропорциональности определяется яркостью источника и не меняется при изменении способа наблюдений.

Световой поток от звезды также пропорционален  $d^2$ , а площадь дифракционного изображения на сетчатке пропорциональна  $(\lambda F/d)^2$ . Таким образом,  $E_{зв.1} = \frac{d^2}{(\lambda/d)^2 F^2} = \frac{d^4}{\lambda^2 F^2}$ . Отношение освещенностей изображений звезды и фона на сетчатке невооруженного глаза равно

$$\alpha_1 = \frac{E_{зв.1}}{E_{ф.1}} \sim \frac{d^2}{\lambda^2}. \quad (1)$$

В реальных условиях дневного наблюдения это отношение, являющееся мерой контрастности изображений, таково, что невооруженный глаз практически не видит звезды на фоне яркого неба.

Пусть теперь глаз вооружен телескопом. Телескоп состоит из двух линз: объектива и окуляра. Ход лучей от бесконечно уда-

ленного объекта, находящегося на оптической оси телескопа, показан на рис. 177. Первое изображение объекта получается в фокальной плоскости объектива  $O_1$ . Глаз рассматривает это изображение через окуляр как через лупу. Изображение, которое получается на сетчатке глаза, подобно изображению в фокальной плоскости объектива. Поэтому для решения нашей задачи достаточно рассмотреть отношение освещенностей изображений звезды и фона в этой плоскости. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим

$$\alpha_2 = \frac{E_{зв. 2}}{E_{ф. 2}} \sim \frac{D^2}{\lambda^2}, \quad (2)$$

где  $D$  — диаметр объектива телескопа. Поскольку коэффициенты пропорциональности в выражениях (1) и (2) одни и те же (они зависят только от самих источников света — звезды и фона), то

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Таким образом, телескоп увеличивает контрастность изображения звезды на фоне неба в  $(D/d)^2$  раз. В нашем примере  $(D/d)^2 = 100$ , так что  $D/d = 10$ .

Для больших астрономических телескопов это отношение достигает значений порядка  $10^5$ — $10^6$ . С помощью таких телескопов можно увидеть днем даже очень слабые звезды.

177. Найдем вначале количество метана в вертикальном столбе земной атмосферы с площадью основания  $S$ . Давление этого столба на поверхность Земли равно атмосферному давлению  $p_0$ . С другой стороны, это давление равно силе тяжести воздушного столба, деленной на площадь  $S$ . Пренебрегая изменением ускорения силы тяжести с высотой (это можно сделать, так как граница атмосферы лежит на высоте около 200 км, а это много меньше радиуса Земли 6400 км), мы можем записать:

$$p_0 = \frac{mg}{S}.$$

Отсюда

$$m = \frac{p_0 S}{g}.$$

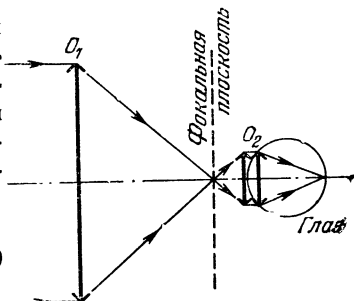


Рис. 177.

Умножив  $m$  на  $\alpha$ , получим массу метана в этом столбе:

$$m_{\text{CH}_4} = \alpha m = \frac{\alpha \rho_0 S}{g}.$$

Теперь найдем, слой какой толщины  $x$  составляла бы эта масса метана при нормальных условиях (площадь основания цилиндра по-прежнему равна  $S$ ). Запишем уравнение газового состояния:

$$\rho_0 S x = \frac{m_{\text{CH}_4}}{\mu} RT,$$

где  $Sx$  — объем массы метана  $m_{\text{CH}_4}$ ,  $\mu = 16 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса,  $T = 273$  К и  $\rho_0 = 1$  атм. Подставив в это уравнение выражение для массы метана, найдем

$$x = \frac{\alpha RT}{g\mu}.$$

Если энергия излучения равна вначале  $E_0$ , то после того как излучение пройдет слой толщиной  $a = 1$  см, энергия излучения станет равной  $(1 - q)E_0$ . Следующий сантиметр метана поглотит  $q$ -ю часть этой оставшейся энергии излучения. В результате после того как излучение пройдет слой метана толщиной 2 см, энергия излучения будет составлять  $(1 - q)^2 E_0$  и т. д. После прохождения слоя метана толщины  $x$  энергия излучения будет составлять

$$E = (1 - q)^{x/a} E_0,$$

т. е.  $(1 - q)^{x/a}$ -ю часть первоначального излучения.

Подставив в эту формулу численные значения всех входящих в нее величин, найдем, что при прохождении атмосферы излучение ослабнет в  $4 \cdot 10^{-4}$  раз.

# СОДЕРЖАНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ЗАДАЧИ	5
МЕХАНИКА	5
ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	17
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	22
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	31
ОПТИКА	35
РЕШЕНИЯ	39



*Иосиф Шаевич Слободецкий*  
*Лев Григорьевич Асламазов*

## **ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ**

---

М., 1980 г., 176 стр. с илл.

(Серия: Библиотечка «Квант»)

Редактор *И. Г. Вирко.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректор *Л. С. Сомова.*

**ИБ № 11621**

Сдано в набор 18.03.80. Подписано к печати 14.08.80. Т-12469. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>,  
Тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 9,24.  
Уч.-изд. л. 9,54. Тираж 150000 экз. Заказ № 582. Цена книги 30 коп.

**Издательство «Наука»**

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового  
Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им.  
Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете  
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ле-  
нинград, Л-52, Измайловский проспект, 29,

**БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

- Вып. 1. М. П. Бронштейн. Атомы и электроны.**
- Вып. 2. М. Фарадей. История свечи.**
- Вып. 3. О. Оре. Приглашение в теорию чисел.**
- Вып. 4. Опыты в домашней лаборатории.**
- Вып. 5. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. Задачи по физике.**

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ В 1980 г.

- Вып. 6. Л. П. Мочалов. Головоломки.**
- Вып. 7. П. С. Александров. Введение в теорию групп.**
- Вып. 8. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп.**
- Вып. 9. Замечательные ученые.**
- Вып. 10. В. М. Глушков, В. Я. Валах. Что такое ОГАС?**